

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Книга 2 — Механика

Том 88, 1994

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Livre 2 — Mécanique

Tome 88, 1994

ВЪРХУ ДВИЖЕНИЕТО И ДЕФОРМАЦИЯТА НА ДВЕ ФЛУИДНИ ЧАСТИЦИ В ЕЛЕКТРИЧНО ПОЛЕ

ЕКАТЕРИНА ЧЕРВЕНИВАНОВА, ЯВОР ХРИСТОВ, ЗАПРЯН ЗАПРЯНОВ

Екатерина Червениванова, Явор Христов, Запрян Запрянков. О ДВИЖЕНИИ И ДЕФОРМАЦИИ ДВУХ ЖИДКИХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Рассмотрены медленные стационарные течения, порожденные электрическим полем вне и внутри двух жидких частиц. Течения осесимметричны, а жидкости — ньютоновские, несжимаемые и обладающие постоянными, хотя и различными вязкостями. Получены полуаналитические решения как для электрического, так и для гидродинамического поля внутри и вне частиц.

Подсчитаны малые деформации частиц. Одновременно с этим определены порожденные электрическим полем движение и деформация составной жидкой частицы.

Ekaterina Chervenivanova, Yavor Christov, Zapryan Zapryanov. ON THE MOTION AND DEFORMATION OF TWO FLUID PARTICLES IN AN ELECTRIC FIELD

The steady creeping flows, produced by an electric field, in and around two fluid particles are considered. The flows are assumed to be axisymmetric and the fluids are considered to be Newtonian, incompressible, and possessing constant, though different viscosities. Semianalytical solutions for both the electric and the flow fields in and around the fluid particles are obtained. Further, small deformations of the two fluid particles are calculated. At the same time the motion and deformation of a compound droplet produced by an electric field are determined.

Ще разгледаме ососиметричната задача за влиянието върху хидродинамичното поле на електричното поле $E = -\text{grad}\Phi$, приложено успоредно на оста z , във флуид, съдържащ в себе си две капки, поставени по тази ос, или една съставна капка. Ще покажем как може да се намери деформацията на междуфазовите граници. В предложения теоретичен модел е

избягнато използването на напреженията, породени от електричното поле, които са нелинейни (квадратични) и се отнасят до второ приближение. Досега такава постановка на електрохидродинамичната задача почти не е използвана, поради което теоретичният модел не е разработен в дълбочина. В статиите на *Sozou* [1] и *Oguz, Sadhal* [2] е намерено второто приближение на движението на флуида, породено от електричното поле, без да е намерено първото! Флуидът започва да се движи поради две причини — вследствие на напреженията, породени от електричното поле върху междуфазовите граници, но преди това в първо приближение се получава тангенциална скорост U_s , вследствие възникване и запазване на зарядите върху тези граници, $\operatorname{div}_s \vec{v}_s = k_j n$ [Левич [3]: (95.7), с. 476; (69.7), с. 392]. При така определената повърхнинна тангенциална скорост за хидродинамичната задача се използват уравненията на Скривън за тангенциалните и нормалните напрежения.

1. ФОРМУЛИРАНЕ НА ЗАДАЧАТА

Предполагаме, че флуидът е вискозен, несвиваем и електрически проводим. Използваме бисферична координатна система

$$z = \frac{c \cdot \operatorname{sh} \eta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}, \quad r = \frac{c \cdot \sin \xi}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}, \quad \varphi = \varphi,$$

$$0 \leq \xi \leq \pi, \quad -\infty < \eta < \infty, \quad 0 \leq \varphi < \infty.$$

При две външни капки междуфазовите повърхнини имат уравнения

$$\eta_1 = \operatorname{const} > 0, \quad \eta_2 = \operatorname{const} < 0,$$

а при съставна капка —

$$\eta_1 = \operatorname{const} > 0, \quad \eta_2 = \operatorname{const} > 0,$$

като $\eta_1 > \eta_2$ и η_1 е вътрешната междуфазова граница.

Предполага се, че извън междуфазовите граници електричното поле е електростатично — *Reed, Morrison* [4], и флуидите не са нито перфектни проводници, нито перфектни изолатори, т. е. имат малка електропроводимост ϵ_i и диелектрични константи k_i , вследствие на което се получава тангенциална повърхностна скорост. Може да се направи сравнение с двойния слой върху твърдата сфера. При тези условия електростатичната задача се отделя от хидродинамичната.

1.1. Определяне на електростатичния потенциал Φ ($E = -\operatorname{grad} \Phi$). Във всяка от флуидните области трябва да се удовлетворява уравнението на Лаплас

$$(1) \quad \nabla^2 \Phi_i = 0.$$

В безкрайната външна област

$$(2) \quad \Phi_3 \rightarrow -E_0 z \quad \text{при} \quad z^2 + z^2 \rightarrow \infty.$$

Върху всяка от междуфазовите граници трябва да има непрекъснатост на Φ (или непрекъснатост на тангенциалната компонента на E), непрекъснатост на нормалната компонента на потока на зарядите, т. е. непрекъснатост на нормалната компонента на $\epsilon' E$, където ϵ' е електричната проводимост на флуида, т. е. върху η_i за две капки са изпълнени

$$(3) \quad \begin{aligned} \eta = \eta_1, \quad \Phi_1 = \Phi_3, \quad \frac{\partial \Phi_3}{\partial \eta} = \epsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}, \quad \epsilon_1 = \frac{\epsilon'_1}{\epsilon'_3}, \\ \eta = \eta_2, \quad \Phi_2 = \Phi_3, \quad \frac{\partial \Phi_3}{\partial \eta} = \epsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta}, \quad \epsilon_2 = \frac{\epsilon'_2}{\epsilon'_3}, \end{aligned}$$

а върху междуфазовите граници за съставна капка:

$$(4) \quad \begin{aligned} \eta = \eta_1, \quad \Phi_1 = \Phi_2, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} = \epsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}, \quad \epsilon_1 = \frac{\epsilon'_1}{\epsilon'_2}, \\ \eta = \eta_2, \quad \Phi_2 = \Phi_3, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} = \epsilon_2 \frac{\partial \Phi_3}{\partial \eta}, \quad \epsilon_2 = \frac{\epsilon'_3}{\epsilon'_2}. \end{aligned}$$

1.2. Хидродинамична задача. Тъй като задачите са ососиметрични, можем да въведем функция на тока Ψ . Както и в *Taylor* [5] предполагаме, че около проводящата капка в проводящия флуид електричното поле е статично, и пренебрегваме пренасянето от хидродинамичния поток на електростатичните повърхнинни заряди, т. е. предполагаме, че електростатичният потенциал не се влияе от индуцираното движение. Но за разлика от досегашните разработки няма да пренебрегнем напълно повърхнинните заряди, които предизвикват движението на флуида, а ще ги включим в граничните условия.

Във всички области функцията на тока Ψ_i удовлетворява уравнението на Стокс

$$E^4 \Psi_i = 0, \quad E^2 \equiv \frac{\text{ch}\eta - \beta}{c^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} (\text{ch}\eta - \beta) \frac{\partial}{\partial \eta} + (1 - \beta^2) \frac{\partial}{\partial \beta} (\text{ch}\eta - \beta) \frac{\partial}{\partial \beta} \right\}.$$

Връзката на функцията на тока Ψ_i с компонентите на скоростта има вида

$$u_\xi = -\frac{(\text{ch}\eta - \beta)^2}{c^2 \sin \xi} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}, \quad u_\eta = \frac{(\text{ch}\eta - \beta)^2}{c^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \beta}, \quad \beta = \cos \xi.$$

Далеч от капките векторът на скоростта \vec{u}_3 трябва да клони към нула:

$$\vec{u}_3 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z^2 + z^2 \rightarrow 0.$$

Върху междуфазовите граници допускаме, че се появяват дрейфови скорости \vec{U}_i на създадения поток от електричното поле. Тези скорости ще бъдат изчислени при баланса на силите, действащи върху капките, както това се прави при температурно хидродинамичните задачи.

Задачите са линейни. Затова функцията на тока Ψ се търси като сбор от функции на тока Ψ^{u_i} , които са пропорционални съответно на u_i и на Ψ^E , дължаща се на електричното поле, т. е.

$$\Psi = u_1 \Psi^{u_1} + u_2 \Psi^{u_2} + \Psi^E.$$

Следователно от непрекъснатостта на нормалните и тангенциалните компоненти на скоростта следват граничните условия:

1. При две капки:

$$(5) \quad \begin{aligned} \eta = \eta_1, \quad \vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 = \vec{u}_3 \cdot \vec{n}_1 = \vec{U}^{(1)} \cdot \vec{n}_1, \quad \vec{u}_1 \cdot \vec{\tau}_1 = \vec{u}_3 \cdot \vec{\tau}_1, \\ \eta = \eta_2, \quad \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_2 = \vec{u}_3 \cdot \vec{n}_2 = \vec{U}^{(2)} \cdot \vec{n}_2, \quad \vec{u}_2 \cdot \vec{\tau}_2 = \vec{u}_3 \cdot \vec{\tau}_2. \end{aligned}$$

2. При съставна капка:

$$(6) \quad \begin{aligned} \vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 = \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_1 = \vec{U}^1 \cdot \vec{n}_1, \\ \eta = \eta_1, \\ \vec{u}_1 \cdot \vec{\tau}_1 = \vec{u}_2 \cdot \vec{\tau}_1, \\ \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_2 = \vec{u}_3 \cdot \vec{n}_2 = \vec{U}^2 \cdot \vec{n}_2, \\ \eta = \eta_2, \\ \vec{u}_2 \cdot \vec{\tau}_2 = \vec{u}_3 \cdot \vec{\tau}_2. \end{aligned}$$

Тук \vec{n}_i и $\vec{\tau}_i$ са съответно единичните нормални и тангенциални вектори към междуфазовите граници.

От уравненията на Скривън за тангенциалните напрежения имаме

$$(7) \quad T_{nt}^{(l)} - T_{nt}^{(i)} = (\gamma + \epsilon) \text{grad}_s (\text{div}_s v^{s_i})$$

върху всяка от междуфазовите граници. Тук (l) означава външния флуид, а i — вътрешния, $v^{(s)}$ е тангенциалната скорост върху повърхността, породена вследствие запазването на повърхнинните заряди, т. е.

$$(8) \quad \text{div}_s v^{(s)} = -4\pi\rho = \frac{ch\eta - \beta}{c} \left[k^{(l)} \frac{\partial \Phi^{(l)}}{\partial \eta} - k^{(i)} \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial \eta} \right],$$

където k е диелектрична константа.

С помощта на потенциалите $\Phi^{(l)}$ и $\Phi^{(i)}$ можем да намерим $\text{div}_s v^{(s)}$, а оттам определяме и тангенциалните напрежения в хидродинамичната задача. Следователно скоростното поле на флуидния поток се определя от потенциала Φ в първо приближение.

След като определим скоростното поле на флуидния поток, можем да намерим и деформацията на междуфазовите граници по метода, разработен в дисертацията на Е. Червенованова [6] и публикациите [7 – 10], но в случая нормалните напрежения се записват, като се използват уравненията на Скривън [11], съдържащи допълнителна дясна част $(\gamma + \epsilon) \text{div}_s \vec{v}^{(s)}$, т. е.

$$T_{nn}^{(l)} - T_{nn}^{(i)} = 2H\sigma + (\gamma + \epsilon) \text{div}_s \vec{v}^{(s)},$$

където $2H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ е главната кривина.

2. РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧАТА

2.1. Намиране на решението за електрично поле. Решението на уравнението на Лаплас (1) в бисферични координати се дава от формулата

$$(9) \quad \Phi = (\operatorname{ch}\eta - \beta)^{1/2} E_0 \cdot c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta + B_n \operatorname{ch} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta \right] P_n(\beta),$$

където $\Phi \rightarrow 0$ при $r^2 + z^2 \rightarrow \infty$.

За потенциалите в различните флуидни области имаме:

1. *При две капки*

$$\Phi_1 = E_0 c (\operatorname{ch}\eta - \beta)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-(n+\frac{1}{2})\eta} P_n(\beta) - E_0 z,$$

където $P_n(\beta)$ са полиномите на Лъожандър, $\eta > \eta_1 > 0$;

$$\Phi_2 = E_0 c (\operatorname{ch}\eta - \beta)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{(n+\frac{1}{2})\eta} P_n(\beta) - E_0 z, \quad \eta < \eta_2 < 0;$$

$$\Phi_3 = E_0 c (\operatorname{ch}\eta - \beta)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta + B_n \operatorname{ch} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta \right] P_n(\beta) - E_0 z,$$

където

$$z = \frac{c \operatorname{ch}\eta}{\operatorname{ch}\eta - \beta} = \mp \sqrt{2} (\operatorname{ch}\eta - \beta)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) e^{\pm(n+\frac{1}{2})\eta} P_n(\beta).$$

2. *При съставна капка*

$$\Phi_1 = E_0 c (\operatorname{ch}\eta - \beta)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-(n+\frac{1}{2})\eta} - E_0 z, \quad \eta > \eta_1 > 0;$$

$$\Phi_2 = E_0 c (\operatorname{ch}\eta - \beta)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta + B_n \operatorname{ch} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta \right] P_n(\beta) - E_0 z,$$

$\eta_2 < \eta < \eta_1;$

$$\Phi_3 = E_0 c (\operatorname{ch}\eta - \beta)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{(n+\frac{1}{2})\eta} P_n(\beta) - E_0 z, \quad \eta < \eta_2.$$

Навсякъде в разглежданите области решението е ограничено, а във външната област $\Phi_3 \rightarrow E_0 z$ при $r^2 + z^2 \rightarrow \infty$ и този потенциал се появява и вътре в капките поради непрекъснатостта. При поставените гранични условия (3) или (4) намираме неизвестните коефициенти A_n, B_n, a_n, b_n съответно за всеки от потенциалите.

По-конкретно получаваме следната рекурентна система:

а) при две външни капки

$$a_n e^{-(n+\frac{1}{2})\eta_1} = A_n \operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta_2 + B_n \operatorname{ch} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta_1,$$

$$b_n e^{(n+\frac{1}{2})\eta_2} = A_n \operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta_2 + B_n \operatorname{ch} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta_2,$$

$$\left(n + \frac{1}{2} \right) \left\{ A_{n+1} \left[\operatorname{ch} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_1 + \varepsilon_1 \operatorname{sh} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_1 \right] \right.$$

$$\left. + B_{n+1} \left[\operatorname{sh} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_1 + \varepsilon_1 \operatorname{ch} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_1 \right] \right\}$$

$$+ n \left\{ A_{n-1} \left[\operatorname{ch} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_1 + \varepsilon_1 \operatorname{sh} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_1 \right] \right.$$

$$\left. + B_{n-1} \left[\operatorname{ch} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_1 + \varepsilon_1 \operatorname{ch} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_1 \right] \right\}$$

$$- A_n \left\{ (1 - \varepsilon_1) \operatorname{sh} \eta_1 \operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta_1 + (2n+1) \operatorname{ch} \eta_1 \left[\operatorname{ch} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta_1 + \varepsilon_1 \operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta_1 \right] \right\}$$

$$- B_n \left\{ (1 - \varepsilon_1) \operatorname{sh} \eta_1 \operatorname{ch} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta_1 + (2n+1) \operatorname{ch} \eta_1 \left[\operatorname{ch} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta_1 + \varepsilon_1 \operatorname{ch} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta_1 \right] \right\}$$

$$= -2\sqrt{2}(1 - \varepsilon_1) e^{-(n+\frac{1}{2})\eta_1} [\operatorname{ch} \eta_1 - (2n+1) \operatorname{sh} \eta_1];$$

$$(n+1) \left\{ A_{n+1} \left[\operatorname{ch} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_2 - \varepsilon_2 \operatorname{sh} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_1 \right] \right.$$

$$\left. + B_{n+1} \left[\operatorname{sh} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_2 - \varepsilon_2 \operatorname{ch} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_2 \right] \right\}$$

$$+ n \left\{ A_{n-1} \left[\operatorname{ch} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_2 - \varepsilon_2 \operatorname{sh} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_2 \right] \right.$$

$$\left. + B_{n-1} \left[\operatorname{sh} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_2 - \varepsilon_2 \operatorname{ch} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_2 \right] \right\}$$

$$- A_n \left\{ (1 - \varepsilon_2) \operatorname{sh} \eta_2 \operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta_2 + (2n+1) \operatorname{ch} \eta_1 \left[\operatorname{ch} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta_2 - \varepsilon_2 \operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta_2 \right] \right\}$$

$$- B_n \left\{ (1 - \varepsilon_2) \operatorname{sh} \eta_2 \operatorname{ch} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta_2 + (2n+1) \operatorname{ch} \eta_2 \left[\operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta_2 - \varepsilon_2 \operatorname{ch} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta_2 \right] \right\}$$

$$= -2\sqrt{2}(1 - \varepsilon_2) e^{(n+\frac{1}{2})\eta_2} [\operatorname{ch} \eta_2 + (2n+1) \operatorname{sh} \eta_2].$$

б) при съставна капка

$$a_n e^{-(n+\frac{1}{2})\eta_1} = A_n \operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta_1 + B_n \operatorname{ch} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta_1,$$

$$b_n e^{(n+\frac{1}{2})\eta_2} = A_n \operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta_2 + B_n \operatorname{ch} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta_2,$$

$$(n+1) \left\{ A_{n+1} \left[\operatorname{ch} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_1 + \varepsilon_1 \operatorname{sh} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_1 \right] \right.$$

$$\left. + B_{n+1} \left[\operatorname{sh} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_1 + \varepsilon_1 \operatorname{ch} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_1 \right] \right\}$$

$$+ n \left\{ A_{n-1} \left[\operatorname{ch} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_1 + \varepsilon_1 \operatorname{sh} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_1 \right] \right.$$

$$\left. + B_{n-1} \left[\operatorname{sh} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_1 + \varepsilon_1 \operatorname{ch} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_1 \right] \right\}$$

$$- A_n \left\{ (1 - \varepsilon_1) \operatorname{sh} \eta_1 \operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta_1 + (2n+1) \operatorname{ch} \eta_1 \left[\operatorname{ch} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta_1 + \varepsilon_1 \operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta_1 \right] \right\}$$

$$- B_n \left\{ \operatorname{sh} \eta_1 (1 - \varepsilon_1) \operatorname{ch} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta_1 + \operatorname{ch} \eta_1 (2n+1) \left[\operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta_1 + \varepsilon_1 \operatorname{ch} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta_1 \right] \right\}$$

$$= -2\sqrt{2}(1 - \varepsilon_1) e^{-(n+\frac{1}{2})\eta_1} [\operatorname{ch} \eta_1 - (2n+1) \operatorname{sh} \eta_1];$$

$$(n+1) \left\{ A_{n+1} \left[\operatorname{ch} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_2 - \varepsilon_2 \operatorname{sh} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_2 \right] \right.$$

$$\left. + B_{n+1} \left[\operatorname{sh} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_2 - \varepsilon_2 \operatorname{ch} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_2 \right] \right\}$$

$$+ n \left\{ A_{n-1} \left[\operatorname{ch} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_2 - \varepsilon_2 \operatorname{sh} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_2 \right] \right.$$

$$\left. + B_{n-1} \left[\operatorname{sh} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_2 - \varepsilon_2 \operatorname{ch} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_2 \right] \right\}$$

$$- A_n \left\{ (1 - \varepsilon_2) \operatorname{sh} \eta_2 \operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta_2 + (2n+1) \operatorname{ch} \eta_2 \left[\operatorname{ch} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta_2 - \varepsilon_2 \operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta_2 \right] \right\}$$

$$- B_n \left\{ (1 - \varepsilon_2) \operatorname{sh} \eta_2 \operatorname{ch} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta_2 + (2n+1) \operatorname{ch} \eta_2 \left[\operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta_2 - \varepsilon_2 \operatorname{ch} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta_2 \right] \right\}$$

$$= -2\sqrt{2}(1 - \varepsilon_2) e^{-(n+\frac{1}{2})\eta_2} [\operatorname{ch} \eta_2 - (2n+1) \operatorname{sh} \eta_2].$$

При намиране на уравненията в горните две рекурентни системи са използвани следните две формули:

$$\frac{\operatorname{ch}\eta}{(\operatorname{ch}\eta - \beta)^2} - \frac{\operatorname{sh}^2\eta}{(\operatorname{ch}\eta - \beta)^4} = \frac{1}{\sqrt{2}(\operatorname{ch}\eta - \beta)^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} [\operatorname{ch}\eta + (2n+1)\operatorname{sh}|\eta|] e^{-(n+\frac{1}{2})|\eta|} P_n(\beta),$$

$$\frac{\operatorname{sh}\eta}{\operatorname{ch}\eta - \beta} = \sqrt{2}(\operatorname{ch}\eta - \beta)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) e^{\pm(n+\frac{1}{2})\eta} P_n(\beta).$$

Двете рекурентни системи се решават числено чрез триточкова матрична прогонка.

След като се определят потенциалите от двете страни на междуфазовите граници, може да се намери повърхнинният заряд, който се дължи на съществуването на потенциалния градиент от вътрешната и външната страна на границата между диелектрици, като полученият заряд трябва да се запази (*Taylor* [5]).

Следователно върху междуфазовата граница имаме

$$\frac{\operatorname{ch}\eta - \beta}{c} \left[k^{(e)} \frac{\partial\Phi^{(e)}}{\partial\eta} - k^{(i)} \frac{\partial\Phi^{(i)}}{\partial\eta} \right] = -4\pi\rho.$$

Ще преобразуваме тази формула в удобен за по-нататъшните ни пресмятания вид. Като използваме граничното условие

$$\frac{\partial\Phi^{(i)}}{\partial\eta} = \frac{\varepsilon^{(e)}}{\varepsilon^{(i)}} \frac{\partial\Phi^{(e)}}{\partial\eta},$$

получаваме

$$(10) \quad \begin{aligned} k^{(e)} \frac{\partial\Phi^{(e)}}{\partial\eta} - k^{(i)} \frac{\partial\Phi^{(i)}}{\partial\eta} &= k^{(e)} \frac{\partial\Phi^{(e)}}{\partial\eta} - k^{(i)} \frac{\varepsilon^{(e)}}{\varepsilon^{(i)}} \frac{\partial\Phi^{(e)}}{\partial\eta} \\ &= (k^{(e)} - k^{(i)} \frac{\varepsilon^{(e)}}{\varepsilon^{(i)}}) \frac{\partial\Phi^{(e)}}{\partial\eta}. \end{aligned}$$

Целта на тези преобразувания е да се създадат условия за разделяне на променливите. По-конкретно получаваме:

а) за две капки

$$\left. \frac{\partial\Phi_3}{\partial\eta} \right|_{\eta=\eta_1} = -\frac{\varepsilon_1 \cdot E_0 c}{1 - \varepsilon_1} (\operatorname{ch}\eta_1 - \beta)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(A_n + B_n) l^{(n+\frac{1}{2})\eta_1} P_n(\beta),$$

$$\left. \frac{\partial\Phi_3}{\partial\eta} \right|_{\eta=\eta_2} = -\frac{\varepsilon_2 E_0 c}{1 - \varepsilon_2} (\operatorname{ch}\eta_2 - \beta)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(A_n - B_n) e^{-(n+1)\eta_2} P_n(\beta).$$

б) при съставна капка

$$\left. \frac{\partial\Phi_2}{\partial\eta} \right|_{\eta=\eta_1} = -\frac{\varepsilon_1 \cdot E_0 c}{1 - \varepsilon_1} (\operatorname{ch}\eta_1 - \beta)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(A_n + B_n) e^{(n+\frac{1}{2})\eta_1} P_n(\beta),$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right|_{\eta=\eta_2} = -\frac{\varepsilon_2 \cdot E_0 c}{1 - \varepsilon_2} (\operatorname{ch} \eta_2 - \beta)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(A_n - B_n) e^{-(n+\frac{1}{2})\eta_2} P_n(\beta).$$

За краткост тези формули могат да се запишат така:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = cWE (\operatorname{ch} \eta - \beta)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(\eta) P_n(\beta),$$

където

$$WE = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} E_0.$$

2.2. Намиране полето на скоростите на флуидния поток, породен от електричното поле. Функциите на тока имат следния вид:

1. При две капки

$$\Psi_1^{(i)} = (\operatorname{ch} \eta - \beta)^{-3/2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n^1 e^{-(n-\frac{1}{2})\eta} + d_n^1 e^{-(n+\frac{3}{2})\eta} \right] v_n(\beta), \quad \eta > \eta_1 > 0;$$

$$\Psi_2^{(i)} = (\operatorname{ch} \eta - \beta)^{-3/2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n^{(2)} e^{-(n-\frac{1}{2})\eta} + d_n^2 e^{(n+\frac{3}{2})\eta} \right] v_n(\beta), \quad \eta < \eta_2 < 0;$$

$$\Psi^{(l)} = (\operatorname{ch} \eta - \beta)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \operatorname{ch} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta + B_n \operatorname{sh} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta + C_n \operatorname{ch} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta + D_n \operatorname{sh} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta \right] v_n(\beta),$$

където $v_n(\beta) = P_{n-1}(\beta) - P_{n+1}(\beta)$, $P_n(\beta)$ са полиномите на Лъожандър.

2. При съставна капка

$$\Psi_1^{(i)} = (\operatorname{ch} \eta - \beta)^{-3/2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n^{(1)} e^{-(n-\frac{1}{2})\eta} + d_n^{(1)} e^{-(n+\frac{1}{2})\eta} \right] v_n(\beta), \quad \eta > \eta_1 > 0;$$

$$\Psi_2 = (\operatorname{ch} \eta - \beta)^{-3/2}$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \operatorname{ch} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta + B_n \operatorname{sh} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta + C_n \operatorname{ch} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta + D_n \operatorname{sh} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta \right] v_n(\beta),$$

$$\eta_1 > \eta > \eta_2 > 0;$$

$$\Psi_3 = (\operatorname{ch} \eta - \beta)^{-3/2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n^{(3)} e^{(n-\frac{1}{2})\eta} + d_n^{(3)} e^{(n+\frac{3}{2})\eta} \right] v_n(\beta), \quad \eta < \eta_2 > 0.$$

За по-кратко записване ще използваме означението

$$\Psi = (\operatorname{ch} \eta - \beta)^{-3/2} \sum_{n=1}^{\infty} U_n(\eta) v_n(\beta).$$

Неизвестните константи се определят от граничните условия (5) – (7).

Ще запишем по-подробно условието (7) за тангенциалните напрежения, чрез които се индуцира движението на флуида вследствие на повърхнинния заряд.

От закона за запазване на зарядите имаме

$$\operatorname{div}_s v^{(s)} = -4\pi\rho = \frac{\operatorname{ch}\eta - \beta}{c} \left(k^{(l)} - k^{(i)} \frac{\varepsilon^{(l)}}{\varepsilon^{(i)}} \right) \frac{\partial\Phi^{(l)}}{\partial\eta}.$$

Ако означим $(k^{(e)} - k^{(i)})(\gamma + \varepsilon) = \chi$, условията за напреженията добиват вида

$$(11) \quad T_{nt}^{(e)} - T_{nt}^{(i)} = \chi \operatorname{grad}_s \left(\frac{\operatorname{ch}\eta - \beta}{c} \frac{\partial\Phi^{(e)}}{\partial\eta} \right),$$

$$(12) \quad T_{nn}^{(e)} - T_{nn}^{(i)} = \left[\chi \cdot \frac{\operatorname{ch}\eta - \beta}{c} \cdot \frac{\partial\Phi^{(e)}}{\partial\eta} + \sigma \right] 2H.$$

Изразени чрез функцията на тока и скоростта U_i върху повърхнините на междуфазовите граници, напреженията са

$$T_{\xi\eta} \Big|_{\eta=\eta_i} = \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial\eta} \left[\frac{(\operatorname{ch}\eta - \beta)^3}{c^3 \sin\xi} \frac{\partial\Psi}{\partial\eta} \right] + \frac{U_i}{c} \operatorname{ch}\eta \sin\xi \right\} \Big|_{\eta=\eta_i},$$

където U_i е скоростта на междуфазовата граница.

За екока на нормалните напрежения имаме

$$\Delta T_{\xi\eta} = \frac{(\operatorname{ch}\eta - \beta)^{3/2}}{c^3 \sin\xi} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\partial^2 U_n^{(e)}}{\partial\eta^2} - \lambda_i \frac{\partial^2 U_n^{(i)}}{\partial\eta^2} \right] v_n(\beta) - \frac{1}{2}(1 - \lambda_i) U_i c^2 (1 - \beta^2) \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} (\operatorname{ch}\eta - \beta) \right\} \Big|_{\eta},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_s \left(\frac{\operatorname{ch}\eta - \beta}{c} \frac{\partial\Phi^{(e)}}{\partial\eta} \right) &= -\sin\xi \frac{\operatorname{ch}\eta - \beta}{c^2} \frac{\partial}{\partial\beta} (\operatorname{ch}\eta - \beta) \frac{\partial\Phi^{(l)}}{\partial\eta} \\ &= -\sin\xi \frac{\operatorname{ch}\eta - \beta}{c^2} \frac{\partial}{\partial\beta} W E \frac{\partial}{\partial\beta} (\operatorname{ch}\eta - \beta)^{3/2} \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(\eta) v_n(\beta), \end{aligned}$$

където $\lambda_i = \frac{\mu^{(i)}}{\mu^{(e)}}$.

След преобразуване получаваме

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_s \left(\frac{\operatorname{ch}\eta - \beta}{c} \frac{\partial\Phi^{(l)}}{\partial\eta} \right) &= W E \frac{(\operatorname{ch}\eta - \beta)^{3/2}}{c \sin\xi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2(2n-1)} Q_{n-1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{n(n+1)}{2n+1} \operatorname{ch}\eta Q_n + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+1)} Q_{n+1} \right] v_n(\beta). \end{aligned}$$

Сега ще вземем предвид, че $\frac{1 - \beta^2}{(\text{ch}\eta - \beta)^{1/2}}$

$$= \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2n+1} \left[\frac{e^{\pm(n-\frac{1}{2})\eta}}{2n-1} - \frac{e^{\pm(n+\frac{3}{2})\eta}}{2n+3} \right] v_n(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n^{(1)}(\eta) \cdot v_n(\beta),$$

$$\frac{\partial^2(1 - \beta^2)}{\partial^2\eta^2(\text{ch}\eta - \beta)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} W_n^{(3)}(\eta) \cdot v_n(\beta), \quad W_n^{(3)} = \frac{\partial^2 W_n^{(1)}(\eta)}{\partial\eta^2},$$

и за баланса на тангенциалните напрежения върху междуфазовите граници имаме

$$\frac{\partial^2 U_n^{(1)}(\eta)}{\partial\eta^2} - \lambda_i \frac{\partial^2 U_n^{(i)}(\eta)}{\partial\eta^2} = -\frac{1}{2}(1 - \lambda_i) U_i c^2 W_n^{(3)}(\eta) + G W c^2 \frac{n(n+1)}{2(2n-1)} Q_{n-1} - \frac{n(n+1)}{2n+1} \text{ch}\eta \cdot Q_n + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+1)} Q_{n+1}$$

(тук няма $\beta!$) при $\eta = \eta_i$.

Това означава, че задачата може да се реши чрез разделяне на променливите и използване на вече решените хидродинамични задачи (напр. вж. Червениванова — канд. дисертация и публикациите, свързани с тази тематика), като се прибави допълнителният член от електричното поле в дясната страна. Задачата е линейна и скоростите на флуидните частици U_i се намират от баланса на силите, действащи върху междуфазовите граници, а функцията на тока се разглежда като сбор от вида

$$\Psi = U_1 \Psi^{U_1} + U_2 \Psi^{U_2} + \Psi^E,$$

където всяка функция на тока е породена от съответното поле на скоростите.

Така за коефициентите на функциите на така получаваме следната безкрайна система от уравнения:

1. При външни капки

$$A_n \text{ch} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_1 + B_n \text{sh} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_1 + C_n \text{ch} \left(n + \frac{3}{4} \right) \eta_1 + D_n \text{sh} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_1 = -\frac{1}{2} U_1 c^2 W_n^{(1)}(\eta_1)$$

$$A_n \text{ch} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_2 + B_n \text{sh} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_2 + C_n \text{ch} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_2 + D_n \text{sh} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_2 = -\frac{1}{2} U_2 c^2 W_n^{(1)}(\eta_2),$$

$$(2n-1) \left\{ A_n \left[(2n-1) \text{ch} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_1 + 2\lambda_1 (2n+1) \text{sh} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_1 \right] \right.$$

$$\begin{aligned}
& +B_n \left[(2n-1)\text{sh} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_1 + 2\lambda_1(2n+1)\text{ch} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_2 \right] \Big\} \\
& + (2n+3) \left\{ C_n \left[(2n+3)\text{ch} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_1 + 2\lambda_1(2n+1)\text{sh} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_1 \right] \right. \\
& \quad \left. + D_n \left[(2n+3)\text{sh} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_1 + 2\lambda_1(2n+1)\text{ch} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_1 \right] \right\} \\
& = U_1 c^2 \left[\frac{1}{2} \lambda_1 (2n-1)(2n+3) W_n^{(1)}(\eta_1) - 2(1-\lambda_1) W_n^{(3)}(\eta_1) \right] \\
& + 4c^2 G W^1 \left[\frac{n(n+1)}{2(2n-1)} Q_{n-1}^1(\eta_1) - \frac{n(n+1)}{2n+1} \text{ch} \eta_1 Q_n^2(\eta_1) + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+1)} Q_{n+1}^1(\eta_1) \right], \\
& (2n-1) \left\{ A_n \left[(2n-1)\text{ch} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_2 - 2\lambda_2(2n+1)\text{sh} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_2 \right] \right. \\
& \quad \left. + B_n \left[(2n-1)\text{sh} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_2 - 2\lambda_2(2n+1)\text{ch} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_2 \right] \right\} \\
& + (2n+3) \left\{ C_n \left[(2n+3)\text{ch} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_2 - 2\lambda_1(2n+1)\text{sh} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_2 \right] \right. \\
& \quad \left. + D_n \left[(2n+3)\text{sh} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_2 - 2\lambda_2(2n+1)\text{ch} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_2 \right] \right\} \\
& = U_2 c^2 \left[\frac{1}{2} \lambda_2 (2n-1)(2n+3) W_n^{(1)}(\eta_2) - 2(1-\lambda_2) W_n^{(3)}(\eta_2) \right] \\
& + 4c^2 G W^2 \left[\frac{n(n+1)}{2(2n+1)} Q_{n-1}^2(\eta_2) - \frac{n(n+1)}{2n+1} \text{ch} \eta_2 Q_n^{(2)}(\eta_2) + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+1)} Q_{n+1}^2(\eta_2) \right], \\
d_n^1 & = \left[\frac{1}{2} U_1 c^2 (2n-1) W_n^{(1)}(\eta_1) - A_n (2n-1) \text{sh} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_1 - B_n (2n-1) \text{ch} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_1 \right. \\
& \quad \left. - C_n (2n+3) \text{ch} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_1 - D_n (2n+3) \text{ch} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_1 \right] \frac{1}{4e^{-(n+3/2)\eta_1}}, \\
C_n^1 & = - \left[\frac{1}{2} U_1 c^2 W_n^{(1)}(\eta_1) + d_n^{(1)} e^{-(n+3/2)\eta_1} \right] \cdot e^{(n-1/2)\eta_1}, \\
d_n^2 & = \left[\frac{1}{2} U_2 c^2 (2n-1) W_n^{(1)}(\eta_2) + A_n (2n-1) \text{sh} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_2 + B_n (2n-1) \text{ch} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_2 \right. \\
& \quad \left. + C_n (2n+3) \text{sh} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_2 + D_n (2n+3) \text{ch} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_2 \right] \frac{e^{-(n+3/2)\eta_2}}{4},
\end{aligned}$$

$$C_n^2 = -e^{-(n-\frac{1}{2})\eta_2} \left[\frac{1}{2} U_2 c^2 W_n^{(1)}(\eta_2) + d_n^2 e^{(n+\frac{3}{2})\eta_2} \right]$$

2. При съставна капка

$$\begin{aligned} A_n \operatorname{ch} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_1 + B_n \operatorname{sh} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_1 + C_n \operatorname{ch} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_1 + D_n \operatorname{sh} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_1 \\ = -\frac{1}{2} U_1 c^2 W_n^{(1)}(\eta_1), \end{aligned}$$

$$C_n^1 = - \left[\frac{1}{2} U_1 c^2 W_n^{(1)}(\eta_1) + d_n^1 e^{-(n+3/2)\eta_1} \right] e^{(n-\frac{1}{2})\eta_1},$$

$$\begin{aligned} d_n^2 = \left[\frac{1}{2} U_2 c^2 (2n-1) W_n^{(1)}(\eta_2) + A_n (2n-1) \operatorname{sh} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_2 + B_n (2n-1) \operatorname{ch} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_2 \right. \\ \left. + C_n (2n+3) \operatorname{sh} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_2 + D_n (2n+3) \operatorname{ch} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_2 \right] \frac{e^{-(n+\frac{3}{2})\eta_2}}{4}, \end{aligned}$$

$$C_n^2 = -e^{-(n-\frac{1}{2})\eta_2} \left[\frac{1}{2} U_2 c^2 W_n(\eta_2) + d_n^2 e^{(n+\frac{3}{2})\eta_2} \right]$$

Освен неизвестните A_n , B_n , C_n и т. н. неизвестни в тази система са и скоростите U_1 и U_2 . Те се определят от баланса на силите, действащи върху капките.

Системите се решават на два етапа. Задачата е линейна, поради което можем да ги разглеждаме като сбор от движения и сили, пропорционални съответно на U_1 , U_2 и GW^1 (електрично поле), т. е. за коефициентите можем да запишем

$$A_n = U_1 A_n^{U_1} + U_2 A_n^{U_2} + A_n^E,$$

$$B_n = U_1 B_n^{U_1} + U_2 B_n^{U_2} + B_n^E,$$

$$C_n = U_1 C_n^{U_1} + U_2 C_n^{U_2} + C_n^E,$$

$$D_n = U_1 D_n^{U_1} + U_2 D_n^{U_2} + D_n^E,$$

$$\begin{aligned} A_n \operatorname{ch} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_2 + B_n \operatorname{sh} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_2 + C_n \operatorname{ch} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_2 + D_n \operatorname{sh} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_2 \\ = -\frac{1}{2} U_2 c^2 W_n^{(1)}(\eta_2), \end{aligned}$$

$$(2n-1) \left\{ A_n \left[(2n-1) \operatorname{ch} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_1 + 2\lambda_1 (2n+1) \operatorname{sh} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_1 \right] \right.$$

$$\begin{aligned}
& +B_n \left[(2n-1) \operatorname{sh} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_1 + 2\lambda_1(2n+1) \operatorname{ch} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_1 \right] \Big\} \\
& + (2n+3) \left\{ C_n \left[(2n+3) \operatorname{ch} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_1 + 2\lambda_1(2n+1) \operatorname{sh} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_1 \right] \right. \\
& \quad \left. + D_n \left[(2n+3) \operatorname{sh} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_1 + 2\lambda_1(2n+1) \operatorname{ch} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_1 \right] \right\} \\
& = U_1 c^2 \left[\frac{1}{2} \lambda_1 (2n-1)(2n+3) W_n^{(1)}(\eta_1) - 2(1-\lambda_1) W_n^{(3)}(\eta_1) \right] \\
& + 4c^2 G W^1 \left[\frac{n(n+1)}{2(2n-1)} Q_{n-1}^1(\eta_1) - \frac{n(n+1)}{2n+1} \operatorname{th} \eta_1 Q_n^1(\eta_1) + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+1)} Q_{n+1}^1(\eta_1) \right], \\
& (2n-1) \left\{ A_n \left[\lambda_2(2n-1) \operatorname{ch} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_2 + 2(2n+1) \operatorname{sh} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_2 \right] \right. \\
& \quad \left. + B_n \left[\lambda_2(2n-1) \operatorname{sh} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_2 + 2(2n+1) \operatorname{ch} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_2 \right] \right\} \\
& + (2n+3) \left\{ C_n \left[\lambda_2(2n+3) \operatorname{ch} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_2 + 2(2n+1) \operatorname{sh} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_2 \right] \right. \\
& \quad \left. + D_n \left[\lambda_2(2n+3) \operatorname{sh} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_2 + 2(2n+1) \operatorname{ch} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_2 \right] \right\} \\
& - U_2 c^2 \left[\frac{1}{2} (2n-1)(2n+3) W_n^{(1)}(\eta_2) - 2(1-\lambda_2) W_n^{(3)}(\eta_2) \right] \\
& - 4c^2 G W^2 \left[\frac{n(n+1)}{2(2n-1)} Q_{n-1}^2(\eta_2) - \frac{n(n+1)}{2n+1} \operatorname{ch} \eta_2 Q_n^2(\eta_2) + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+1)} Q_{n+1}^2(\eta_2) \right], \\
d_n^1 & = \frac{e^{\left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_1}}{4} \left[\frac{1}{2} U_1 c^2 (2n-1) W_n^{(1)}(\eta_1) - A_n (2n-1) \operatorname{sh} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_1 - B_n (2n-1) \operatorname{ch} \left(n - \frac{1}{2} \right) \eta_1 \right. \\
& \quad \left. - C_n (2n+3) \operatorname{sh} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_1 - D_n (2n+3) \operatorname{ch} \left(n + \frac{3}{2} \right) \eta_1 \right].
\end{aligned}$$

Допускаме, че задачата се решава, без да вземаме предвид гравитационното поле. Хидродинамичната сила върху капките в бисферични координати се дава от формулата

$$F_D = \frac{2\sqrt{2}\pi}{c} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(A_n \pm B_n + C_n \pm D_n),$$

където силата е обезразмерена с $a_1 \mu_3 U$, а U е характерната скорост. За случаите на две външни една на друга капки и на съставна капка имаме съответно:

1. Две външни капки

$$F_{DU_1}^1 = \frac{2\sqrt{2}\pi}{c} U_i \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(A_n^{U_i} + B_n^{U_i} + C_n^{U_i} + D_n^{U_i}) = U_i f_{DU_1}^1, \quad i = 1, 2;$$

$$F_{DU_i}^2 = \frac{2\sqrt{2}\pi}{c} U_i \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(A_n^{U_i} - B_n^{U_i} + C_n^{U_i} - D_n^{U_i}) = U_i f_{DU_i}^2,$$

$$F_D^{12} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{c} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^E \pm B_n^E + C_n^E \pm D_n^E).$$

От баланса

$$F_{DU_1}^{(1)} + F_{DU_2}^{(1)} + F_{DE}^{(1)} = 0, \quad \eta = \eta_1,$$

$$F_{DU_1}^{(2)} + F_{DU_2}^{(2)} + F_{DE}^{(2)} = 0, \quad \eta = \eta_2,$$

получаваме система за U_1 и U_2 , която решаваме и определяме U_1 и U_2 . След това определяме коефициентите на функциите на тока $A_n, B_n, C_n, D_n, C_n^1, d_n^1, C_n^2$ и d_n^2 .

2. Съставна капка

При съставна капка постъпваме по същия начин, но там силите се определят така:

а) вътрешна капка

$$F_D^1 = \frac{2\sqrt{2}\pi}{c} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(A_n + B_n + C_n + D_n), \quad \eta = \eta_1.$$

б) външна капка

$$F_D^2 = \frac{2\sqrt{2}\pi}{c} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) [2(d_n + C_n) - \lambda_2(A_n + B_n + C_n + D_n)], \quad \eta = \eta_2.$$

За тези сили се прилага описаният подход и се определят U_1 и U_2 . След това се определят A_n, B_n и т.н. за функциите на тока.

3. ДЕФОРМАЦИЯ НА МЕЖДУФАЗОВИТЕ ГРАНИЦИ

Деформацията на междуфазовите граници се определя от баланса на нормалните напрежения, където средната кривина при недеформирана сфера е

$$2\bar{H} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2}{c} \text{sh} \eta_i,$$

а при деформируема —

$$2\bar{H} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{c} \left\{ (\operatorname{ch}\eta_i - \beta)^3 \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1 - \beta^2}{(\operatorname{ch}\eta_i - \beta)^2} \frac{\partial H}{\partial \beta} \right] + 2H(\beta) \operatorname{ch}\eta + 2\operatorname{sh}\eta_i \right\},$$

$$T_{nn}^{(l)} - T_{nn}^{(i)} = \left(\chi \frac{\operatorname{ch}\eta - \beta}{c} \frac{\partial \Phi^{(l)}}{\partial \eta} + \sigma \right) 2H,$$

т. е. деформираната повърхнина се задава с уравнението

$$(13) \quad \pm \frac{\sigma}{c} \left\{ (\operatorname{ch}\eta_i - \beta)^3 \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1 - \beta^2}{(\operatorname{ch}\eta_i - \beta)^2} \frac{\partial H(\beta)}{\partial \beta} \right] + 2H(\beta) \operatorname{ch}\eta_i + 2\operatorname{sh}\eta_i \right\} \\ = T_{nn}^{(l)} - T_{nn}^{(i)} \mp \chi \frac{\operatorname{ch}\eta_i - \beta}{c} \frac{\partial \Phi^{(l)}}{\partial \eta} \frac{2\operatorname{sh}\eta_i}{c}$$

(„+“ при $\eta_i < 0$ и „-“ при $\eta_i > 0$).

Предполагаме, че деформациите са малки и функцията $\eta H(\beta)$, описваща формата на деформираната сфера, има вида

$$\eta^H(\eta) = \eta_0 + H(\beta),$$

където

$$\max_{\beta} |H(\beta)| < 1, \quad \eta_0 = \eta_i, \quad i = 1, 2.$$

Тук за $T_{\eta\eta}^{(l)}$ и $T_{\eta\eta}^{(i)}$ имаме

$$T_{\eta\eta}^{(l)} = -p^{(l)} - 2 \frac{\operatorname{ch}\eta - \beta}{c} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{(\operatorname{ch}\eta - \beta)^2}{c^2} \frac{\partial \Psi^{(l)}}{\partial \beta} \right] - \frac{\operatorname{ch}\eta - \beta}{c^2} \frac{\partial \Psi^{(l)}}{\partial \eta} \right\},$$

$$T_{\eta\eta}^{(i)} = -p^{(i)} - 2\lambda \frac{\operatorname{ch}\eta - \beta}{c} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{(\operatorname{ch}\eta - \beta)^2}{c^2} \frac{\partial \Psi^{(i)}}{\partial \beta} \right] - \frac{\operatorname{ch}\eta - \beta}{c^2} \frac{\partial \Psi^{(i)}}{\partial \eta} \right\},$$

където $p^{(l)}$ и $p^{(i)}$ са съответно външното и вътрешното налягане. Тъй като задачата се решава в стоксово приближение, налягането удовлетворява уравнението на Лаплас $\nabla^2 p = 0$. Тогава

$$\frac{\operatorname{ch}\eta - \beta}{c} \frac{\partial p^{(l)}}{\partial \eta} = WE(\operatorname{ch}\eta - \beta)^{3/2} \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(\eta) P_n(\beta) \\ = WE(\operatorname{ch}\eta - \beta)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{2n-1} Q_{n-1} - \operatorname{ch}\eta_i Q_n + \frac{n+1}{2n+3} Q_{n+1} \right) P_n(\beta).$$

Функцията $H(\beta)$, която се определя от уравнение (13), трябва да удовлетворява следните две интегрални условия:

$$(14) \quad \int_{-1}^1 \frac{H(\beta)}{(\operatorname{ch}\eta_1 - \beta)^3} d\beta = 0, \quad \int_{-1}^1 \frac{H(\beta) d\beta}{(\operatorname{ch}\eta_i - \beta)^4}, \quad \max_{\beta} H(\beta) < 1.$$

Те са условия за запазване на обема и на центъра на тежестта на капката.

Решението на (13) ще търсим във вида

$$(15) \quad H(\beta) = C_a \frac{1}{c^2} (\text{ch}\eta_i - \beta)^{3/2} \left[A \frac{1 - \beta \text{ch}\eta_i}{(\text{ch}\eta_i - \beta)^{3/2}} + \sum_{n=0}^{\infty} H_n P_n(\beta) \right].$$

Тук първото събираемо е решение на хомогенното уравнение, а второто (сумата)

$$C_a \frac{(\text{ch}\eta_i - \beta)^{3/2}}{c^2} \sum_{n=0}^{\infty} H_n P_n(\beta)$$

е частно решение на нехомогенното уравнение.

Константите A и π (от налягането) се определят от условията за запазване на обема и центъра на масата на капката.

Като заместим функцията (2) в уравнението за деформацията, получаваме

$$(16) \quad \begin{aligned} & \frac{c^2}{C_a} \left\{ (\text{ch}\eta_0 - \beta)^3 \frac{d}{d\beta} \left[\frac{(1 - \beta^2)}{(\text{ch}\eta_0 - \beta)^2} \frac{\partial H}{\partial \beta} \right] + H(\beta) \text{ch}\eta_0 \right\} \\ & = \sqrt{\text{ch}\eta_0 - \beta} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ -\frac{(n+2)(n+1)}{4} H_{n+2} + (n+1)^2 \text{ch}\eta_0 H_{n+1} \right. \\ & \quad \left. - \left[\frac{n^2 + (n+1)^2 + 9}{4} + (n-1)(n+2) \text{ch}^2 \eta_0 \right] H_n + n^2 \text{ch}\eta_0 H_{n-1} - \frac{n(n-1)}{4} H_{n-2} \right\}. \end{aligned}$$

Определяне на знака в нормалните напрежения

Налягането p в различните области има вида

$$p = \frac{\sqrt{\text{ch}\eta - \beta}}{c^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha_n \text{ch} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta + \beta_n \text{sh} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta \right] P_n(\beta) + \pi,$$

където π е произволна константа, а коефициентите α_n и β_n се определят така, че да са изпълнени уравненията на Стокс за функцията на тока:

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = -\frac{\text{ch}\eta - \beta}{c} \frac{\partial [E^2 \Psi]}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial P}{\partial \beta} = \frac{\text{ch}\eta - \beta}{c(1 - \beta^2)} \frac{\partial [E^2 \Psi]}{\partial \eta}.$$

Така за α_u и β_u получаваме

$$\begin{aligned} \alpha_u &= \sum_{m=1}^{n-1} \frac{2m+1}{m(m+1)} q_m + \frac{2n+1}{n} q_n + \alpha_0, \\ \beta_u &= \sum_{m=1}^{n-1} \frac{2m+1}{m(m+1)} r_m + \frac{2n+1}{n} r_n + \beta_0, \end{aligned}$$

където

$$r_n = -(2n-1)A_n + (2n+3)C_n + \frac{2n(2n+3)}{2n+1}A_{n+1} + \frac{2(n+1)(2n-1)}{2n-1}C_{n-1},$$

$$q_n = (2n-1)B_n + (2n+3)D_n - \frac{2n(2n+3)}{2n+1}B_{n+1} - \frac{2(n+1)(2n-1)}{2n+1}D_{n-1},$$

$$\alpha_0 = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{m(m+1)} q_m; \quad \beta_0 = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{m(m+1)} r_m.$$

Конкретните изрази за налягането в различните фази при различните задачи са:

а) При две капки

1. Във външната област

$$p^{(l)} = \frac{\sqrt{\text{ch}\eta - \beta}}{c^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha_n^{(l)} \text{ch} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta + \beta_n^{(l)} \text{sh} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta \right] P_n(\beta) + \pi^{(l)}.$$

2. Вътре в капките

$$P_1^{(i)} = \frac{\sqrt{\text{ch}\eta - \beta}}{c^3} \lambda_1 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(i_1)} e^{-(n+\frac{1}{2})\eta} P_n(\beta) + \pi_1^{(i_1)},$$

$$P_2^{(i)} = \frac{\sqrt{\text{ch}\eta - \beta}}{c^3} \lambda_2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(i_2)} e^{(n+\frac{1}{2})\eta} P_n(\beta) + \pi_2^{(i_2)};$$

б) При съставна капка

1) Между двете междуфазови граници

$$P_3 = \frac{\sqrt{\text{ch}\eta - \beta}}{c^3} \lambda_2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha_n^3 \text{ch} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta + \beta_n^3 \text{sh} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta \right] P_n(\beta) + \pi.$$

2) Вън от съставната капка

$$P_2 = \frac{\sqrt{\text{ch}\eta - \beta}}{c^3} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2 e^{(n+\frac{1}{2})\eta} P_n(\beta) + \pi_2.$$

3) В ядрото на съставната капка

$$P_1 = \frac{\sqrt{\text{ch}\eta - \beta}}{c^3} \lambda_1 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^1 e^{-(n+\frac{1}{2})\eta} P_n(\beta) + \pi_1$$

$$\lambda_1' = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\mu_1}{\mu_3} \frac{\mu_3}{\mu_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

За да намерим разликата $T_{\eta\eta}^{(l)} - T_{\eta\eta}^{(i)}$, заместваем функциите $\Psi^{(l)}$, $\Psi^{(i)}$, $p^{(l)}$ и $p^{(i)}$ в изразите за напреженията и получените изрази преобразуваме

така, че да се разделят променливите. Заместваме също $\frac{\partial \Phi^{(l)}}{\partial \eta}$ и от (16) за функцията $H(\beta)$ получаваме уравнението

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{C_a} c^2 \left\{ (\operatorname{ch} \eta_0 - \beta)^3 \frac{d}{d\beta} \left[\frac{1 - \beta^2}{(\operatorname{ch} \eta_0 - \beta)^2} \frac{\partial H}{\partial \beta} \right] + 2H(\beta) \operatorname{ch} \eta_0 \right\} \\
 = & \mp \sqrt{\operatorname{ch} \eta_0 - \beta} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\lambda \alpha_n^{(i)} e^{\pm(n+\frac{1}{2})\eta} - \alpha_n^{(l)} \operatorname{ch} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta - \beta_n^l \operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{2} \right) \eta \right] P_n(\beta) \right. \\
 (17) \quad & \left. + 2(1 - \lambda) \left[\sum_{n=1}^{\infty} (2n + 1) \left(\frac{1}{2} \operatorname{sh} \eta U_n^{(l)} + \operatorname{ch} \eta \frac{dU_n^{(l)}}{d\eta} \right) P_n(\beta) \right] \right. \\
 & \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \left[-\frac{2n-1}{2} \frac{dU_{n-1}^{(l)}}{\eta} \pm U c^2 \frac{n(n+1)}{2n-1} e^{\pm(n-\frac{3}{2})\eta} \right] P_n(\beta) \right. \\
 & \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{2n+3}{2} \frac{dU_{n+1}^{(l)}}{d\eta} \pm \frac{3}{4\sqrt{2}} U c^2 \left(e^{\pm(n+\frac{5}{2})\eta} \frac{(n+2)(n+1)}{2n+3} \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - \frac{2(2n+1)(n^2+n-1)}{(2n-1)(2n+3)} \right) e^{\pm(n+\frac{1}{2})\eta} \right] P_n(\beta) \right\}, \\
 WE \cdot \chi = & \left[k^{(l)} - k^{(i)} \frac{\varepsilon^{(l)}}{\varepsilon^{(i)}} \right] (\gamma + \varepsilon) \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} E_0, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon^{(i)}}{\varepsilon^{(l)}}.
 \end{aligned}$$

Като вземем предвид (16) и приравним коефициентите пред полиномите на Лъожандър, получаваме рекурентни връзки за неизвестните коефициенти $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ ($H_n = H_n^{(1)} + \pi H_n^{(2)}$).

Да означим с $F\Psi$ израза в дясната страна на (17), който зависи от известните функции Ψ и $\Phi^{(l)}$, а с $F\pi$ — израза, който съдържа неизвестната константа π . Тогава рекурентните връзки за $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ имат вида

$$\begin{aligned}
 n = 0: \quad & -\frac{1}{2} H_2 + \operatorname{ch} \eta_0 H_1 - \left(\frac{5}{2} - 2\operatorname{ch}^2 \eta_0 \right) H_0 = F\Psi_0 + F\pi_0, \\
 n = 1: \quad & -\frac{3}{2} H_3 + 4\operatorname{ch} \eta_0 H_2 - \frac{7}{2} H_1 + \operatorname{ch} \eta_0 H_0 = F\Psi_1 + F\pi_1, \\
 n \geq 2: \quad & -\frac{(n+2)(n+1)}{4} H_{n+2} + (n+1)^2 \operatorname{ch} \eta_0 H_{n+1} \\
 & - \left[\frac{n^2 + (n+1)^2 + 9}{4} + (n+1)(n+2) \operatorname{ch}^2 \eta_0 \right] H_n + n^2 \operatorname{ch} \eta_0 H_{n+1} - \frac{n(n-1)}{4} H_{n-2} \\
 & = F\Psi_n + F\pi_n.
 \end{aligned}$$

Тази система се решава по различни начини. Един от тях е петточкова прогонка.

Направената програма и съответните подпрограми на „Фортран“ се отнасят за две външни флуидни частици. Главната програма е направена така, че чрез нея да могат да се решават три типа задачи:

1) Чисто хидродинамичната задача — при зададени скорости върху частиците намираме деформациите.

2) Електричната задача, при която капките не се движат. Архимедовата сила уравновесява другите сили.

3) Движение и деформация на капките при наличие на електричен потенциал.

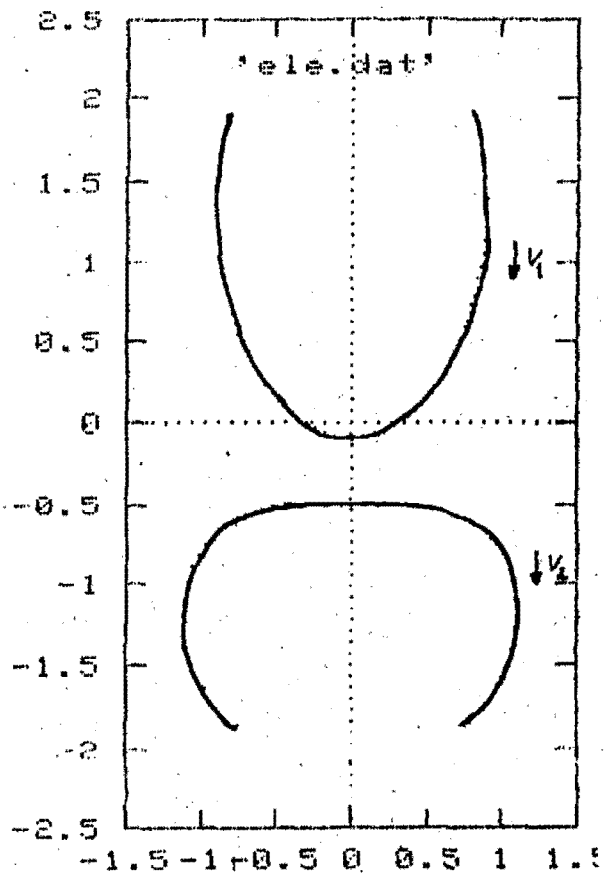
Програмата се състои от три блока. Първо се намира разпределението на електричното поле, след това — функцията на тока и скоростите, и накрая — налягането, напреженията и деформациите.

Числени резултати:

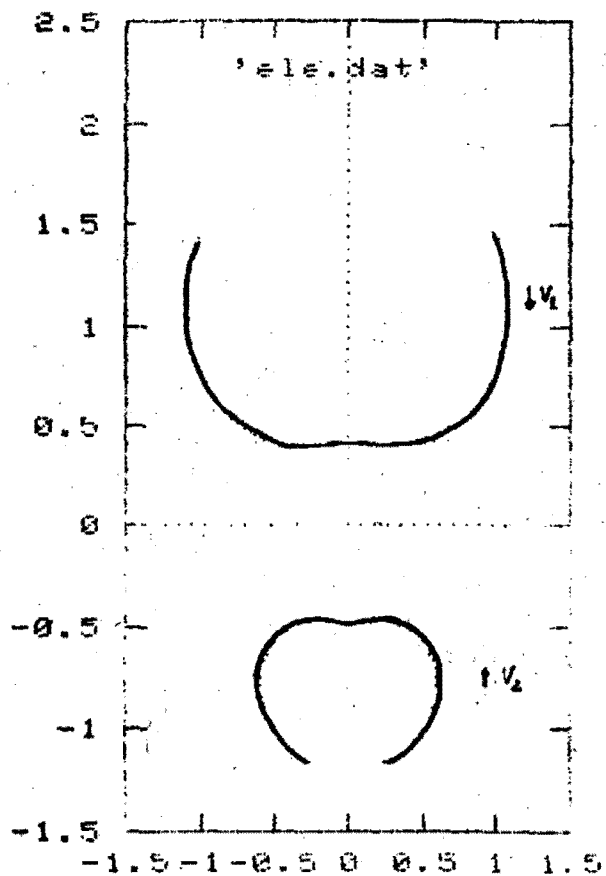
Най-напред ще отбележим, че скоростите, които получават капките вследствие на електричния потенциал, се дължат на флуида, който ги заобикаля. Външният флуид предизвиква хидродинамичната сила, а тя придава скоростите. Въпреки наличието на електрично поле, ако няма външен вискозен флуид, капките няма да се задвижват. Ето защо ще дадем някои резултати за деформацията на капките, като от електричната и хидродинамичната задача ще получим скоростите, с които трябва да се движат флуидните частици (в случая мехурите), а след това при тези скорости решаваме чисто хидродинамичната задача и намираме деформациите.

Получените резултати са дадени при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0,5$ и $(We)_1 = (We)_2 = 0,5$. Другите параметри са подбрани така, че да се види как съотношението между скоростите на двата мехура влияе на тяхното деформиране. На фиг. 1 и 4 мехурите се движат по посока на електричния потенциал. Когато мехурите са еднакви, техните скорости също са еднакви и водещата капка се сплесква и засмуква следващата я капка (фиг. 1). На фиг. 4 и двата мехура се засмукват, водещият по-голям мехур ($r_2 = 1,5$) се движи с по-голяма скорост и изоставането на следващия мехур го засмуква, като по този начин и двете флуидни частици получават удължена (продълговата) форма. Подобна форма се получава и когато двете флуидни частици се движат в противоположни посоки (фиг. 3), като се раздалечават. На фиг. 2 двата мехура се сплескват, защото се движат един срещу друг.

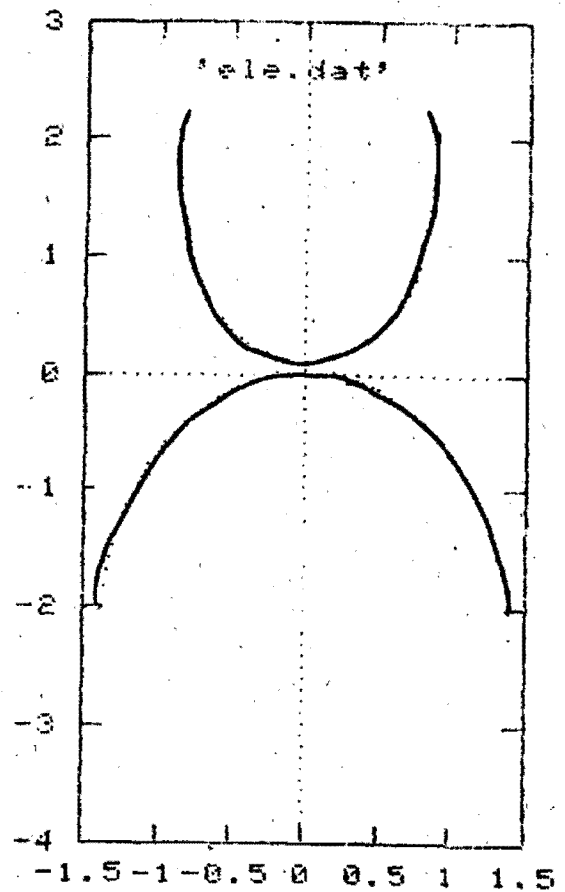
Това изследване е финансирано от фонд „Научни изследвания“ при МОНТ под номер ММ – 419/94 г.



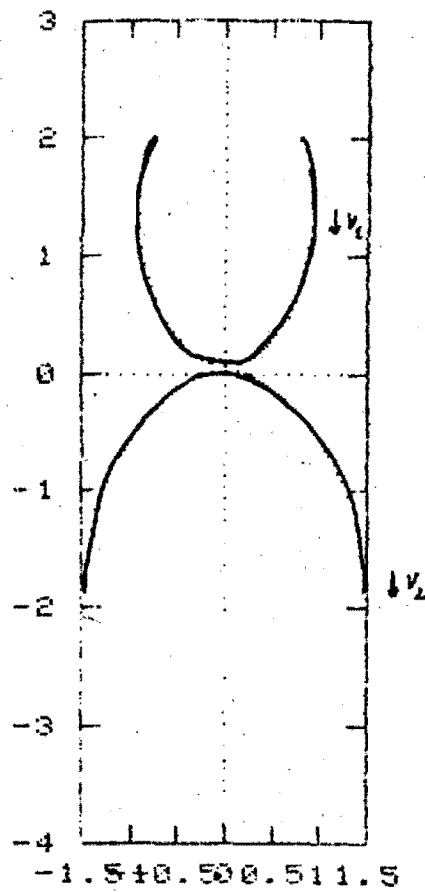
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

- Фиг. 1: $r_1 = 1, r_2 = 1, d = 0,5, v_1 = v_2 = -0,075, Ca_1 = Ca_2 = 16$.
 Фиг. 2: $r_1 = 1, r_2 = 0,5, d = 0,5, v_1 = 0,11, v_2 = 0,01, Ca_1 = 8,6, Ca_2 = 9,8$.
 Фиг. 3: $r_1 = 1, r_2 = 1,5, d = 1, v_1 = 0,006, v_2 = -0,063, Ca_1 = 16, Ca_2 = 17$.
 Фиг. 4: $r_1 = 1, r_2 = 1,5, d = 0,5, v_1 = -0,006, v_2 = -0,014, Ca_1 = 3, Ca_2 = 7$.

REFERENCES

1. Sozou, C. Electrohydrodynamics of a pair of liquid drops. — *J. Fluid Mech.*, vol 67, 1975, 239.
2. Oguz, H., S. Sadhal. Fluid dynamics and stability analysis of a compound droplet in an electric field. — *Q. Jl. Mech. Appl. Math.*, vol.42, 1989, 64.
3. Levich, V. Physicochemical Hydrodynamics. Prentice — Hall: Englewood Cliffs, N.Y., 1970.
4. Peed, L., F. Morrison. Hydrodynamic interactions in electrophoresis. — *J. Coll. Interface Sci.*, 84, 1979, 258.
5. Taylor, G. Studies in electrohydrodynamics. The circulation produced in a drop by an electric field. — *Proc. Royal Soc., A*, 291, 1966, 159.
6. Chervenivanova, E., Ph. D. Dissertation. Sofia University, 1985.
7. Chervenivanova, E., Z. Zapryanov. On the deformation of two droplets in a quasisteady Stokes flow. — *Int. J. Multiphase Flow*, 5, 1985, 721.
8. Chervenivanova, E., Z. Zapryanov. On the deformation of a fluid particle moving radially inside a spherical container. — *PhysicoChem. Hydrodyn.*, 8, 1987, 293.
9. Chervenivanova, E., Z. Zapryanov. The slow motion of droplets perpendicular to a deformable flat fluid interface. — *Q. Jl. Mech. Appl. Math.*, 8, 1988, 419.
10. Chervenivanova, E., Z. Zapryanov. On the deformation of compound multiphase drops at low Reynolds numbers. — *Physico-Chemical Hydrodynamics*, 11, 1989, 243.
11. Scriven, L., Dynamics of a fluid interface. Equation of motion for Newtonian surface fluids. — *Chem. Engng. Sci.*, 12, 1960, 98.

Received 6.04.1993