ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 1 — Математика
Том 87, 1993

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 1 — Mathématiques
Tome 87, 1993

ПРИВЕЖДАНЕ НА ДЕФИНИЦИОННИТЕ ОБЛАСТИ НА ОСНОВНИТЕ ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ КЪМ ПРОИЗВОЛНО МАЛКИ ИНТЕРВАЛИ

ДИМИТЪР ШИШКОВ

Димитър Шишков. ПРИВЕДЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ ОПРЕДЕЛЕНИЯ БАЗОВЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ К ПРОИЗВОЛЬНО МАЛЫМ ИНТЕРВАЛАМ

Рассматриваются алгоритмы приведения уже стесненных неограниченных областей определения базовых элементарных функций системы $\{e^x, \ln x, \operatorname{tg} x, \operatorname{arc\,tg} x, \sin x, \cos x, \arcsin x\}$ к достаточно малым интервалам.

Dimitar Shishkov. REDUCTION OF THE DOMAINS OF BASIC ELEMENTARY FUNCTIONS TO ARBITRARY SMALL INTERVALS

Algorithms for reduction of the initially constraint unlimited domains of basic elementary functions of the system $\{e^x, \ln x, \operatorname{tg} x, \operatorname{arc\,tg} x, \sin x, \cos x, \arcsin x\}$ to sufficiently small intervals are treated.

Важна част на (не)апаратното математическо осигуряване на всяка универсална компютърна система (КС), както и на електронните калкулатори (ЕК) с повишени възможности, е пакетът елементарни функции (ЕФ): показателни; логаритмични; степенни; тригонометрични, хиперболични и обратните им.

Програмирането на пакета се предшества от следните етапи:

Първи етап. Избор на ЕФ, които ще бъдат вградени в дадена КС или за които ще бъдат направени стандартни програми (СП). При апаратна реализация най-често се избира система от базови ЕФ (БЕФ), чрез която се пресмятат останалите. Една такава система е $[e^x$, $\ln x$, $\sin x$ и $\operatorname{tg} x]$ [1]. При неапаратна реализация практически всички програмирани ЕФ са БЕФ, т. е. никоя не се пресмята чрез друга.

Втори етап. Избор на алгоритми за самостоятелно пресмятане на БЕФ с дадена, обикновено голяма и еднаква (където е възможно) за всички относителна точност $\varepsilon_{\text{отн}}$ в достатъчно малки интервали.

Трети етап. Избор на алгоритми за първоначално стесняване на неограничените дефиниционни области (ДО) на БЕФ (от ЕФ само $\operatorname{arc}\left[\begin{smallmatrix}\sin x\\ \cos x\end{smallmatrix}\right]$ и $\operatorname{arth} x$ имат ограничени ДО). $\left[\begin{smallmatrix}x\\ y\\ z\end{smallmatrix}\right]$ означава x или y, или z.

Четвърти етап. Избор на алгоритми за допълнително привеждане на тези първоначално получени интервали към достатъчно малки, в които БЕФ ще се пресмятат съгласно резултатите от втория етап.

Тук се разглежда *само четвъртият етап* за ЕФ $f_j(x)$, $j = \overline{1, 7}$, от системата $[e^x$, $\ln x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$, $\sin x$, $\cos x$ и $\arcsin x]$, които ще наричаме основни (ОЕФ). При неапаратна реализация обикновено те са БЕФ, докато при апаратна — само част от тях. Резултатите от третия етап са взети от [1], където е разгледано пресмятането на ЕФ чрез верижни дроби. Алгоритмите от четвъртия етап в [1] са разработени на базата на резултатите оттук.

Предполага се, че стойностите на аргументите на ОЕФ и стойностите на последните съответно се задават и получават с полулогаритмичен запис и m-разрядна нормализирана мантиса, m — цяло, $m \geqq 2$, в p-ична бройна система, p — цяло, $p \geqq 2$. Също така времето за изпълнение на аритметичните инструкции (АИ) от тип умножение ($\times$, $:$, $\sqrt{\ }$) $t_\times$, $t_:$ и $t_{\sqrt{\ }}$ е значително по-голямо от това на тип събиране ($+$, $-$) t_+ и t_- например, както е при последователна аритметика.

Важността на четвъртия етап нарасна много с появата на КС с променливо m (например от серията МИР). Ще покажем, че при алгоритми от втория етап с еднаква степен на сложност, приблизително равносилна на пресмятане на ОЕФ с помощта на първите $n+1$ члена от степенното им развитие (n — фиксирано) и нарастваща с m точност $\varepsilon_{\text{отн}} < C'p^{-m}$ (която намалява като число с растенето на m), интервалът, в който трябва да се пресмятат ОЕФ, намалява. Избраните ОЕФ имат маклореново развитие (МЛР) $f_j(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} f_j^{(i)}(0)\dfrac{x^i}{i!}$ с изключение на $\ln x$, която не е дефинирана за $x = 0$, но има удобно от изчислителен аспект (ИА) тейлърово развитие около точката 1. Поради това само сега, за удобство вместо $\ln x$ ще смятаме за ОЕФ $\ln(1+x)$, която има МЛР. Нека означим с $S_{j,n}(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} f_j^{(i)}(0)\dfrac{x^i}{i!}$ парциалните суми от първите $n+1$ члена от МЛР на ОЕФ. За достатъчно голямо n $S_{j,n}(x) = f_j(x)$ с точност $\varepsilon_{\text{отн}}$. Лесно може да се покаже, че при $|x| < 1$ за всички $f_j(x)$ $\varepsilon_{\text{отн}} = \dfrac{|f_j(x) - s_{j,n}(x)|}{|f_j(x)|} < C''\dfrac{|x|^{l_1(n)}}{|f_j(x)|}$, където $l_1(n)$ е линейна функция на n, $C'' < 1$ (при $\arcsin x$ — за $n \geqq 4$) и $|f_j(x)| > \frac{1}{2}|x|$ с изключение на $e^x (e^x > e^{-1})$, т. е. $\varepsilon_{\text{отн}} < C'''|x|^{l_2(n)}$, $C''' < 1$ и $l_2(n) = \left[\begin{smallmatrix} n \\ n+1 \\ 2n+1 \\ 2n+2 \end{smallmatrix}\right]$. Тогава при фиксирани $\varepsilon_{\text{отн}}$ и n, и растящо m от $\varepsilon_{\text{отн}} < C'''|x|^{l_2(n)} < C'p^{-m}$ се получава, че $|x|$ трябва да намалява.

Също така придобиват важност алгоритми за стесняване на интервали като например централна хомотетия от вида $\frac{x}{n}$, n — цяло, които имат по-малко бързодействие (заедно с пресмятането на ОЕФ) от други, но с това неоценимо при променливо m свойство да не изискват съхраняването на константи, чийто брой и дължина на мантисата зависят от m. При променливо, но ограничено m трябва да се пазят константите за $m_{\max}$, които са максимално на брой и с максимална дължина на мантисата $m_{\max}$, а това води до голяма загуба на оперативна или пасивна памет в сравнение с „обикновените" стойности $m \ll m_{\max}$. При голямо $m_{\max}$ константите за разумно избрано $m_1 < m_{\max}$ с дължина на мантисата m_1 трябва да се пазят в паметта, докато тези — повече на брой, с разрядност $m_{\max}$ — във външната памет. При неограничено m проблемът е алгоритмично нерешим, ако без да се съхраняват съответните константи, те не се получават по някакъв прост начин, например рекурентно, по време на всяко пресмятане на ОЕФ. Тези разсъждения имат смисъл, понеже са известни редица задачи — например от физика на плазмата, които се решават само чрез обработка на числа с дължина на мантисата десетки десетични разряди (с такива задачи са били тествани аритметиката и пресмятането на ЕФ с произволно m на КС от серията МИР).

Ще въведем някои понятия, които ще използваме по-нататък.

„Къси" числа ще наричаме тези с $\approx \frac{m}{5}$ или по-малко p-цифри, което изисква по-малко памет за съхраняването им. Освен това, като множители, с тях се извършва „късо" микропрограмно умножение в сравнение с обикновеното, средното време на което зависи от средновероятната сума $\frac{p}{2} + (m-1)\frac{p-1}{2} = 0{,}5(m(p-1)+1)$ на цифрите на нормализираната мантиса на множителя. Късите числа и късите микропрограмни аритметични операции имат важно значение при десетичната аритметика, особено когато тя се изпълнява чрез интерпретация.

Ще дефинираме индуктивно s-ти базов интервал (БИ) $B_{j,s} = [I'_{j,s}; I''_{j,s}]$ на ОЕФ $f_j(x)$ с ДО D_j^∞, ако е неограничена, и D_j, ако е ограничена. $B_{j,0} = D_j^\infty$, $B_{j,1} = D_j$. Тогава $B_{j,s+1} \subset B_{j,s}$ съответно за $s > 0$ и $s > 1$, като включването е строго. Ограничения интервал $B_{j,1}$, в който се трансформира D_j^∞ (по-точно $D_j^\infty \setminus B_{j,1}$) чрез специална за всяка ОЕФ (с D_j^∞) първа субституция, ще наричаме основен БИ (ОБИ) на функцията. Привеждането на D_j^∞ на ОЕФ в $B_{j,1}$ е разгледано в [1].

В някои случаи (вж. Т-метод) D_j ще се привежда в $B_{j,s}$ чрез s последователни смени на променливата на ЕФ, като в $B_{j,s}$ се привежда само $B_{j,s-1} \setminus B_{i,s}$, $s \geqq 1$. Стойността на s, съответна на последния (крайния) БИ(КБИ), в който $f_j(x)$ ще се пресмята по някакъв алгоритъм с дадена точност, ще бележим с f_j или само f при конкретна ЕФ. При фиксирано $B_{j,f}$ f зависи от закона, по който се определят $B_{j,s}$. Ще изследваме само случаите, когато $B_{j,1} \neq B_{j,f}$, т. е. $f \geqq 2$. С $\mathrm{tr}_j^{\max}$ ще бележим максималния брой последователни трансформации, чрез които D_j^∞ се привежда в $B_{j,f}$. Броят $\mathrm{tr}_j^{\max}$ е f или понякога $f-1$ за $f \geqq 4$. Очевидно $\mathrm{tr}_j^{\max}$ при D_j (например при $\arcsin x$) е най-много $f-1$.

В други случаи (вж. С-метод) $B_{j,s} \setminus B_{j,s+1}$, $s = \overline{s_1, s_2}$, $1 \leqq s_1 < s_2 \leqq f-1$, $f \geqq 3$, се привеждат само с една, различна за всяко s трансформация, направо в B_{j,s_2+1}. Ако $s_1 = 1$, $s_2 = f-1$ и $f > 2$, то $\mathrm{tr}_j^{\max} = 2 < f$ при D_j^∞.

БИ $B_{j,s}$, $2 \leqq s \leqq f-1$, $f \geqq 3$, ще наричаме междинни (МБИ). С x_s ще бележим $x_s \in B_{j,s} \setminus B_{j,s+n}$, $s = \overline{0, f-1}$, $x_f \in B_{j,f}$, а $x_{s\setminus f} \in B_{j,s} \setminus B_{j,f}$.

Когато $f_j(x)$ е фиксирана, навсякъде индекса j ще заместваме с идентификатора на ЕФ, например $B_{\exp,1}$ е ОБИ на e^x, $B_{\ln,f}$ е КБИ на $\ln x$, а $B_{\mathrm{tg},s}$, $2 \leqq s \leqq f-1$, е МБИ на $\operatorname{tg} x$.

Нека разгледаме системата $[B_{j,s}]_{s=1}^f$, $f \geqq 2$, от вложените БИ $B_{j,s}$ (при $f=2$ не съществуват МБИ — $B_{j,1}$ е ОБИ, а $B_{j,2} = B_{j,f}$ е КБИ) на $f_j(x)$, $B_{j,s+1} \subset B_{j,s}$, $s = \overline{1, f-1}$. За краткост ще бележим $I_s = I_{j,s} = I''_{j,s}$, $I_s > I_{s+1}$, и ако $B_{j,s}$ са симетрични относно началото, то $I'_{j,s} = -I''_{j,s} = -I_s$. Само при $\ln x$ $I_s = I_{j,s} = I'_{\ln,s}$, $I''_{\ln,s} = I''_{\ln,f}$, $I_s < I_{s+1}$. $I_{j,1}$ (с изключение на $I_{\ln,1}$) не зависи от p и m, а само от ОЕФ чрез специалната първа субституция. $I_{j,f}$ зависи от m чрез $\varepsilon_{\text{отн}}$. МБИ се определят изобщо по еднообразен начин в зависимост от вида на избран$\left[\begin{smallmatrix}\text{ата}\\ \text{ите}\end{smallmatrix}\right]$ субституци$\left[\begin{smallmatrix}\text{я}\\ \text{и}\end{smallmatrix}\right]$ и $I_{j,f}$.

$[B_{j,s}]_{s=1}^f$ поражда върху положителната полуос системата от непресичащи се интервали (сегменти) $I^j = [I_s^j]_{s=1}^{f-1}$, $I_s^j = (I_{s+1}, I_s]$, като само $I_s^{\ln} = [I_s, I_{s+1})$. Тогава за всяко $x_{1\setminus f}$ може да се намери точно един индекс s, $1 \leqq s \leqq f-1$, такъв че $x_1 = x_s$, $|x_1| = |x_s| \in I_s^j$.

За трансформирането на ОБИ в КБИ на ОЕФ ще бъдат използвани различни трансформации:

— линейна:

— нехомогенна с ъглов коефициент 1 (транслация) при e^x, $\operatorname{tg} x$;

— хомогенна с нулев отрез (централна хомотетия, накратко хомотетия) и ъглов коефициент $k = \dfrac{1}{n} < 1$, n — цяло, при e^x, $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$, и k — дробно — при $\ln x$;

— дробно-линейна от вида $f_a(x) = \dfrac{ax-1}{x+a}$, $\left[\begin{smallmatrix}a\\x\end{smallmatrix}\right] > 0$, при $\operatorname{arc\,tg} x$;

— от вида $f(x) = 0{,}5(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})$, $|x| \leqq 1$, при $\arcsin x$.

С изключение на хомотетия с $k = \dfrac{1}{n}$ това е възможно поради наличието на удобни от ИА псевдосъбирателни формули за съответните ЕФ:

$$e^x = e^{(x-C)+C} = e^C e^{x-C}; \quad \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg}(x-C)+\operatorname{tg} C}{1-\operatorname{tg}(x-C)\operatorname{tg} C};$$

$$\ln x = \ln Cx - \ln C; \quad \operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{C} + \operatorname{arc\,tg} \frac{Cx-1}{x+C};$$

$$\arcsin x + \arcsin x = \arcsin 2x\sqrt{1-x^2} \quad \text{или, по-точно,}$$
$$\arcsin x = 2\arcsin 0{,}5(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}).$$

При хомотетия с $k = \dfrac{1}{n}$ съответните ОЕФ се изразяват рационално чрез $f_j\left(\dfrac{x}{n}\right)$: $\left[\begin{smallmatrix}\sin x\\ \cos x\end{smallmatrix}\right]$ — чрез полиноми на $\left[\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\right]\dfrac{x}{n}$, $\operatorname{tg} x$ — чрез дробно–линейна функция на $\operatorname{tg}\dfrac{x}{n}$, а $e^x = \left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n$.

Ще използваме три метода за определяне на БИ $B_{j,s}$, $s = \overline{2, f-1}$, $f \geqq 3$.

При първия **С-метод** $B_{j,s} \setminus B_{j,s+1}$, $s = \overline{1, f-1}$, се трансформират чрез една, различна за всяко s, но еднотипна трансформация в $B_{j,f}$. Ще казваме, че С-методът е приложен за $B_{j,1}$ и $B_{j,f}$, като $B_{j,1} \setminus B_{j,f}$ е <u>С</u>егментиран чрез системата I^j, $\operatorname{tr}_j^{\max} = 2$.

Ако се използва транслация ($e^x, \operatorname{tg} x$), дължината $d_{j,s}$ на I_s^j, $s = \overline{1, f-1}$, е изобщо $2I_{j,f} = d_{j,f}$. Ако $\dfrac{|I_{j,1} - I_{j,f}|}{d_{j,f}}$ не е цяло, то или $d_{j,1} < d_{j,f}$, или $d_{j,f-1} < d_{j,f}$, като дали I_1^j или I_{f-1}^j е с $d < d_{j,f}$, е без значение от ИА.

Ако се използва хомотетия и $f = 2$, то $B_{j,1} \setminus B_{j,f}$ се привежда в $B_{j,f}$ чрез субституцията $x_f = \dfrac{x_1}{n}$, $n \geqq \dfrac{I_{j,1}}{I_{j,f}} = q_{j,1}$, n — цяло (e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$) и $x_f = q_2 x_1$, $q_{\ln,2} = \dfrac{I'_{\ln,f}}{I'_{\ln,1}} = q_2$ при $\ln x$ ($f = 2$, ако $I'_{\ln,2} = \sqrt{I'_{\ln,1} I''_{\ln,2}}$).

При хомотетия и $f > 2$ $I_{j,s}$ се определят при $s = \overline{f-1, 1}$, за да може при дробно q_2 по-малък сегмент (I_1^j) да се трансформира с най-лошата от ИА субституция $x_f = \dfrac{x_1}{n_{\max}}$. Една възможна (но не оптимална) система е тази с $I_{j,s} = (f-s+1)I_{j,f}$, $s = \overline{f-1, 2}$, $f =]q_1[+1$. $]x[$ е таван за x — най-малкото цяло число (НМЦЧ), по-голямо или равно на x. $]x[= [x]$ за x — цяло, и $]x[= [x]+1$ за x — дробно. Тогава $B_{j,s} \setminus B_{j,s+1}$, $s = \overline{1, f-1}$, се трансформират в $B_{j,f}$ чрез $x_f = \dfrac{x_s}{f-s+1}$.

В някои случаи С–методът има следния недостатък. При растене на m и/или увеличаване $\varepsilon_{\text{отн}}$ $d_{j,f}$ намаляват, f_j нарастват, а с това и броят на МБИ и на сегментите I_s^j. При транслация (или $\ln x$) това води до нарастване на максималния брой на проверките (по една проверка) за установяване индекса на $x \in B_{j,1}$, т. е. принадлежността на x към някой от сегментите I^j_s, както и до увеличаване на броя на константите за съхранение (по три константи на сегмент) — $I_{j,s}$, $d_{j,s} = I_{j,s} - I_{j,f}$ и $f_j(d_{j,s}), s = \overline{1, f-1}$.

При втория **Т–метод** $B_{j,s} \setminus B_{j,s+1}$ се трансформират в $B_{j,s+1}$, $s = \overline{0, f-1}$, т. е. $B_{j,0}$ (или $B_{j,1}$) се свива Телескопически в $B_{j,f}$ чрез $\mathrm{tr}^{\max}_j = f$ трансформации. Тук е съществено определянето на $I_{j,s}$ именно при $s = \overline{f-1, 1}$, понеже при $f \geqq 4$ в някои случаи (зависи от $I_{j,s}$ и $I_{j,f}$) $B_{j,1} \setminus B_{j,2}$ може да се трансформира направо в $B_{j,s}$, $s \geqq 3$ (а не в $B_{j,2}$), при което $\mathrm{tr}^{\max}_j = f-1$.

Ако се използва транслация и $f > 2$, $I_{j,s} = 3^{f-s} I_{j,f}$, $s = \overline{f-1, 2}$, f се определя като НМЦЧ, за което $I_{j,s} \leqq 3^{f-1} I_{j,f}$, $f = \left] \dfrac{\ln q_1}{\ln 3} \right[+ 1$. $B_{j,1} \setminus B_{j,2}$ се трансформира вB_{j,s_1}, s_1 се определя като НМЦЧ, удовлетворяващо $I_{j,1} - I_{j,2} \leqq 2.3^{f-s} I_{j,f}$, $s_1 = \left] \ln \left(\dfrac{I_{j,1} - I_{j,2}}{2 I_{j,f}} \right) / \ln 3 \right[+ 1$. Ако при $f \geqq 4$ $s_1 \geqq 3$, то $B_{j,1} \setminus B_{j,2}$ се трансформира поне в $B_{j,3}$ и $\mathrm{tr}^{\max}_j = f-1$. Ако $s_1 = 2$, то $\mathrm{tr}^{\max}_j = f$.

Когато при голямо f не е изгодно да се приложи направо С-методът, може да се използва трети **К-метод**, Комбинация на първите два. При него С-методът се прилага не за $B_{j,1}$ и $B_{j,f}$, а за $B_{j,1}$ и някой МБИ (сега стъпката на сегментиране не е $d_{j,f}$, а дължината на МБИ), след това отново по отношение на този МБИ и друг, вложен в него, и т. н. Тогава при D^∞_j $\mathrm{tr}^{\max}_j$ е равен на броя на тези МБИ, увеличен с две.

Тук се разглежда привеждането на $B_{j,1}$ в $B_{j,f}$ (при $\operatorname{arctg} x$ — на D^∞_j в $B_{j,f}$). Привеждането на D^∞_j в $B_{j,1}$ е разгледано в [1].

1. $y = e^{x_1}$, $x_1 \in B_{\exp,1} = \left[-\dfrac{\ln p}{2}, \dfrac{\ln p}{2} \right]$.

1.1. Ако приложим С-метода с транслация, $f = \left] \dfrac{I_1 - I_f}{2 I_f} \right[+ 1$ и за системата сегменти $I^{\exp}$ при $f \geqq 3$ се получава $d_s = d = I_s - I_{s+1} = 2I_f$, $I_s = I_1 - (s-1)d$, $s = \overline{2, f-1}$ и $I_1 - I_2 \leqq d$. Ако $f = 2$, то $I^{\exp} = I^{\exp}_1$ (тогава $I_1 \leqq 3I_f = 3I_2$). Нека определим константите $c_s > 1$ от $\ln c_s = I_s - I_f = I_1 - (2s-1)I_f > 0$, $s = \overline{1, f-1}$. За всяко x_1 $\exists s$ — единствено, $s = f - \left] \dfrac{x_1 - I_f}{2 I_f} \right[$, $1 \leqq s \leqq f$, така че $x_1 = x_s$, т. е. $x_1 = x_s = \operatorname{sgn} x_1 (I_s - 2t I_f)$, $0 \leqq t < 1$. Ако за $x_1 \notin B_{\exp,f}$ извършим субституцията $x_f = x_1 - \operatorname{sgn} x_1 \ln c_s$, $x_f = \operatorname{sgn} x_1 (I_s - 2t I_f) - \operatorname{sgn} x_1 (I_s - I_f) = \operatorname{sgn} x_1 (I_f - 2t I_f)$, т. е. наистина $x_f \in B_{\exp,f}$, $\mathrm{tr}^{\max} = 2$, $e^{x_1} = e^{x_f + \operatorname{sgn} x_1 \ln c_s}$ и $e^{x_1} = c_s^{\operatorname{sgn} x_1} e^{x_f}$ (общо със субституцията 1+, 1× късо).

Желателно е c_s и c_s^{-1} да са къси за даденото p. Затова практически се избира късо $c^*_s \gtrapprox c_s$, а $I^{\exp}_s$ съответно се намалява, като I_{s+1} се заменя с

$I_{s+1}^* \gtreqqless I_{s+1}$. Когато e^{x_f} се пресмята чрез дроб, достатъчно е само едното от c_s и c_s^{-1} да е късо, за да има винаги късо умножение. Това следва от

$$e^{x_f} = \frac{A}{B}, \quad e^{x_1} = c_s^{\operatorname{sgn} x_1} e^{x_f} = \left[\begin{array}{ll} (c_s A)/B = A(c_s^{-1}B), & x_1 > I_f > 0, \\ A/(c_s B) = (c_s^{-1}A)/B, & x_1 < -I_f < 0. \end{array} \right.$$

Пример. За $p = m = 10$ $f = 2$, $I_f = I_2 = 0{,}46$, $\ln c_1 = I_1 - I_2 = \dfrac{\ln 10}{2}$ $-0{,}46 \approx 0{,}691$. Избираме $c_1^* = 2 > e^{0{,}691}$, $\ln c_1^* = \ln 2 \approx 0{,}693$, $c_1^{*-1} = 0{,}5$.

$f-1$ зависи от $\left(\dfrac{\ln p}{2} - I_f\right)/2I_f$. Понеже I_f не зависи от p, $f-1$ расте с p, а при фиксирано p — с m, понеже тогава I_f и стъпката на сегментирането d намаляват.

1.2. Прилагането на Т-метода с транслация не се различава от описаното във въведението, съчетано с резултатите от т. 1.1. Сега $\ln c_s = I_s - I_{s+1} = d_{s+1} = 2.3^{f-s-1} I_f$.

1.3. Ако f е много голямо, може да се използва К-методът с транслация, като С-методът се приложи за $B_{\exp,1}$ и един МБИ, например $B_{\exp,f-1} = [-3I_f, 3I_f]$. Сега сегментите на $B_{\exp,1} \setminus B_{\exp,f-1}$ ще имат дължина $6I_f$, а $B_{\exp,f-1} \setminus B_{\exp,f}$ се трансформира в $B_{\exp,f}$ чрез една транслация. $\mathrm{tr}^{\max} = 3$. При много малко I_f К-методът се прилага за няколко МБИ.

1.4. Прилагането на С-метода с хомотетия при $f = 2$ е съгласно въведението. Извършва се субституцията $x_f = x_2 = kx_1$, $k = \dfrac{1}{n}$, $n \geqq$ НМЦЧ, за което $\left|\dfrac{x_1}{n}\right| \leqq I_f$, $n \geqq n_{\min} =]q_1[= \left]\dfrac{\ln p}{2I_f}\right[$, $e^{x_1} = (e^{x_2})^n$.

Този алгоритъм изисква съхраняването само на $\dfrac{1}{n}$. Недостатък на метода е намаляването на бързодействието в сравнение с основния метод с транслация — изисква се $\times\dfrac{1}{n}$, което не винаги е късо, и повдигане на степен n. Съществува оптимален алгоритъм за пресмятане на x^n като псевдоадитивна функция (ПАФ) [2]. Една функция е ПАФ спрямо целочисления си първи аргумент, ако $f(n_1+n_2, x) = g(f(n_1,x), f(n_2,x))$. Оптималният алгоритъм за пресмятане на $f(n,x)$ чрез $f(1,x)$ се базира на тази зависимост и двоичното представяне на n. Функциите $x^n : x^{n_1+n_2} = x^{n_1}x^{n_2}$, $e^{nx} : e^{nx} = (e^x)^n$ и $\operatorname{tg} nx$ са ПАФ спрямо n. При ПАФ най-изгоден е случаят $n = 2^r$, $2^{r-1} < n_{\min} \leqq 2^r$, при който x^n се пресмята за $r_\times$ и $1 \times \dfrac{1}{n}$, което може да е късо. Случаят $n = n_{\min}$, $2^{r-1} < n < 2^r$, е по-неизгоден, понеже се изискват не по-малко от $r_\times$ и $1 \times \dfrac{1}{n}$.

Пресмятането на e^x чрез $\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n$ е най-благоприятно при $\left(\dfrac{\ln p}{2}\right)_{\min}$ за $p = 2$ и $n = 2$. Тогава $\dfrac{\ln p}{4} = 0{,}25 \ln 2 \approx 0{,}173$ ($n = 2$, ако $0{,}173 \leqq I_f$). За пресмятането на e^x се изисква $1\times$ и намаляване с 1 на порядъка на x (: 2).

Сравнение. При $p = m = 10$ С-методът с транслация изисква $2+$ (1— — за проверката $|x_1| \in B_{\exp,f}$, и $1+$ с $\ln c_s^{\pm 1}$) и $1\times$ късо с $c_s^{\pm 1}$, докато при С-метода с хомотетия и $f = 2\dfrac{\ln p}{2} \approx 1{,}15$, $I_f = 0{,}46$ и $n \geqq 3$. За $n = 3$ са необходими $3\times$, а за $n = 4$ — $2\times$ и $1\times$ късо.

1.5. При прилагане на С-метода с хомотетия при $f = 2$ $I_s = 2^{f-s} I_f$, $s = \overline{f-1, 2}$, f се определя като НМЦЧ, за което $I_1 \leqq 2^{f-1} I_f$, $f = \left]\dfrac{\ln g_1}{\ln 2}\right[+ 1$. За всяко $x_{1\setminus f} = x_s$ се прилага субституцията $x_f = \dfrac{x_s}{2^{f-s}}$, $1 \leqq s \leqq f-1$, но първоначално в цикъл трябва да се намери съответното s — извършват се проверките $x_1 \leqq I_s^* \approx I_s$, I_s^* са къси, $2 \leqq s \leqq f$, като се почне от $s = f$. Броят на проверките с изваждане, увеличен с 1, дава $f - s$: (: 2^{f-s} е особено изгодно при $p = 2$). Тогава са необходими $(f - s)\times$ за получаването на $e^{x_{1\setminus f}}$ чрез e^{x_f}. За да не се пазят I_s^* за проверките, може да се използва следният рекурентен алгоритъм: $X_r \leqq I_f$, $X_{r+1} = 0{,}5 X_r$ ($\times 0{,}5$ са къси, особено при $p = 2$), $r \geqq 0$, $X_0 = x_{1\setminus f}$. При първото r_1, което удовлетворява неравенството, процесът се прекратява, $X_{r_1} = x_f = \dfrac{x_{1\setminus f}}{2^{r_1}}$ и $e^{x_1} = (e^{x_f})^{2^{r_1}}$ за $(r_1)\times$.

1.6. При променливо m транслацията е практически невъзможна, понеже $\ln c_s$, а оттам и c_s зависят от I_f, което намалява с растенето на m. Следователно за групи от последователни стойности на m, за които I_f е едно и също, трябва предварително да бъдат изчислени и запазени по три масива от числата $\ln c_s$, c_s и I_s с дължина съответното максимално m за групата, което е недопустимо.

Хомотетията е особено удобна, но с по-малко бързодействие поради $r\times$ при повдигането на степен $n = 2^r$.

2. $\boldsymbol{y = \ln x_1}$, $x_1 \in B_{\ln,1} = \left[\dfrac{1}{p}, I''_{\ln,f}\right]$.

От МЛР на $\ln(1 + x)$ се вижда, че $\ln(1 \pm x) \approx \pm x \approx \ln(1 \mp x)$, т. е. за малки $|x|$ $\ln(1+x)$ е почти нечетна, следователно за стойности на x, близки и симетрични около 1, сложността на алгоритъма за пресмятане на $\ln x$ е почти еднаква. Поради това $B_{\ln,f}$ могат да се избират приблизително симетрично около 1 с отказ от традиционното $I''_f = 1$. При това, понеже $\ln x$ е по-стръмна за $x < 1$, ако $\ln(1 - x)$ и $\ln(1 + x)$ се пресмятат чрез някакъв алгоритъм, точността, с която се получава $\ln(1 + x)$, не е по-малка от тази на $\ln(1 - x)$.

Да припомним, че $I_s = I'_s$, $I_s < I_{s+1}$, $I''_s = I''_f$, $s = \overline{1, f-1}$, $q_2 = \dfrac{I_f}{I_1}$. При $\ln x$ транслация не може да се приложи, понеже не е псевдосъбстрактна функция (ПСФ). ПСФ $f(x)$ е тази, за която $f(x_1 - x_2) = g(f(x_1), f(x_2))$.

2.1. Ако приложим С-метода с хомотетия, системата $I^{\ln}$ се определя заедно с константите l_s от: $I_s l_s = I_f$, $s = \overline{1, f-1}$, $f \geqq 2$, и $I_{s+1} l_s = I''_f$, $s = \overline{1, f-2}$, $f \geqq 3$.

Ако означим $q_3 = \dfrac{I''_f}{I_f}$, тогава $l_s = \dfrac{I''_f}{I_{s+1}}$ и $I_{s+1} = q_3 I_s$, откъдето индуктивно се намира $I_{s+1} = q_3^s I_1$, $s = \overline{1, f-2}$, $f \geqq 3$, и $l_s = q_2/q_3^{s-1}$, $s = \overline{1, f-1}$, $f \geqq 2$, или (за рекурентно пресмятане) $l_{s+1} = \dfrac{l_s}{q_3}$, $l_1 = q_2$ и $I_{s+1} = q_3 I_s$, $s = \overline{1, f-2}$, $f \geqq 3$. f е НМЦЧ, за което $I_f \leqq q_3^{f-1} I_1$, $f =]q_4[+1$, $q_4 = \dfrac{\ln q_2}{\ln q_3}$.

За всяко x_1 $\exists s$ — единствено, $s = \left]\dfrac{\ln(x_1/I_1)}{\ln q_3}\right[+ 1$, $1 \leqq s \leqq f$, така че $x_1 = x_s$, т. е. $x_1 = x_s = tI_s$, $1 \leqq t < \dfrac{I_{s+1}}{I_s} = q_3$. Ако за x_s, $s < f$, извършим субституцията $x_f = l_s x_s$, $x_f = l_s(tI_s) = t(l_s I_s) = tI_f$, т. е. наистина $x_f \in B_{\ln, f}$. $\mathrm{tr}^{\max} = 2$. $\ln x_f = \ln l_s x_1$ и $\ln x_1 = \ln x_f - \ln l_s$ (общо 1+, 1× късо).

На пръв поглед дори е вредно стойности x_1, далечни от 1, да се трансформират в близки до него, поради загуба на точност от изваждане ($\ln x = \ln(1 + (x-1))$ се пресмята от МЛР на $\ln(1+x)$ чрез $x - 1$). Но това е илюзия.

Пример. За $x_1 = \dfrac{1}{2} + \varepsilon$, $\varepsilon = p^{-m}$, $\ln x_1 \approx \ln \dfrac{1}{2} + \varepsilon' = -\ln 2 + \varepsilon'$, $\varepsilon' \approx \varepsilon$, а

$$\ln x_1 = \ln \frac{2x_1}{2} = \ln 2\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) - \ln 2 = -\ln 2 + \ln(1 + 2\varepsilon) \approx -\ln 2 + 2\varepsilon,\ 2\varepsilon \approx \varepsilon',$$

т. е. дали $\ln x$ ще се пресмята за $x = 0{,}5 + p^{-m}$ директно или чрез $\ln 2x - \ln 2$ е все едно от гледна точка на грешката от пресмятане.

Броят на сегментите $f - 1$ зависи от $q_4 = \dfrac{\ln p \ln I_f}{\ln(I''_f/I_f)}$. Понеже I_f и I''_f не зависят от p, $f - 1$ расте с p, а при фиксирано p — с m, тъй като тогава $\left[\frac{I''_f}{I_f}\right] \to 1$ $\left[\begin{matrix}\text{намалявайки}\\ \text{растейки}\end{matrix}\right]$, а $\dfrac{I''_f}{I_f}$ намалява. При $p = m = 10$ $I_f = 0{,}8$, $I''_f = 1$, $f - 1 = 10$, а при $p = 16$, $m = 10$, $I_1 = 1/16$, $I_f = 0{,}8$ и $I''_f = 1$, т. е. $f - 1 = 12$. Това означава, че трябва да се съхраняват три масива от по $f - 1$ константи: $\ln l_s$ (дълги), l_s и I_s, $s = \overline{2, f}$ (числата на последните два масива могат да бъдат избрани къси). Чрез I_s с най-много $f - 1$ проверки с изваждане се намира индексът s на x_1. При $I''_f > 1$ $f - 1$ е по-малко, отколкото при $I''_f = 1$.

И така С-методът с транслация е с по-добро бързодействие (намаляващо при $x_1 \to I_f$ с проверки $s = \overline{2, f}$ и $x_1 \to I_1$ — при $s = \overline{f, 2}$), но при големи p и m изисква съхраняването на голям брой константи.

2.2. Ако приложим Т-метода с хомотетия, системата $I^{\ln}$ се определя заедно с l_s от: $I_s l_s = I_{s+1}$, $s = \overline{f-1, 2}$, $f \geqq 3$, и $I_{s+1} l_s = I''_f$, $s = \overline{f-1, 1}$, $f \geqq 2$. Оттук $l_s = \dfrac{I''_f}{I_{s+1}}$, $s = \overline{1, f-1}$, $f \geqq 2$, и $I_s = \dfrac{I^2_{s+1}}{I''_f}$, $s = \overline{2, f-1}$, $f \geqq 3$, окончателно $l_s = q_3 \uparrow 2^{f-s-1}$, $s = \overline{1, f-1}$, $f \geqq 2$, и $I_s = I''_f/(q_3 \uparrow 2^{f-s})$, $s = \overline{2, f-1}$, $f \geqq 3$, или (за рекурентно пресмятане) $l_{s-1} = l^2_s$, $l_{f-1} = q_3$, $s = \overline{f-1, 2}$, $f \geqq 3$, и $I_{s-1} = \dfrac{I_s}{l_{s-1}}$, $s = \overline{f, 3}$, $f \geqq 3$. f е НМЦЧ, за което $I''_f/(q_3 \uparrow 2^{f-1}) \leqq I_1$, $f = \left]\dfrac{\ln(q_4+1)}{\ln 2}\right[+ 1$. Сега I_1 се трансформира в $I_1(q_3 \uparrow 2^{f-2}) \geqq I_2 = I''_f/(q_3 \uparrow 2^{f-2})$. Ако при $f \geqq 4$ $I_1(q_3 \uparrow 2^{f-2}) \geqq I_3 = I''_f/(q_3 \uparrow 2^{f-3})$, то $\mathrm{tr}^{\max} = f-1$, в противен случай $\mathrm{tr}^{\max} = f$. „$\uparrow$" е програмисткото означение за степен.

Пример. За $p = m = 10$, $I_1 = 0{,}1$, $I_f = 0{,}8$, $I''_f = 1{,}25$, f се получава 4. $I_1 = 0{,}1$ ($l_1 = 0{,}59$) $I_2 = 0{,}21$ ($l_2 = 2{,}43$) $I_3 = 0{,}51$ ($l_3 = 1{,}56$) $I_4 = 0{,}8$. Ако изберем къси числа: $I_1 = 0{,}1$ ($l_1 = 6$) $I_2 = 0{,}2$ ($l_2 = 2{,}5$) $I_3 = 0{,}5$ ($l_3 = 1{,}6$) $I_4 = 0{,}8$.

Разсъжденията за $f-1$ от т. 2.1 могат да се повторят дословно и тук. За сравнение на f_{T} (при Т-метода) и f_{C} (при С-метода) трябва да се сравнят $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln 2}$ и x за $\overline{x} = q_4$. $q_4 = \dfrac{\ln q_2}{\ln q_3} \geqq 0$, понеже $\ln q_2 = 0$ при $I_f = I_1$, и $\overline{x} \xrightarrow[m\to+\infty]{} +\infty$, понеже $q_3 \xrightarrow[m\to+\infty]{} 1$ при $\left[\dfrac{I''_f}{I_f}\right] \xrightarrow[m\to+\infty]{} 1$. Да изследваме $g_0(x) = x - \dfrac{\ln(1+x)}{\ln 2}$. $g'_0(x) > 0$ за $x > x_0 = \dfrac{1-\ln 2}{\ln 2} \lessapprox 0{,}5 < 1$, тогава $g_0(x) > g(1) = 0$. И така при $\overline{x} > 1$, т. е. $q_2 > q_3$ и $I_f > \sqrt{I_1 I''_f}$, $\dfrac{\ln(1+\overline{x})}{\ln 2} < \overline{x}$. Това не е достатъчно, за да твърдим, че $f_{\mathrm{T}} < f_{\mathrm{C}}$, понеже $]x[$ е стъпаловидна функция и може $]x_1[=]x_2[$ за близки $x_1 < x_2$ и $]x_1[<]x_2[$ при по-силно различаващи се.

Съвсем сигурно $f_{\mathrm{T}} + (k-2) < f_{\mathrm{C}}$, $k \geqq 2$, ако $\dfrac{\ln(1+\overline{x})}{\ln 2} \leqq \overline{x} - (k-1)$. Да разгледаме $g_{k-1}(x) = x - k + 1 - \dfrac{\ln(1+x)}{\ln 2}$, $g'_{k-1}(x) = g'_0(x)$ и $g'_{k-1}(x) \geqq 0$ при $x \geqq 1$. Нека $x_k = 2^k - 1 \geqq 3$, $k \geqq 2$. Тогава $g_{k-1}(x) \geqq g_{k-1}(x_k) = 2^k - 2k \geqq 0$. И така при $x \geqq x_k \geqq 3$, $k \geqq 2$, $f_{\mathrm{T}} + (k-2) < f_{\mathrm{C}}$. В частност $f_{\mathrm{T}} < f_{\mathrm{C}}$ при $x \geqq x_2 = 3$, т. е. $q_2 \geqq q_3^3$ и $I_f \geqq \sqrt[4]{I_1 I''_f}$. Това е достатъчно, но не и необходимо условие, понеже $f_{\mathrm{T}} < f_{\mathrm{C}}$ дори и за някои x, $1 < x < 3$.

И така при Т-метода са необходими по-малко константи за съхранение и проверки за намиране на индекса s на x_1, но изобщо повече трансформации за трансформирането на x_1 в x_f.

2.3. При Т-метода с хомотетия и променливо m

$$\begin{bmatrix} I''_f \\ I_f \end{bmatrix} \xrightarrow[m\to+\infty]{} 1 \begin{bmatrix} \text{намалявайки} \\ \text{растейки} \end{bmatrix},$$

а $f \xrightarrow[m\to+\infty]{} +\infty$. Тук I_s не трябва да се намират от I_{f-1} към I_1, понеже I_f се мени с m и не може да бъде начало за рекурентно намиране на сегментите при произволно m. Тъй като I_1 зависи от p, но не и от m, I_1 се избира за такова начало. Тогава може да се приложи алгоритъм, изискващ съхраняването на пет масива от по $f_{\max}-1$ константи ($f_{\max}$ съответства на $m_{\max}$) с дължина на мантисата $m_{\max}$: горните граници на интервалите за m, в които I_f е едно и също; съответните I_f; I_s, l_s и $\ln l_s$, $s=\overline{1,\,f_{\max}}$, като последните три масива зависят само от $m_{\max}$ и то чрез дължината си. Само $\ln l_s$ са дълги. Вместо $I''_s = I''_f$, което се мени с m, нека $I_s + I''_s = 2$, $I''_s = 2 - I_s$, т. е. $B_{\ln,s}$ са симетрични относно 1.

Нека определим I_s и l_s от $I_s l_s = I_{s+1}$ и $I_{s+1} l_s = I''_{s+1}$, $s=\overline{1,\,f-1}$ (полученото по този начин I_f е изобщо по-голямо от зададеното, но последното участва в проверките). Тогава $l_s = \dfrac{I_{s+1}}{I_s}$, $\dfrac{I^2_{s+1}}{I_s} = 2 - I_{s+1}$, $I^2_{s+1} + I_s I_{s+1} - 2I_s = 0$ и $I_{s+1} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{I_s^2+8I_s} - I_s)$ — избираме знак плюс пред корена, иначе $I_{s+1}<0$.

Ще докажем индуктивно, че $I_s < 1$. $I_1 = \dfrac{1}{p} < 1$. От допускането, че $I_s<1$ при $s>1$, следва $I_{s+1}<1$ като равносилно на $\sqrt{I_s^2+8I_s} < I_s + 2$, а то — на $I_s<1$. От това следва, че $I_s < I_{s+1}$, защото от допускане на противното $I_s \geqq I_{s+1}$ се получава чрез преобразувания невярното $I_s \geqq 1$. Тогава $l_s = \dfrac{I_{s+1}}{I_s} > 1$, $s \geqq 1$. Понеже редицата с общ член I_s е монотонно растяща и ограничена, тя е сходяща заедно с подредицата си с общ член I_{s+1} и след граничен преход в израза за I_{s+1} (чрез I_s) се получава $\lim\limits_{s\to+\infty} I_s = 1$.

$$l_s = \frac{\sqrt{I_s^2+8I_s}-I_s}{2I_s} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8}{I_s}+1} - \frac{1}{2} \xrightarrow[s\to+\infty]{} 1,\ I_s = \frac{2}{l_s^2+l_s},\ l_s = \frac{l_s^2+l_s}{l^2_{s+1}+l_{s+1}}$$ и

окончателно $l_{s+1} = \sqrt{l_s + 1{,}25} - 0{,}5$, като $l_1 = \dfrac{1}{2}(\sqrt{8p+1} - 1)$.

Ще докажем, че с l_s $B_s \setminus B_{s+1} = [I_s,\, I_{s+1}) \cup (I''_{s+1},\, I''_s]$ се трансформира в B_{s+1}, $s = \overline{1,\,f-1}$. $[I_s,\, I_{s+1}) \xrightarrow{\times l_s} [I_{s+1}, I''_{s+1})$ поради основните равенства за l_s, I_s, I_{s+1} и I''_{s+1}. $(I''_{s+1},\, I''_s] \xrightarrow{:l_s} (I_{s+1},\, \dfrac{I''_s}{l_s}]$. Лесно се вижда, че $I''_{s+1} > \dfrac{I''_s}{l_s}$. Наистина след изразяване на I''_s и I''_{s+1} чрез l_{s-1} и l_s и заместване на l_{s-1} с $l_s^2 + l_s - 1$, което се намира от израза за l_s (чрез l_{s-1}), се получава вярното неравенство $(l_s-1)^2(l_s+1) > 0$, понеже $l_s > 1$. Нещо повече, оттук следва, че заедно с $[l_s,\ I_s,\ I''_s] \to 1$, $I''_{s+1} - \dfrac{I''_s}{l_s} \to 0$. И така $(I_{s+1},\ \dfrac{I''_s}{l_s}] \subset (I_{s+1},\ I''_{s+1}]$ и $B_s \setminus B_{s+1} \xrightarrow{l_s} [I_{s+1},\ I''_{s+1}) = B_{s+1} \setminus I''_{s+1} \subset B_{s+1}$.

Ако е недопустимо съхраняването на петте масива, I_s и l_s могат да се намират рекурентно $\left(I_{s+1} = I_s l_s,\ l_{s+1} = \dfrac{I_{s+1}}{I_s}\right)$, но това намалява бързодействието не само поради пресмятането им, но и по следната причина. Ако се използват пет масива и x_s се трансформира не в x_{s+1}, а в x_{s_1}, $s_1 > s+1$, с проверка може да се намери l_{s_1} и процесът да продължи. Ако I_s и l_s не се съхраняват, за всяко x_1 те трябва да се пресмятат последователно до индекса s, за който $x_s \to x_f$ само с една трансформация. Това значи, че за $x \gtreqqless I_s$, $s = \overline{1,\ f-1}$, трябва да се пресмятат всичките I_s и l_s, $s = \overline{1,\ f-1}$. Ако при това се изисква рекурентно да бъдат пресмятани къси I^*_s и l^*_s (като се пазят само „дългите“ $\ln l^*_s$), това трябва да става по един и същ начин от резултатите, получавани рекурентно.

При променливо m първоначално се намира съответното му I_f и се използват някои от началните $f-1$ константи I_s, l_s и $\ln l_s$ с не повече от m цифри на мантисата, които се получават например чрез отрязване до m-ия разряд на константите, зададени с $m_{\max}$ цифри (I_s и l_s се пазят без порядък). Понеже при $\dfrac{1}{p} \leqq x < 1$ p-порядъкът на x е нула, а при $1 \leqq x \leqq 2 - \dfrac{1}{p}$ — единица, лесно се определя в коя половина се намира x, оттам чрез сравнение съответно с I_s или $I''_s = 2 - I_s$ (I''_s се пресмятат динамично) се определят съответните на дадения етап s и l_s и $x = x_s$ се умножава или дели с l_s в зависимост от това, дали $x_s < 1$ или $x_s > 1$. Този „макроалгоритъм“ за стесняване на $\left[\dfrac{1}{p},\ 2 - \dfrac{1}{p}\right]$ трябва да се детайлизира за всяка конкретна КС с променливо m.

3. $\boldsymbol{y = \mathrm{tg}\, x_1}$, $x_1 \in B_{\mathrm{tg},1} = \left[-\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{4}\right]$.

3.1. С-методът с транслация може да се приложи съвсем аналогично на това в т. 1.1 — трябва да се замени $\ln c_s$ с t_s, а c_s — с $\mathrm{tg}\, t_s$. Ако извършим субституцията $x_f = x_1 - (\mathrm{sgn} x_1) t_s$, $x_f \in B_{\mathrm{tg},f}$, $\mathrm{tr}^{\max} = 2$ и

$$\mathrm{tg}\, x_1 = \frac{\mathrm{tg}\, x_f + (\mathrm{sgn} x_1)\, \mathrm{tg}\, t_s}{1 - (\mathrm{sgn} x_1)\, \mathrm{tg}\, x_f\, \mathrm{tg}\, t_s} \quad (\text{общо} \quad 1:,\ 1\times \text{ и } 3+).$$

t_s могат да се заменят с $t^*_s \approx t_s$, така подбрани, че $\mathrm{tg}\, t^*_s$, с които се умножава $\mathrm{tg}\, x_f$, да са къси. Тогава $t^*_s = \mathrm{arc\,tg}(\mathrm{tg}\, t^*_s)$.

Пример. За $p = m = 10$ $f = 2$, $I_f = I_2 = \dfrac{\pi}{12}$, $t_1 = I_1 - I_2 = \dfrac{\pi}{6}$, $t^*_1 \approx 0{,}524$ и $\mathrm{tg}\, t^*_1 = 0{,}564$.

Разсъжденията за $f-1$ са същите като в т. 1.1, но $I_1 = \frac{\ln p}{2}$ трябва да се замени с $I_1 = \frac{\pi}{4}$.

3.2. Прилагането на Т-метода с транслация не се различава от описаното във въведението, съвместно с резултатите от т. 3.1. Сега $t_s = I_s - I_{s+1} = d_{s+1} = 2.3^{f-s-1} I_f$.

3.3. При голямо f К-методът с транслация може да се приложи аналогично на т. 1.3, като индексът exp се замени с tg.

3.4. С-методът с хомотетия и $f=2$ се прилага аналогично на т. 1.4, като $\frac{\ln p}{2}$ се замени с $\frac{\pi}{4}$, „повдигане на степен n“ и x^n — с $\operatorname{tg} nx_2$, а разсъждението за $p=n=2$ отпада. Остава да се дадат алгоритми за пресмятане на $\operatorname{tg} x_1 = \operatorname{tg} nx_2$ чрез $\operatorname{tg}\frac{x_1}{n} = \operatorname{tg} x_2$.

Нека са дадени хармоничните полиноми [3]:

$$H_n^{(0)}(x,\, y) = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^i \binom{n}{2i} x^{n-2i} y^{2i},$$

$$H_n^{(1)}(x,\, y) = \sum_{i=0}^{[\frac{n-1}{2}]} (-1)^i \binom{n}{2i+1} x^{n-2i-1} y^{2i+1}.$$

Тогава

$$\sin nx = H_n^{(1)}(\cos x,\, \sin x) = \sum_{i=0}^{[\frac{n-1}{2}]} (-1)^i \binom{n}{2i+1} \cos^{n-2i-1} x \sin^{2i+1} x,$$

$$\cos nx = H_n^{(0)}(\cos x,\, \sin x) = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^n \binom{n}{2i} \cos^{n-2i} x \sin^{2i} x$$

и $$\operatorname{tg} nx = \frac{\sin nx}{\cos nx} = \frac{H_n^{(1)}(1,\, \operatorname{tg} x)}{H_n^{(0)}(1,\, \operatorname{tg} x)} = \frac{\sum_{i=0}^{[\frac{n-1}{2}]} (-1)^i \binom{n}{2i+1} \operatorname{tg}^{2i+1} x}{\sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^i \binom{n}{2i} \operatorname{tg}^{2i} x}.$$

Окончателно получаваме

$$\operatorname{tg} x_1 = \operatorname{tg} nx_2 = \frac{\operatorname{tg} x_2 R_{[\frac{n-1}{2}]}(\operatorname{tg}^2 x_2)}{S_{[\frac{n}{2}]}(\operatorname{tg}^2 x_2)},$$

където

$$R_{[\frac{n-1}{2}]}(x) = \sum_{i=0}^{[\frac{n-1}{2}]} (-1)^i \binom{n}{2i+1} x^i, \qquad S_{[\frac{n}{2}]}(x) = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^i \binom{n}{2i} x^i.$$

Ако вместо $n = n_0 =]q_1[$, $q_1 = \dfrac{I_{\mathrm{tg},1}}{I_{\mathrm{tg},f}}$ изберем $n_r = 2^r \geqq n_0 > 2^{r-1}$, $r = \left]\dfrac{\log_p n}{\log_p 2}\right[$, $\mathrm{tg}\, n_r x = \mathrm{tg}\, 2^r x$ може да се пресметне рекурентно от $\mathrm{tg}\, x$ за r итерации чрез $\mathrm{tg}\, 2^{i+1}x = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\, 2^i x}{1 - \mathrm{tg}^2\, 2^i x}$, $i = \overline{0,\ r-1}$ ($r_\times$, $r_:$, r_+, $r_\times$ са къси).

Пресмятането на $\mathrm{tg}\, n_0 x_2$ чрез R и S (за всяко n точно един от двата полинома има старши коефициент 1, а другият — $\neq 1$) при $r \geqq 2$ ($n_0 \geqq 3$) изисква $1\,:$, $2\times$, $(N-1)_\times$ къси, N_+ и съхраняването на $N+2$ къси константи, $N = \left[\dfrac{n_0 - 1}{2}\right] + \left[\dfrac{n_0}{2}\right] = n_0 - 1$. Ако означим с A, M, M_k и D съответно броя на събиранията, умноженията, късите умножения и деления, и като използваме, че $2^{r-1} \leqq N = n_0 - 1 \leqq 2^r - 1$, получаваме

$$D(n_0) = 1,\ M(n_0) = 2,\ 2^{r-1} - 1 \leqq M_k(n_0) \leqq 2^r - 2,\ 2^{r-1} \leqq A(n_0) \leqq 2^r - 1,$$

$$D(n_r) = r,\ M(n_r) = r,\ M_k(n_r) = r\ (\text{при } p > 2),\ A(n_r) = r.$$

Не е взето предвид умножението $\dfrac{1}{n}x_1$, което може да е късо, а при $n = 2^r$ и $p = 2$ се извършва с изваждане на r от порядъка на x_1.

Ако $t_: \approx t_\times$ не отличаваме късите от обикновените умножения и присъединим $M_k(n_r)$ към $A(n_r)$, получаваме

$$M(n_r) + D(n_r) = 2r < 2^{r-1} + 2 \leqq M(n_0) + M_k(n_0) + D(n_0) \leqq 2^r + 1 \text{ при } r \geqq 4,$$

$$A(n_r) + M_k(n_r) = 2r < 2^{r-1} \leqq A(n_0) \leqq 2^r - 1 \quad \text{при} \quad r > 4.$$

Сравнение. Нека $r = 2$, $n_r = 4$. Ако $B_{\mathrm{tg},f} = \left[-\dfrac{\pi}{16}, \dfrac{\pi}{16}\right]$, $x_2 = \dfrac{x_1}{4} = 0{,}25 x_1$ и $\mathrm{tg}\, x_1$ се пресмята с итерации, необходими са $2\,:$, $2\times$, $2\times$ къси ($\times 2$ и $\times 0{,}25$) и $2-$. Ако $\mathrm{tg}\, x_1 = \dfrac{4\,\mathrm{tg}\, x_2 (1 - \mathrm{tg}^2\, x_2)}{(1 - \mathrm{tg}^2\, x_2)^2 - 4\,\mathrm{tg}^2\, x_2}$, необходими са $1\,:$, $3\times$, $3\times$ къси ($\times 4$, $\times 0{,}25$) и $2-$.

При $p = m = 10$ $B_{\mathrm{tg},f} = \left[-\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{12}\right]$, $n_0 = 3$, $x_2 = \dfrac{1}{3}x_1$ и $\mathrm{tg}\, x_1 = \dfrac{\mathrm{tg}\, x_2 (3 - \mathrm{tg}^2\, x_2)}{1 - 3\,\mathrm{tg}^2\, x_2}$ ($1\,:$, $3\times$, $1\times$ късо ($\times 3$), $2-$).

Очевидно при $n_0 = 3$ и 4 бързодействието и при двата метода е практически еднакво.

3.5. С-методът с хомотетия и $f > 2$ се прилага съвсем аналогично на т. 1.5, като се използват резултатите от т. 3.4 и $\mathrm{tg}\, x_1$ се пресмята рекурентно чрез $\mathrm{tg}\, \dfrac{x_1}{2^r}$. От т. 1.5 отпадат разсъжденията, свързани с $e^x = \left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n$, което тук не е приложимо. За $x_1 \in B_{\mathrm{tg},1} \setminus B_{\mathrm{tg},2}$ при $I_1 - I_2 \leqq 2I_f$ може вместо хомотетия, която в случая ($n = 2^{r_{\max}}$) ще бъде най-неблагоприятна, да се използва транслация.

3.6. При променливо m важат разсъжденията от т. 4.6, адаптирани към $\operatorname{tg} x$.

При Т-метода с транслация I_s се определят от $I_s = \dfrac{I_1}{3^{s-1}}$, $s \geqq 2$, $B_{\mathrm{tg},1}$ се стеснява 3^s пъти за s итерации, но трябва да се съхраняват два масива с t_s и $\operatorname{tg} t_s$ с дължина на мантисата $m_{\max}$ и брой, съответен на $m_{\max}$.

При С-метода с хомотетия $k = \dfrac{1}{n}$, $n = 2^r$, $I_s = \dfrac{I_1}{2^{s-1}}$, $s \geqq 2$, $\operatorname{tg} x_1$ се пресмята рекурентно. Стесняването на $B_{\mathrm{tg},1}$ е по-бавно — 2^s пъти за s итерации с практически еднакво бързодействие при всяка итерация, но не трябва да се съхраняват никакви константи.

4. $\boldsymbol{y = \operatorname{arc\,tg} x}$, $x \in D^{\infty}_{\operatorname{arc\,tg}} = (-\infty, +\infty)$.

4.1. Ще казваме, че една функция (трансформация) $f(x)$ стеснява по модул (СМ) интервала $[0, \left[{}^{+\infty}_{a_1}\right]]$ до интервала $[0, a_2]$, $0 < a_2 < a_1$, ако $[a_2, \left[{}^{+\infty}_{a_1}\right]] \xrightarrow{f} [a_2^*, a_1^*] \subseteq [-a_2, a_2]$, т. е. ако $x \in [a_2, \left[{}^{+\infty}_{a_1}\right]]$, $|f(x)| = |x^*| \leqq a_2$. За всяка такава трансформация, преди да се свърже с пресмятането на $\operatorname{arc\,tg} x$, трябва да се отговори на няколко въпроса: за дадени $f(x)$ и $\left[{}^{+\infty}_{a_1}\right]$ има ли такива a_2; ако има, има ли едно най-малко между тях; за дадени $f(x)$ и a_2 има ли $\left[{}^{+\infty}_{a_1}\right]$, за които $f(x)$ да СМ $[0, \left[{}^{+\infty}_{a_1}\right]]$ до $[0, a_2]$; ако има, има ли едно най-голямо между тях и др. Понеже $\operatorname{arc\,tg} x$ е нечетна, достатъчно е да $\exists f(x)$, която да СМ $D^{\infty}_{\operatorname{arc\,tg}|x|} = D^{+\infty}_{\mathrm{at}} = [0, +\infty)$ до $[0; I_{\mathrm{at},f}]$ (отсега долните индекси $\operatorname{arc\,tg}$ ще заместваме с at). $f(x)$ не може да бъде линейна, понеже $D^{+\infty}_{\mathrm{at}}$ е неограничена. Ще разгледаме най-близката до линейната, достатъчно проста и удобна при пресмятането на $\operatorname{arc\,tg} x$ дробно–линейна функция, свързана със субституцията $x_{s+1} = \dfrac{a x_{s-1}}{x_s + a} = a - \dfrac{a^2+1}{x_s + a}$, $a > 0$ (1:, 2+; a^2+1 се пресмята предварително), с цел да бъде използвана при $x_s > 0$ събирателната формула

$$\operatorname{arc\,tg} x_s = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{a} + \operatorname{arc\,tg} x_{s+1}$$

(заедно със субституцията са необходими 1 :, 3+; $\operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{a}$ се пресмята предварително), като a се избира така, че $|x_{s+1}| < |x_s|$.

Граничен случай се получава при $a > 0$, $a \to 0$:

$$x_{s+1} = -\frac{1}{x_s}, \quad \operatorname{arc\,tg} x_s = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg} x_{s+1}, \quad x_s > 0 \quad (1\text{: и } 1+),$$

по-общо:

$$f_0(x) = -\frac{1}{x},\ (\pm 1, \pm\infty) \xrightarrow{f_0} (\mp 1, 0),\ \operatorname{arc\,tg} x_s = (\operatorname{sgn} x_s)\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg} x_{s+1},\ x_s \neq 0.$$

Ще изследваме по-подробно дробно-линейната трансформация $f(a, x)$ $= f_a(x) = f_a = \dfrac{ax-1}{x+1} = f_x(a)$, $a \neq 0$. Понеже $\dfrac{\partial f_a}{\partial \left[{}^a_x\right]} = \dfrac{\left[{}^x_a\right]^2 + 1}{(x+a)^2} > 0$, f_a е строго монотонно растяща функция (с. м. р. ф.) и на двата си аргумента. Нека отбележим, че няма да отделяме определянето на $B_{\mathrm{at},1}$ от другите БИ, както при другите ОЕФ. Ще ни интересува как f_a трансформира полубезкрайни интервали с лява положителна граница и крайни — с положителни граници. Поради наличието на събирателната формула f_a е удобна от ИА, но не е ясно дали при $\forall a$ СМ такива интервали, в частност дали $\exists x$, $x \neq 0$, които f_a намалява по модул (НМ), т. е. $|f_a(x)| < |x|$ при $a \neq 0$.

Ще изследваме кога $|f_a(x)| = \left|\dfrac{ax-1}{x+a}\right| < |x|$. Възможни са два случая:

1) $ax = -|a||x|$.

В този случай в събирателната формула може да фигурира като ново събираемо $\pm\pi$ в зависимост от a и x. Те са с обратни знакове, $|x+a| = ||x| - |a||$ и неравенството е еквивалентно на $\dfrac{|a||x|+1}{||x|-|a||} < |x|$.

От двата еквивалентни по отношение на неравенството подслучая $a < x$, $x > 0$, и $a > 0$, $x < 0$, ще разгледаме първия и ще докажем следното

Твърдение 1. При $a < 0$ и $x > 0$ $\bar{\exists} f_a$, която да НМ $x \in [0, 1]$.

Доказателство. Сега неравенството е равносилно на $\dfrac{1-ax}{|x+a|} < x$.

а) $x > -a > 0$. Тогава $1-ax < x^2+ax$, $x^2+2ax-1 > 0$, $x_{1,2} = -a\pm\sqrt{a^2+1}$, но $x > 0$, следователно неравенството е изпълнено при $x > \sqrt{a^2+1}+|a| > 1$.

б) $x < -a$. $1 - ax < -x^2 - ax$ не е вярно.

И така при $a < 0$ и $x > 0$ евентуално само за $x > 1$ $\exists f_a$, която ги НМ, т. е. $\bar{\exists} f_a$, която СМ $[0, 1]$ в частност до $[0; B_{\mathrm{at},f}]$, ако $B_{\mathrm{at},f} < 1$.

2) $ax = |a||x|$.

a и x са с еднакви знакове, $|x+a| = |x| + |a| > 0$ и неравенството е еквивалентно на $||a||x|-1| < |x|(|x|+|a|)$. Аналогично избираме $a > 0$ и $x > 0$. Тогава $f_a(x) = \dfrac{ax-1}{x+a} < x$, но не винаги $|f_a(x)| < x$, т. е. f_a намалява $x > 0$, но не винаги по модул. Ще докажем

Твърдение 2. За $\forall x > 0$ $\exists f_a$, $a > 0$, която го НМ.

Доказателство. В този случай $|f_a(x)| < x$ е еквивалентно на $|ax-1| < x^2 + ax$.

а) $x \geqq \dfrac{1}{a}$. $ax - 1 < x^2 + ax$ е вярно.

б) $x < \dfrac{1}{a}$. $x^2 + 2ax - 1 > 0$, $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2+1}$ и понеже $x > 0$, неравенството е еквивалентно на $\sqrt{a^2+1} - a < x < \dfrac{1}{a}$, което заедно с подслучай а) дава, че за $x > \sqrt{a^2+1} - a > 0$ f_a НМ x. Но $\sqrt{a^2+1} - a \xrightarrow[a\to+\infty]{} 0$, т. е. за $\forall x$, $x > 0$, x — произволно малко, $\exists a$, $a > 0$, a — достатъчно голямо, $|f_a(x)| < x$.

И така при дадено $a > 0$, f_a НМ само $x > \sqrt{a^2+1} - a$. Числото $\sqrt{a^2+1} - a$ ще играе важна роля по-нататък. Ще го наричаме положителна неподвижна по модул точка (ПНМТ) на f_a, понеже може да се получи от условието $\dfrac{ax-1}{x+a} = -x$, $x > 0$, т. е. f_a го трансформира в противоположното му число. Очевидно $\forall f_a$, $a > 0$, има точно една ПНМТ.

Окончателно ще изследваме $f_a(x)$ само за $\left[{a \atop x}\right] > 0$. В т. 4.2 и 4.3 ще се търсят a и $\left[{+\infty \atop a_1}\right]$, за които $\exists a_2$, f_a СМ $[0, \left[{-\infty \atop a_1}\right]]$ до $[0, a_2]$.

4.2. При СМ на $[0, +\infty)$ до $[0, a_2]$ е естествено да се изследва за кои a $a_2 = a$, понеже $f_a(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} a$. Изобщо $[a, +\infty) \xrightarrow{f_a} [a^*, a)$, $a^* = f_a(a)$ $= \dfrac{a^2-1}{2a} < a$ (с x^* ще означаваме образа на x чрез f_a, която се подразбира от текста). Нека $M_0^\infty(f_a) = \max(|a^*|, a) = \max(|f_a(a)|, a)$. Понеже $\dfrac{\partial f_a}{\partial x} > 0$, $|f_a(x)| \leqq M_0^\infty(f_a)$ за $x \in [a, +\infty)$. Ако $a \geqq 1$, $a > a^* \geqq 0$ и $M_0^\infty(f_a) = a$. По-интересен е случаят $a < 1$, тогава $a^* < 0$. Ще казваме, че f_a повече НМ $[a, +\infty)$ отколкото f_b — $[b, +\infty)$, ако $M_0^\infty(f_a) < M_0^\infty(f_b)$, при това не се изисква нито f_a да СМ $[0, +\infty)$ до $[0, a]$, нито f_b — до $[0, b]$. Ако и f_a, и f_b го СМ съответно до $[0, a]$ и $[0, b]$, тогава $M_0^\infty(f_a) = a$, $M_0^\infty(f_b) = b$ и от $M_0^\infty(f_a) < M_0^\infty(f_b)$ следва, че $a < b$ и f_a СМ $[0, +\infty)$ до $[0, a]$ повече, отколкото f_b — до $[0, b]$ ($[0, a] \subset [0, b]$). Ще покажем, че $\exists \tilde{f}$ — единствена, с най-малък $M_0^\infty(\tilde{f})$, която освен това СМ $[0, +\infty)$. Ето защо ще я наречем най–стесняваща по модул трансформация (НСМТ) за $[0, +\infty)$. Само за нея $M_0^\infty(f_a)$ достига точната си долна граница (т. д. г.) — $M_0^\infty(f_a)$ е ограничено отдолу — $M_0^\infty(f_a) \geqq a > 0$, а интервалът, до който $\tilde{f}$ СМ $[0, +\infty)$, е най-малкият възможен. Елементите на $\tilde{f}$ ще бележим с $\sim$.

Теорема 3. $\tilde{f} = f_{\tilde{a}_\infty}$ с ПНМТ $\tilde{a}_\infty$ е единствената НСМТ за $[0, +\infty)$.

Доказателство. $\tilde{a}_\infty$ се получава от условието $f_{\tilde{a}_\infty}(\tilde{a}_\infty) = -\tilde{a}_\infty$, $\dfrac{\tilde{a}_\infty^2 - 1}{2\tilde{a}_\infty} = -\tilde{a}_\infty$, $\tilde{a}_\infty = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, но от $\tilde{a}_\infty > 0$ следва $\tilde{a}_\infty = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}57735\ldots$

От $[\tilde{a}_\infty, +\infty) \xrightarrow{f_{\tilde{a}_\infty}} [-\tilde{a}_\infty, \tilde{a}_\infty]$ следва, че $f_{\tilde{a}_\infty}$ СМ $[0, +\infty)$ до $[0, \tilde{a}_\infty]$.

Ако $a > \tilde{a}_\infty$, $M_0^\infty(f_a) = \max(|a^*|, a) \geqq a > \tilde{a}_\infty = \max(|-\tilde{a}_\infty|, \tilde{a}_\infty)$ $= M_0^\infty(f_{\tilde{a}_\infty})$.

Ако $0 < a < \tilde{a}_\infty$, $a^* = \dfrac{a^2-1}{2a} < -\tilde{a}_\infty$, понеже $a^2 + 2a\tilde{a}_\infty < 3\tilde{a}_\infty^2 = 1$. Тогава $|a^*| > \tilde{a}_\infty$ и $M_0^\infty(f_a) = \max(|a^*|, a) \geqq |a^*| > \tilde{a}_\infty = M_0^\infty(f_{\tilde{a}_\infty})$. С това теоремата е доказана.

Следствие 3.1. $\forall f_a$, $a > \tilde{a}_\infty$, f_a СМ $[0, +\infty)$ до $[0, a]$; $\overline{\exists} f_a$, $0 < a < \tilde{a}_\infty$, f_a СМ $[0, +\infty)$ до $[0, a]$; за $\forall f_a$, $0 < a < \tilde{a}_\infty$, и за $\forall a_2$, $a_2 \geqq \sqrt{a^2+1} - a$, f_a СМ $[0, +\infty)$ до $[0, a_2]$.

Доказателство. Ако $a > \tilde{a}_\infty$, от $\dfrac{\partial f_a}{\partial\left[\frac{x}{a}\right]} > 0$ следва $-a < -\tilde{a}_\infty = f_{\tilde{a}_\infty}(\tilde{a}_\infty)$ $< f_{\tilde{a}_\infty}(a) < f_a(a) < a$, т. е. $|a^*| < a$ и $[a, +\infty) \xrightarrow{f_a} [a^*, a) \subset [-a, a]$. f_a СМ $[0, +\infty)$ до $[0, a]$, но СМ е по-малко, понеже от $a > \tilde{a}_\infty$ следва $[0, \tilde{a}_\infty] \subset [0, a]$.

Ако $0 < a < \tilde{a}_\infty$ и допуснем, че $\exists f_a$, $[a, +\infty) \xrightarrow{f_a} [f_a(a), a) \subseteq [-a, a]$, то $f_a(a) < f_{\tilde{a}_\infty}(a) < f_{\tilde{a}_\infty}(\tilde{a}_\infty) = -\tilde{a}_\infty$, $|f_a(a)| > \tilde{a}_\infty > a$ и $[-a, a] \subset [f_a(a), a]$, което противоречи на допускането.

Ако се откажем f_a да СМ $[0, \infty)$ до $[0, a]$, $[0, +\infty)$ може да се СМ чрез f_a, $0 < a < \tilde{a}_\infty$, до $[0, a_2]$, $a_2 \geqq \sqrt{a^2+1} - a > \tilde{a}_\infty$ ($a_2 \geqq$ ПНМТ на f_a), понеже е еквивалентно на $a^2 + 2a\tilde{a}_\infty < 3\tilde{a}_\infty^2 = 1$. Наистина от $a < \tilde{a}_\infty$ $< a_2 \leqq x < +\infty$ следва, че $-a_2 = f_a(a_2) \leqq f_a(x) < f_a(+\infty) = a < \tilde{a}_\infty < a_2$, т. е. $|f_a(x)| \leqq a_2$ и f_a СМ $[0, +\infty)$ до $[0, a_2]$.

Следствие 3.2. При $I_{at,f} < \tilde{a}_\infty$ С-методът е неприложим за $\operatorname{arc\,tg} x$ чрез f_a. Следва от второто твърдение на следствие 3.1.

4.3. Ще докажем, че при $I_{\mathrm{at},f} < \tilde{a}_\infty$ Т-методът е приложим за каскадно СМ на $[0, +\infty)$ до $[0; I_{\mathrm{at},f}]$. За тази цел ще изследваме за кои a и a_1 f_a СМ $[0, a_1]$ до $[0, f_a(a_1)]$. Аналогично на т. 4.2 въвеждаме $M_0^{a_1}(f_a)$ $= \max(|f_a(f_a(a_1))|, |f_a(a_1)|)$. Понеже $\dfrac{\partial f_a}{\partial x} > 0$, $|f_a(x)| \leqq M_0^{a_1}(f_a)$ за x $\in [f_a(a_1), a_1]$. Ще казваме, че f_a НМ $[f_a(a_1), a_1]$ повече, отколкото f_b — $[f_b(a_1), a_1]$, ако $M_0^{a_1}(f_a) < M_0^{a_1}(f_b)$, като не се изисква f_a да СМ $[0, a_1]$ до $[0, f_a(a_1)]$, нито f_b — до $[0, f_b(a_1)]$. Ако f_a и f_b го СМ съответно до $[0, f_a(a_1)]$ и $[0, f_b(a_1)]$, то $f_a(a_1) > 0$, $f_b(a_1) > 0$, $M_0^{a_1}(f_a) = f_a(a_1)$, $M_0^{a_1}(f_b) = f_b(a_1)$ и от $M_0^{a_1}(f_a) < M_0^{a_1}(f_b)$ следва $f_a(a_1) < f_b(a_1)$ (тогава и $a < b$ от $\dfrac{\partial f_a}{\partial a} > 0$) и f_a СМ $[0, a_1]$ до $[0, f_a(a_1)]$ повече, отколкото f_b — до $[0, f_b(a_1)]([0, f_a(a_1)] \subset [0, f_b(a_1)])$. Ще докажем, че $\exists \tilde{f}$ — единствена, с най-малък $M_0^{a_1}(\tilde{f})$, която освен това СМ $[0, a_1]$, и ще я наречем НСМТ за $[0, a_1]$. Само за нея $M_0^{a_1}(f_a)$ достига т. д. г., а интервалът, до който се СМ $[0, a_1]$, е най–малкият възможен.

Теорема 4. $f_{\tilde{a}^{(1)}}$, която трансформира a_1 в своята ПНМТ $\tilde{a}_2^{(1)}$, е единствената НСМТ за $[0, a_1]$.

Единственост на НСМТ. Ако $0 < a < \tilde{a}^{(1)}$, от $\dfrac{\partial f_a}{\partial\left[\frac{x}{a}\right]} > 0$ следва $f_a(a_1)$ $< f_{\tilde{a}^{(1)}}(a_1) = \tilde{a}_2^{(1)}$ и $f_a(f_a(a_1) < f_a(\tilde{a}_2^{(1)}) < f_{\tilde{a}^{(1)}}(\tilde{a}_2^{(1)}) = -\tilde{a}_2^{(1)}$. Тогава $M_0^{a_1}(f_a) = \max(|f_a(f_a(a_1))|, |f_a(a_1)|) \geqq |f_a(f_a(a_1))| > \tilde{a}_2^{(1)} = \max(|-\tilde{a}_2^{(1)}|, \tilde{a}_2^{(1)})$ $= M_0^{a_1}(f_{\tilde{a}^{(1)}})$.

Ако $a > \tilde{a}^{(1)}$, $M_0^{a_1}(f_a) \geqq |f_a(a_1)| > |f_{\tilde{a}^{(1)}}(a_1)| = \tilde{a}_2^{(1)} = M_0^{a_1}(f_{\tilde{a}^{(1)}})$.

Съществуване на НСМТ. Ще докажем следната

Лема 5. Ако $a_1 > 0$, $\tilde{a}^{(1)} = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{2}{3}\operatorname{arc\,tg} a_1\right)$, $\tilde{a}_2^{(1)} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} a_1\right)$, $(2-\sqrt{3})a_1 \leqq \tilde{a}_2^{(1)} < \dfrac{1}{3}a_1$ за $a_1 \leqq 1$ и $2-\sqrt{3} < \tilde{a}_2^{(1)} < \tilde{a}_\infty$ за $a_1 > 1$.

За удобство в т. 4.3 ще използваме $\begin{bmatrix}\tilde a\\ \tilde a_2\end{bmatrix}$ вместо $\begin{bmatrix}\tilde a^{(1)}\\ \tilde a_2^{(1)}\end{bmatrix}$.

Доказателство. Понеже $0 < \tilde a_2 = \sqrt{\tilde a^2+1} - \tilde a < 1$, от $f_{\tilde a}(\tilde a_2) = -\tilde a_2$ получаваме $\tilde a = \dfrac{1-\tilde a_2^2}{2\tilde a_2} > 0$. Ако заместим израза за $\tilde a$ в условието $f_{\tilde a}(a_1) = \tilde a_2$, получаваме

$$g_{a_1}(\tilde a_2) = \tilde a_2^3 - 3a_1\tilde a_2^2 - 3\tilde a_2 + a_1 = 0.$$

$g_{a_1}(\tilde a_2) = 0$ има винаги три реални корена, два от които не отговарят на условията $0 < \tilde a_2 < a_1$:

$g(-\infty) < 0$, $\quad g(0) = a_1 > 0$ — $g_{a_1}(\tilde a_2)$ има винаги нула $\tilde a_2 < 0$;

$g(a_1) = -2a_1(1+a_1^2) < 0$, $g(+\infty) > 0$ — $g_{a_1}(\tilde a_2)$ има винаги нула $\tilde a_2 > a_1$.

а) $a_1 \leqq 1$.

При $a_1 < 1$ $g((2-\sqrt3)a_1) = (5-3\sqrt3)a_1(a_1^2-1) > 0$, $g\left(\dfrac{a_1}{3}\right) = -\dfrac{8a_1^3}{27} < 0$.

И така $\exists \tilde a_2$, $(2-\sqrt3)a_1 < \tilde a_2 < \dfrac{a_1}{3}$. Оценката отдолу се достига при $a_1 = 1$, $g_1(2-\sqrt3) = 0$. Оценката отгоре не се достига, понеже $\lim\limits_{\substack{a_1\to 0\\ a_1>0}} \dfrac{\tilde a_2}{a_1} = \dfrac13$.

б) $a_1 > 1$.

$g(2-\sqrt3) = 4(3\sqrt3-5)(a_1-1) > 0$, $\begin{bmatrix} g(a_1/3)\\ g(1/\sqrt3) = -\dfrac{8\sqrt3}{9}\end{bmatrix} < 0$. Следователно $2-\sqrt3 < \tilde a_2 < \min\left(\dfrac{1}{\sqrt3}, \dfrac{a_1}{3}\right) \leqq \tilde a_\infty$. От $g_{a_1}(\tilde a_2) = 0$ a_1 се определя като функция на $\tilde a_2$, $a_1 = \dfrac{\tilde a_2(3-\tilde a_2^2)}{1-3\tilde a_2^2} = \tilde a_1^{(2)}$. Ако съпоставим този израз с $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{3}(3-\operatorname{tg}^2\frac{x}{3})}{1-3\operatorname{tg}^2\frac{x}{3}}$ и означим $x = \operatorname{arc\,tg} a_1$, получаваме $\tilde a_2 = \operatorname{tg}\left(\dfrac13 \operatorname{arc\,tg} a_1\right)$, а от $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$ получаваме $\tilde a = 1\Big/\dfrac{2\tilde a_2}{1-\tilde a_2^2} = 1\Big/\operatorname{tg}\left(\dfrac23 \operatorname{arc\,tg} a_1\right) = \operatorname{ctg}\left(\dfrac23 \operatorname{arc\,tg} a_1\right)$.

Експлицитното изразяване на параметрите $\tilde a$ и $\tilde a_2$ на НСМТ чрез a_1 доказва съществуването ѝ и с това окончателно теорема 4.

Два важни частни случая. Ако $a_1 = \tilde a_\infty = \dfrac{1}{\sqrt3} = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6} \approx 0{,}577\ldots$, $\tilde a_2 = \operatorname{tg}\left(\dfrac13 \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{\sqrt3}\right) = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{18} \approx 0{,}173\ldots$, $\tilde a = \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{9} \approx 2{,}8$. Това е НСМТ за $[0, \tilde a_\infty]$ (след като $[0, +\infty)$ е СМ до него с НСМТ $f_{\tilde a_\infty}$).

Ако $a_1 = 1$, вече получихме $\tilde{a}_2 = 2 - \sqrt{3}$. Отново, съгласно лемата, $\tilde{a}_2 = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} 1\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} \approx 0{,}268\ldots = 2 - \sqrt{3}$, $\tilde{a} = \dfrac{1 - (2-\sqrt{3})^2}{2(2-\sqrt{3})} = \sqrt{3}$ $= \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} \approx 1{,}732$. Чрез $\tilde{a}$ за трети път получаваме $\tilde{a}_2 = \dfrac{\sqrt{3}.1 - 1}{1+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$.

Следствие 4.1. $\exists f_a$, която СМ произволно много $[0, \left[{}^{+\infty}_{a_1}\right]]$.

Доказателство. От теорема 3 и следствие 3.1 следва, че $[0, +\infty)$ може да се СМ най-много до $[0, \tilde{a}_\infty)$ чрез $f_{\tilde{a}_\infty}$. От теорема 4 следва, че $[0, a_1]$ може да се СМ най-много до $[0, \tilde{a}_2]$, $g_{a_1}(\tilde{a}_2) = 0$. С това следствието е доказано.

Поради $\tilde{a}_2 < \min\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{a_1}{3}\right) \leqq \frac{a_1}{3}$, е вярно

Следствие 4.2. Чрез прилагане на Т-метода интервалът $[0, +\infty)$ може да се СМ произволно много.

Доказателство. Ако приложим серия от $k \geqq 1$ последователни НСМТ към $[0, +\infty)$, той ще се СМ до $[0; a_{2,(k-1)}]$, $a_{2,(k-1)} < \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \tilde{a}_\infty \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, т. е. $a_{2,(k-1)}$ може да стане произволно малко при достатъчно голямо k.

С това окончателно се решава въпросът за годността на трансформациите $f_a(x)$ по отношение СМ на $[0, +\infty)$ до $[0; I_{\mathrm{at},f}]$.

В т. 4.4 $\div$ 4.6 ще бъдат разгледани въпроси, свързани с избора на най-подходяща от ИА серия от последователни трансформации от вида f_a, която СМ $[0, +\infty)$ при дадени p и $m(m_{\max})$.

4.4. Нека изразим всеки два от трите параметъра $\tilde{a}$, $\tilde{a}_1$ и $\tilde{a}_2$ на една НСМТ $f_{\tilde{a}}$ чрез третия и ги изследваме като функция от него.

В т. 4.3 намерихме как $\tilde{a}$ и $\tilde{a}_1$ се изразяват чрез $\tilde{a}_2$ и как $\tilde{a}$ и $\tilde{a}_2$ — чрез $\tilde{a}_1$. За дадено $\tilde{a}$ $\tilde{a}_2$ се намира като ПНМТ на $f_{\tilde{a}}$. Остава да намерим $\tilde{a}_1$, $f_{\tilde{a}}(\tilde{a}_1) = \tilde{a}_2$. Ако $\tilde{a} = \tilde{a}_\infty = \frac{1}{\sqrt{3}}$, то $\tilde{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\tilde{a}_1 = +\infty$. Ако $\tilde{a} \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$, ще използваме $f_{\tilde{a}}^{-1} = \dfrac{\tilde{a}x + 1}{-x + \tilde{a}}$, $x \neq \tilde{a}$, която е обратна на $f_{\tilde{a}}$ и се намира от тъждеството $f_{\tilde{a}}(f_{\tilde{a}}^{-1}(x)) = x$, $\dfrac{\tilde{a} f_{\tilde{a}}^{-1} - 1}{f_{\tilde{a}}^{-1} + \tilde{a}} = x$. $\tilde{a}_1 = f_{\tilde{a}}^{-1}(\tilde{a}_2) = \dfrac{\tilde{a}\tilde{a}_2 + 1}{-\tilde{a}_2 + \tilde{a}}$ $= \dfrac{1 - \tilde{a}_2^2 + \tilde{a}\sqrt{\tilde{a}^2+1}}{2\tilde{a} - \sqrt{\tilde{a}^2+1}} = \dfrac{\sqrt{\tilde{a}^2+1} + 2\tilde{a}}{\tilde{a}\sqrt{\tilde{a}^2+1} + \tilde{a}^2 - 1}$. $\tilde{a}_1 > 0$ при $\tilde{a} > \tilde{a}_2$, което е равносилно на $\tilde{a} > \frac{1}{\sqrt{3}}$, т. е. само за $\tilde{a} \geqq \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\exists\left[{}^{+\infty}_{\tilde{a}_1}\right]$ така, че $\tilde{a}$, $\tilde{a}_1$ и $\tilde{a}_2$ са елементи на НСМТ $f_{\tilde{a}}$.

Пример. Нека $\tilde{a} = 1$, $f_1 = \dfrac{x-1}{x+1}$, $f_1^{-1} = \dfrac{x+1}{-x+1}$, $\tilde{a}_2 = \sqrt{2} - 1$, $\tilde{a}_1 = \sqrt{2} + 1$, $[\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1] \xrightarrow{f_1} [-(\sqrt{2} - 1), \sqrt{2} - 1]$.

Да рекапитулираме и изследваме изменението на всеки от параметрите на НСМТ като функция поотделно на останалите два.

4.4.1. Дадено е $a = \tilde{a} \geqq \tilde{a}_\infty$. Тогава $0 < \tilde{a}_2 = \sqrt{\tilde{a}^2+1} - \tilde{a} < 1$ и

$$\begin{bmatrix} \infty \\ a_1 = \dfrac{\sqrt{\tilde{a}^2+1}+2\tilde{a}}{\tilde{a}\sqrt{\tilde{a}^2+1}+\tilde{a}^2-1} > 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{a}\begin{bmatrix} = \\ > \end{bmatrix}\tilde{a}_\infty.$$

$\tilde{a}_2$ е с. м. н. ф. на $\tilde{a}$ $\left(\dfrac{d\tilde{a}_2}{d\tilde{a}} = -\dfrac{\tilde{a}_2}{\sqrt{\tilde{a}^2+1}} < 0\right)$, $\tilde{a}_{2\max} = \tilde{a}_2\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\tilde{a}_2 \xrightarrow[\tilde{a}\to+\infty.]{} 0$.

$\tilde{a}_1$ е с. м. н. ф. на $\tilde{a}$ $\left(\dfrac{d\tilde{a}_1}{d\tilde{a}} = -\dfrac{3\tilde{a}_2\sqrt{\tilde{a}^2+1}}{(\tilde{a}-\tilde{a}_2)^2} < 0\right)$, $\tilde{a}_1 \xrightarrow[\tilde{a}\to\tilde{a}_\infty]{} +\infty$, $\tilde{a}_1 \xrightarrow[\tilde{a}\to+\infty]{} 0$.

4.4.2. Дадено е $a_2 = \tilde{a}_2$, $0 < \tilde{a}_2 \leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}} < 1$. Ако положим $\tilde{a}_2 = \operatorname{tg} x$, $x = \operatorname{arc\,tg} a_2$, $\tilde{a}^{(2)} = \dfrac{1-\tilde{a}_2^2}{2\tilde{a}_2} = \operatorname{ctg} 2x = \operatorname{ctg}(2\operatorname{arc\,tg}\tilde{a}_2) > 0$ и

$$\begin{bmatrix} \infty \\ \tilde{a}_1^{(2)} = \dfrac{\tilde{a}_2(3-\tilde{a}_2^2}{1-3\tilde{a}_2^2} = \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}(3\operatorname{arc\,tg}\tilde{a}_2) > 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{a}_2\begin{bmatrix} = \\ < \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} = \tilde{a}_\infty.$$

$\tilde{a}^{(2)}$ е с. м. н. ф. на $\tilde{a}_2$ $\left(\dfrac{d\tilde{a}^{(2)}}{d\tilde{a}_2} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\tilde{a}_2^2+1}{\tilde{a}_2^2} < 0\right)$, $\tilde{a}^{(2)}_{\min} = \tilde{a}^{(2)}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\tilde{a}^{(2)} \to +\infty$, когато $\tilde{a}_2 \to 0$.

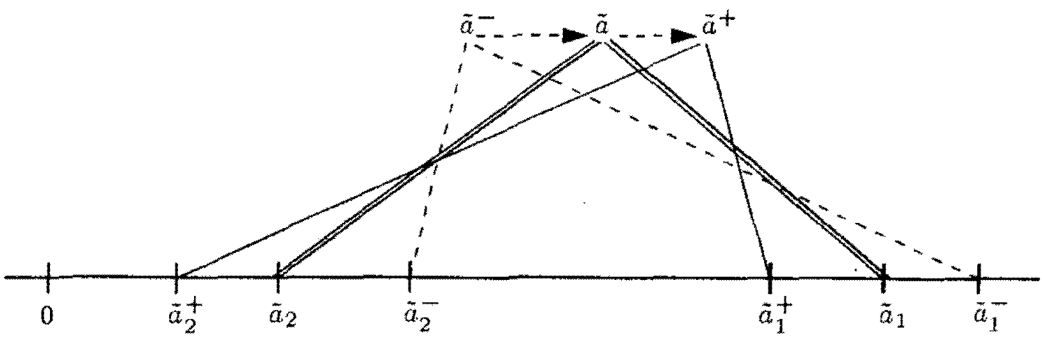
$\tilde{a}_1^{(2)}$ е с. м. р. ф. на $\tilde{a}_2$ $\left(\dfrac{d\tilde{a}_1^{(2)}}{d\tilde{a}_2} = \dfrac{3(\tilde{a}_2^2+1)^2}{(1-3\tilde{a}_2^2)^2} > 0\right)$, $\tilde{a}_1^{(2)} \to +\infty$, когато $\tilde{a}_2 \to \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\tilde{a}_1^{(2)} \to 0$, когато $\tilde{a}_2 \to 0$.

4.4.3. Дадено е $a_1 = \tilde{a}_1 > 0$. Тогава $\tilde{a}^{(1)} = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{2}{3}\operatorname{arc\,tg}\tilde{a}_1\right)$, $\tilde{a}_2^{(1)} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\tilde{a}_1\right)$.

$\tilde{a}^{(1)}$ е с. м. н. ф. на $\tilde{a}_1$ $\left(\dfrac{d\tilde{a}^{(1)}}{d\tilde{a}_1} = -\dfrac{2}{3}\dfrac{(\tilde{a}^{(1)})^2+1}{\tilde{a}_1^2+1} < 0\right)$, $\tilde{a}^{(1)} \to \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, когато $\tilde{a}_1 \to +\infty$; $\tilde{a}^{(1)} \to +\infty$, когато $\tilde{a}_1 \to 0$.

$\tilde{a}_2^{(1)}$ с. м. р. ф. на $\tilde{a}_1$ $\left(\dfrac{d\tilde{a}_2^{(1)}}{d\tilde{a}_1} = \dfrac{(\tilde{a}_2^{(1)})^2+1}{3(\tilde{a}_1^2+1)} > 0\right)$, $\tilde{a}_2^{(1)} \to 0$, когато $\tilde{a}_1 \to 0$; $\tilde{a}_2^{(1)} \to \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, когато $\tilde{a}_1 \to +\infty$.

Графично това може да се представи за $\underset{\left[\begin{smallmatrix}\tilde{a}_2^-\\ \tilde{a}_1^-\end{smallmatrix}\right]}{\tilde{a}^-} < \underset{\left[\begin{smallmatrix}\tilde{a}_2\\ \tilde{a}_1\end{smallmatrix}\right]}{\tilde{a}} < \underset{\left[\begin{smallmatrix}\tilde{a}_2^+\\ \tilde{a}_1^+\end{smallmatrix}\right]}{\tilde{a}^+}$ така:



4.5. Ще разгледаме връзките между a, $\left[{+\infty \atop a_1}\right]$ и a_2, когато f_a СМ $[0,\ \left[{+\infty \atop a_1}\right]]$ до $[0,\ a_2]$, но не е НСМТ.

4.5.1. Дадено е $a > 0$. За кои $\left[{+\infty \atop a_1}\right]$ и a_2 f_a СМ $[0,\ \left[{+\infty \atop a_1}\right]]$ до $[0,\ a_2]$?

Ако $a \geqq \tilde{a}_\infty = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\exists\left[{+\infty \atop \tilde{a}_1}\right]$ и $\exists \tilde{a}_2$, които заедно с a са елементи на НСМТ f_a за $[0,\ \left[{+\infty \atop a_1}\right]]$. Тогава f_a ще СМ всеки интервал $[0,\ \left[{+\infty \atop a_1}\right]]$ до $[0,\ a_2]$, ако $\tilde{a}_2 \leqq a_2 < \left[{+\infty \atop a_1}\right] \leqq \tilde{a}_1$. Това следва от $-\tilde{a}_2 = f_a(\tilde{a}_2) \leqq f_a(a_2) \leqq f_a(x) \leqq f_a\left(\left[{+\infty \atop a_1}\right]\right) \leqq \left[{\tilde{a}_2 \atop f_a(\tilde{a}_1) \leqq \tilde{a}_2}\right]$, т. е. $|f_a(x)| \leqq \tilde{a}_2 < a_2$ за $x \in [a_2,\ a_1]$. Понеже f_a е НСМТ за $[0,\ \left[{+\infty \atop a_1}\right]]$, тя не може да СМ $[0, a_1]$, $\tilde{a}_1 < a_1$, до $[0, a_2]$, $a_2 < \tilde{a}_2$.

Ако $0 < a < \tilde{a}_\infty$, $\tilde{a}_2 > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Тогава f_a СМ $[0,\ a_1]$ до $[0,\ a_2]$, $\tilde{a}_2 \leqq a_2 < a_1$, понеже от $a < \dfrac{1}{\sqrt{3}} < \tilde{a}_2 \leqq a_2 \leqq x \leqq a_1 < +\infty$ следва $-a_2 < -\tilde{a}_2 = f_a(\tilde{a}_2) \leqq f_a(x) < f_a(+\infty) = a < \dfrac{1}{\sqrt{3}} < \tilde{a}_2 \leqq a_2$, т. е. $|f_a(x)| \leqq a_2$ за $x \in [a_2,\ a_1]$.

4.5.2. Дадено е $a_2 > 0$. За кои a и a_1 f_a СМ $[0,\ a_1]$ до $[0,\ a_2]$?

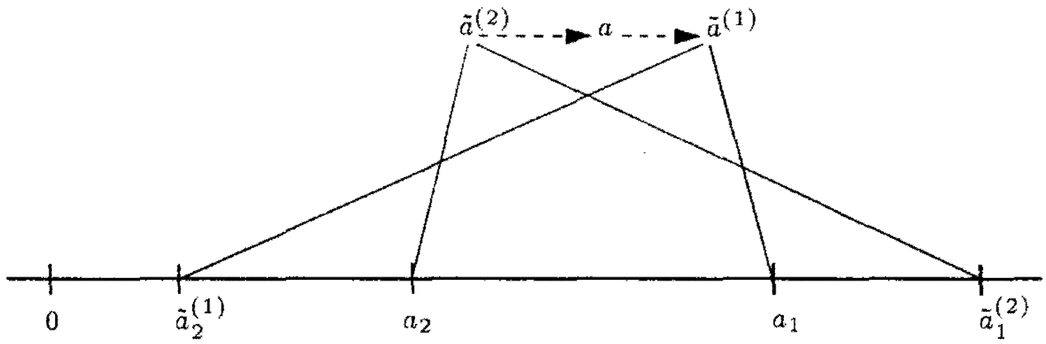
Ако $a_2 \geqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, за всяко $a_1 > a_2$ поне $f_{\tilde{a}_\infty}$ е СМТ, понеже $\tilde{a}_\infty \leqq a_2 < a_1 < +\infty$, а $f_{\tilde{a}_\infty}$ съгласно т. 4.5.1 освен $[0,\ +\infty)$ СМ и $[0,\ a_1]$ до $[0,\ a_2]$. Но има и други a, за които f_a СМ $[0,\ a_1]$ до $[0,\ a_2]$. Ще покажем, че те удовлетворяват неравенствата $\tilde{a}_\infty \leqq a \leqq \tilde{a}^{(1)} = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{2}{3}\operatorname{arc\,tg} a_1\right)$. Наистина от $\tilde{a}_2^{(1)} < \tilde{a}_\infty \leqq a_2 \leqq x \leqq a_1 < +\infty$ и $\dfrac{\partial f_a}{\partial a} > 0$ следва, че $|f_a(x)| \leqq a_2$ за $x \in [a_2,\ a_1]$:

$$-a_2 \leqq -\tilde{a}_\infty = f_{\tilde{a}_\infty}(\tilde{a}_\infty) \leqq f_{\tilde{a}_\infty}(x) \leqq f_a(x) \leqq f_{\tilde{a}^{(1)}}(x) \leqq f_{\tilde{a}^{(1)}}(a_1) = \tilde{a}_2^{(1)} < a_2.$$

Нека отбележим, че при $a_2 \geqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{1-a_2^2}{2a_2} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ и условието $\tilde{a}_\infty < a$ е еквивалентно на $\max\left(\tilde{a}_\infty,\ \dfrac{1-a_2^2}{2a_2}\right) \leqq a$.

Ако $0 < a_2 < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\exists \tilde{a}^{(2)}$ и $\exists \tilde{a}_1^{(2)}$ такива, че $\tilde{a}^{(2)}$, $\tilde{a}_1^{(2)}$ и a_2 са елементи на НСМТ. Тогава за $[0,\, a_1]$, $a_2 < a_1 \leqq \tilde{a}_1^{(2)}$, $f_{\tilde{a}^{(2)}}$ е СМ до $[0,\, a_2]$. Наистина, след като $f_{\tilde{a}^{(2)}}$ е НСМТ за $[0,\, \tilde{a}_1^{(2)}]$ до $[0,\, a_2]$, от $a_2 \leqq x \leqq a_1 \leqq \tilde{a}_1^{(2)}$ следва $-a_2 = f_{\tilde{a}^{(2)}}(a_2) \leqq f_{\tilde{a}^{(2)}}(x) \leqq f_{\tilde{a}^{(2)}}(\tilde{a}_1^{(2)}) = a_2$, т. е. $|f_{\tilde{a}^{(2)}}(x)| \leqq a_2$ за $x \in [a_2,\, a_1]$.

Но ако a_1 и a_2 не са елементи на НСМТ, т. е. $a_2 = \tilde{a}_2^{(1)}$ и $a_1 = \tilde{a}_1^{(2)}$, има и други $a \neq \tilde{a}^{(1)} = \tilde{a}^{(2)}$, за които f_a СМ $[0,\, a_1]$ до $[0,\, a_2]$. Наистина за a, $\dfrac{1-a_2^2}{2a_2} = \tilde{a}^{(2)} \leqq a \leqq \tilde{a}^{(1)} = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{2}{3}\operatorname{arc\,tg} a_1\right)$, $\tilde{a}_2^{(1)} \leqq a_2 \leqq x \leqq a_1 \leqq \tilde{a}_1^{(2)}$ и $\dfrac{\partial f_a}{\partial a} > 0$ получаваме $-a_2 = f_{\tilde{a}^{(2)}}(a_2) \leqq f_{\tilde{a}^{(2)}}(x) \leqq f_a(x) \leqq f_{\tilde{a}^{(1)}}(x) = f_{\tilde{a}^{(1)}}(a_1)$ $= \tilde{a}_2^{(1)} \leqq a_2$, т. е. $|f_a(x)| \leqq a_2$ за $x \in [a_2,\, a_1]$, или графически:



Нека отбележим, че при $0 < a_2 < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\tilde{a}^{(2)} = \dfrac{1-a_2^2}{2a_2} > \tilde{a}_\infty$, т. е. условието $\tilde{a}^{(2)} \leqq a$ е еквивалентно на $\max\left(\tilde{a}_\infty,\, \dfrac{1-a_2^2}{2a_2}\right) \leqq a$.

Като обединим двата случая $a_2 \geqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ и $0 < a_2 < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, получаваме, че f_a СМ $[0,\, a_1]$ до $[0,\, a_2]$, ако $0 < a_2 < a_1 < \tilde{a}_1^{(2)}$ и

$$\max\left(\tilde{a}_\infty,\, \frac{1-a_2^2}{2a_2}\right) \leqq a \leqq \operatorname{ctg}\left(\frac{2}{3}\operatorname{arc\,tg} a_1\right).$$

4.5.3. Дадено е $a_1 > 0$. За кои a и a_2 f_a СМ $[0,\, a_1]$ до $[0,\, a_2]$?

Нека $\tilde{a}_2^{(1)} \leqq a_2 < a_1$. Съгласно т. 4.5.2 f_a СМ $[0,\, a_1]$ до $[0,\, a_2]$, ако $\max(\tilde{a}_\infty,\, \tilde{a}^{(2)}) \leqq a \leqq \tilde{a}^{(1)}$.

4.5.4. Дадени са a_1 и a_2. За кои a f_a СМ $[0,\, a_1]$ до $[0,\, a_2]$?

Ако $\tilde{a}_2^{(1)} \leqq a_2 < a_1 \leqq \left[{+\infty \atop \tilde{a}_1^{(2)}}\right]$ и $0 < a_2 \left[{\geqq \atop <}\right] \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, от т. 4.5.2 и 4.5.3 следва, че f_a СМ $[0,\, a_1]$ до $[0,\, a_2]$, ако a удовлетворява условието от т. 4.5.3.

4.5.5. Дадени са a_1 и a_2, $0 < a_2 < a_1$. Тогава $\exists a^{(1,2)}$, $f_{a^{(1,2)}}(a_1) = a_2$, $\dfrac{a^{(1,2)} a_1^{-1}}{a_1 + a^{(1,2)}} = a_2$, т. е. $a^{(1,2)} = \dfrac{1 + a_1 a_2}{a_1 - a_2}$. Кога $f_{a^{(1,2)}}$ СМ $[0,\, a_1]$ до $[0,\, a_2]$?

Съгласно т. 4.5.1 при $a^{(1,2)} \geqq \tilde{a}_\infty$ $f_{a^{(1,2)}}$ СМ $[0,\ a_1]$ до $[0,\ a_2]$, ако $\tilde{a}_2^{(1)} \leqq a_2 < a_1 \leqq \tilde{a}_1^{(2)}$, и при $0 < a^{(1,2)} < \tilde{a}_\infty$, ако $\tilde{a}_2^{(1,2)} \leqq a_2 < a_1$.

4.6. От гледна точка на икономия на ресурси при програмирането е важно да се изследва кога се получава последователно СМ на един интервал чрез многократно прилагане на една и съща f_a (програмата на няколко различни трансформации, заедно с константите им, е по-дълга от тази на една, използвана в цикъл, най-малко поради елиминиране на масива от параметрите $a_{,i}$ на $f_{a,i}$). Ако $I_{\mathrm{at},f} \geqq \tilde{a}_\infty$, това се извършва еднократно поне с $f_{\tilde{a}_\infty}$.

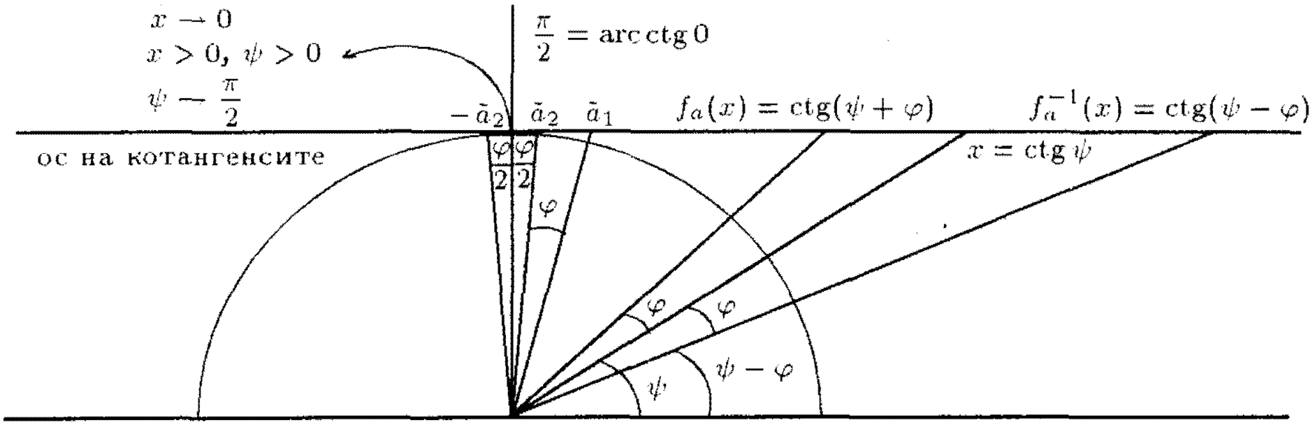
4.6.1. Теорема 6. Чрез многократно прилагане на f_a $[0,\ [^{+\infty}_{a_1}]]$ може да се СМ до $[0;\ I_{\mathrm{at},f}]$, $I_{\mathrm{at},f} < \tilde{a}_\infty$, за такова a, че $\tilde{a}_2 \leqq I_{\mathrm{at},f}$.

Доказателство. f_a не може да СМ $[0,\ \tilde{a}_2]$ до $[0,\ a_2]$, $a_2 < \tilde{a}_2$, понеже от $\dfrac{\partial f_a}{\partial x} > 0$ следва, че $f_a(a_2) < f_a(\tilde{a}_2) = -\tilde{a}_2$, $|f_a(a_2)| > \tilde{a}_2 > a_2$ и следователно няма СМ.

Нека $\tilde{a}_2 \leqq I_{\mathrm{at},f}$, $\sqrt{a^2+1} - a \leqq I_{\mathrm{at},f} < \tilde{a}_\infty$, $a \geqq \dfrac{1 - I^2_{\mathrm{at},f}}{2I_{\mathrm{at},f}} > \tilde{a}_\infty > I_{\mathrm{at},f}$.

След първото прилагане на f_a $[0,\ +\infty)$ се СМ до $[0, a]$, $a > I_{\mathrm{at},f} > \tilde{a}_2$. Ако $\tilde{a}_2 \leqq f_a(a)$, при второто прилагане $[0,\ a]$ се СМ до $[0,\ f_a(a)]$. Наистина от $\tilde{a}_2 \leqq f_a(a) \leqq x \leqq a$ следва, че $-f_a(a) \leqq -\tilde{a}_2 \leqq f_a(\tilde{a}_2) \leqq f_a(x) \leqq f_a(a)$, т. е. $|f_a(x)| \leqq f_a(a)$ и $[0,\ a]$ се СМ до $[0,\ f_a(a)]$. Аналогично, ако $\tilde{a}_2 \leqq f_a(f_a(a))$, при третото прилагане на f_a $[0,\ f_a(a)]$ се СМ до $[0,\ f_a(f_a(a))]$ и т. н. Нека означим $a_{2,k} = a_{1,(k+1)} = f_a(a_{1,k}) = \dfrac{aa_{1,k} - 1}{a_{1,k} + a}$, $k \geqq 1$, $a_{1,1} = +\infty$, $a_{2,1} = a_{1,2} = a$. Ако $a_{2,k} \leqq I_{\mathrm{at},f} < a_{2,(k-1)}$, $k > 1$, след k-кратно прилагане на f_a $[0,\ +\infty)$ се СМ до $[0;\ I_{\mathrm{at},f}]$. Но съществуването на такова k не е очевидно, понеже f_a не е НСМТ за интервалите $[0;\ a_{1,k}]$ с изключение най-много на един, не важат оценките $\dfrac{1}{4}a_{1,k} < a_{2,k} < \dfrac{1}{3}a_{1,k}$ и евентуално би могло $a_{2,k} \to \overline{a}_2 > I_{\mathrm{at},f}$, когато $k \to +\infty$. За да покажем, че това не е възможно, ще използваме тригонометричната интерпретация на f_a.

4.6.2. Нека $a = \operatorname{ctg}\varphi > 0$, $0 < \varphi = \operatorname{arcctg} a < \dfrac{\pi}{2}$, $x = \operatorname{ctg}\psi$, $0 < \psi = \operatorname{arcctg} x < \dfrac{\pi}{2}$. Тогава $f_a(x) = \dfrac{\operatorname{ctg}\varphi \operatorname{ctg}\psi - 1}{\operatorname{ctg}\psi + \operatorname{ctg}\varphi} = \operatorname{ctg}(\psi + \varphi)$, аналогично $f_a^{-1}(x) = \operatorname{ctg}(\psi - \varphi)$. Оттук индуктивно се получава $f_{a,n}(+\infty) = \underbrace{f_a(\ldots(f_a}_{n \text{ пъти}}(+\infty))\ldots) = f_{a,(n-1)}(a) = \operatorname{ctg} n\varphi$ и $f^{-1}_{a,n}(x) = \underbrace{f_a^{-1}(\ldots(f_a^{-1}}_{n \text{ пъти}}(x))\ldots) = \operatorname{ctg}(\psi - n\varphi)$. Също така $\tilde{a}_2 = \sqrt{a^2+1} - a = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\varphi}{2}\right) = \operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}$ и $\tilde{a}_1 = f_a^{-1}(\tilde{a}_2) = \operatorname{ctg}\left(\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\varphi}{2}\right) - \varphi\right) = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3\varphi}{2}\right) = \operatorname{tg}\dfrac{3\varphi}{2}$, или графически:



От тригонометричната интерпретация на $f_a(x)$ могат да се изведат всичките ѝ свойства, както и резултатите, получени дотук.

Сега ще покажем, че търсеното k съществува. То се определя от уравнението $f_{a,k}(+\infty) = \operatorname{ctg} k\varphi = I_{\mathrm{at},f} > 0$, $0 < k\varphi < \dfrac{\pi}{2}$, $k = \dfrac{\operatorname{arcctg} I_{\mathrm{at},f}}{\operatorname{arcctg} a} > 1$, понеже $I_{\mathrm{at},f} < a$. И така след k-кратно прилагане на f_a $+\infty$ се трансформира в $I_{\mathrm{at},f}$, $[0,\ +\infty)$ се СМ до $[0;\ I_{\mathrm{at},f}]$, с което теорема 6 е доказана.

4.6.3. Практически интерес представляват f_a, които се „изчерпват“ след двукратно прилагане при СМ на $[0,\ +\infty)$. За да има СМ на $[0,\ +\infty)$ до $[0,\ a]$ при първото прилагане на f_a, необходимо е $a \geqq \tilde{a}_\infty$. За да има максимално СМ на $[0,\ a]$ до $[0,\ \tilde{a}_2]$ при второто прилагане на f_a, трябва $a^* \leqq \tilde{a}_2$, т. е. $f_a(a) = \dfrac{a^2-1}{2a} \leqq \sqrt{a^2+1} - a$, $0 \leqq 3a^2 - 1 \leqq 2a\sqrt{a^2+1}$, $5a^4 - 10a^2 + 1 \leqq 0$. Това е изпълнено за $\sqrt{1 - \dfrac{2}{\sqrt{5}}} \leqq a \leqq \sqrt{1 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}}$, но $\sqrt{1 - \dfrac{2}{\sqrt{5}}} < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, остава окончателно $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leqq a \leqq \sqrt{1 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}} \lessapprox 1{,}376\ldots$ Понеже $\tilde{a}_2$ е с. м. н. ф. на a, при двукратно прилагане на f_a ще има максимално СМ на $[0,\ +\infty)$ за $\tilde{a}_{2\min} = \tilde{a}_2\Big|_{a=\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}} = \sqrt{2 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}} - \sqrt{1 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}}$ $\approx 0{,}326$. И така f_a, $a = \sqrt{1 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}}$, СМ $[0,\ +\infty)$ до $[0;\ 0{,}326]$, което е максимално за двукратно прилагане на една и съща f_a.

4.6.4. Многократното използване на една и съща f_a скъсява програмата за сметка на бързодействие. Например за $I_{\mathrm{at},f} = 0,1$, $a > 4,95$, нека $a = 5$. Тогава f_5 трябва да се приложи до 8 пъти, за да се СМ $[0,\ +\infty)$ до $[0;\ 0,1]$. Ако се приложат различни трансформации, например НСМТ, достатъчни са само три: $[0,\ +\infty) \xrightarrow{f_{\tilde{a}_\infty}} [0,\ \tilde{a}_\infty] \xrightarrow{f_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{9}}} \left[0,\ \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{18}\right]$, $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{9} \approx \dfrac{1}{28}$,

$\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{18}\approx 0{,}173$, и накрая трета и последна f_a, $a > 4{,}95$, която СМ $[0;\ 0{,}173]$ до $[0;\ 0{,}1]$ например f_5. С намаляването на $I_{\mathrm{at},f}$ от гледна точка на бързодействие става все по–изгодно използването на серия от НСМТ.

4.7. Ще покажем как практически се прилага Т-методът при $\operatorname{arc\,tg} x$ за СМ на $[0,\ +\infty)$ до $[0;\ I_{\mathrm{at},f}]$.

Ако $I_{\mathrm{at},f} \geqq \tilde{a}_\infty$, достатъчна е само една трансформация, например $f_{\tilde{a}_\infty}$, за СМ на $[0,\ +\infty)$ до $[0,\ \tilde{a}_\infty] \subseteq [0;\ I_{\mathrm{at},f}]$. В частност, ако $I_{\mathrm{at},f} > \tilde{a}_\infty$, $f_{I_{\mathrm{at},f}}$ СМ $[0,\ +\infty)$ до $[0;\ I_{\mathrm{at},f}]$ или, ако се избере a, $\tilde{a}_\infty < a < I_{\mathrm{at},f}$, f_a СМ $[0,\ +\infty)$ до $[0,\ a] \subset [0;\ I_{\mathrm{at},f}]$.

Нека $I_{\mathrm{at},f} < \tilde{a}_\infty$. Да разгледаме системата I^{at}, определена от $I_f = \tilde{a}_{2,f}$, $I_s = \tilde{a}^{(2)}_{1,s+1} = \tilde{a}_{2,s} = f^{-1}_{\tilde{a}^{(2)}_{(s+1)}}(I_{s+1}) = \operatorname{tg}(3\operatorname{arc\,tg}\tilde{a}_{2,(s+1)} = \operatorname{tg}(3^{f-s}\operatorname{arc\,tg} I_f)$, т. е. $[0,\ I_s]$ се СМ до $[0,\ I_{s+1}]$ чрез НСМТ, $s = \overline{f-1,\ 1}$. f се определя като НМЦЧ, за което $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \leqq I_1 = \operatorname{tg}(3^{f-1}\operatorname{arc\,tg} I_f)$, $f = \left]\dfrac{\ln(\pi/6\operatorname{arc\,tg} I_f)}{\ln 3}\right[+1$.

Остава да се разгледа първоначалното СМ на $[0, +\infty)$ до $[0, a] \subseteq [0, I_1]$ чрез f_a. $f_{\tilde{a}_\infty}$ СМ $[0,\ +\infty)$ до $[0,\ \tilde{a}_\infty] \subset [0,\ I_1]$. f_{I_1} го СМ до $[0,\ I_1]$. И в двата случая $\mathrm{tr}^{\max} = f$. $(I_1,\ +\infty)$ се трансформира чрез f_a в $(I_1^*,\ a)$. В някои случаи $-a \leqq I_1^* = f_a(I_1)$ например за $a \geqq \sqrt{I_1^2+1} - I_1 = \tilde{a}_2$ на f_{I_1}. Ако $\sqrt{I_1^2+1} - I_1 \leqq a \leqq I_k$, $2 \leqq k \leqq f-1$, тогава за точките от $[I_1, +\infty)$ ще са необходими не повече трансформации, отколкото за тези от $[0, I_{k-1}]$, и тогава $\mathrm{tr}^{\max} = f-1$. Това е възможно, ако $\sqrt{I_1^2+1} - I_1 \leqq I_k$, $\dfrac{1-I_k^2}{2I_k} \leqq I_1$. Понеже $I_k = \tilde{a}_{2,k}$, $I_{k-1} = \tilde{a}_{1,k}$, $\dfrac{1-I_k^2}{2I_k} = \dfrac{1-\tilde{a}^2_{2,k}}{2\tilde{a}_{2,k}} = \tilde{a}^{(2)}_{,k} = \tilde{a}^{(1)}_{,k} = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{2}{3}\operatorname{arc\,tg}\tilde{a}_{1,k}\right)$.
Следователно неравенството е еквивалентно на

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{2}{3}\operatorname{arc\,tg} I_{k-1}\right) \leqq I_1,\ \text{т. е.}\ \operatorname{ctg}(2.3^{f-k}\operatorname{arc\,tg} I_f) \leqq \operatorname{tg}(3^{f-1}\operatorname{arc\,tg} I_f),$$

$$\frac{\pi}{2} - 2.3^{f-k}\operatorname{arc\,tg} I_f \leqq 3^{f-1}\operatorname{arc\,tg} I_f, \qquad \frac{\pi}{2} - 3^{f-1}\operatorname{arc\,tg} I_f \leqq 2.3^{f-k}\operatorname{arc\,tg} I_f,$$

откъдето $k = f - \left]\dfrac{\ln\left(\dfrac{\pi}{4\operatorname{arc\,tg} I_f} - \dfrac{3^{f-1}}{2}\right)}{\ln 3}\right[$.

Ако $I_1 = \tilde{a}_\infty$, т. е. $I_{\mathrm{at},f} = f_{\tilde{a},f}(f_{\tilde{a},(f-1)}(\ldots(f_{\tilde{a}_\infty}(+\infty))\ldots))$, всичките трансформации са различни и НСМТ. Ако бъдат избрани други трансформации, общият им брой ще се увеличи поне с единица.

На практика $I_1 > a_\infty$, т. е.

$$f_{\tilde{a},f}(\ldots(f_{\tilde{a}_\infty}(+\infty))\ldots) < I_{\mathrm{at},f} < f_{\tilde{a},(f-1)}(\ldots(f_{\tilde{a}_\infty}(+\infty))\ldots).$$

Ако $\tilde{a}_{,s}$ или $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{\tilde{a}_{,s}}$ трябва да са къси, НСМТ трябва да се заменят с близки до тях, без да се нарушат неравенствата за $I_{\mathrm{at},f}$. В този случай трябва да се използват резултатите от т. 4.4 ÷ 4.6. Колкото $I_{\mathrm{at},f}$ е по-близо до $f_{\tilde{a},(f-1)}(\ldots(f_{\tilde{a}_\infty}(+\infty))\ldots)$, толкова възможността за изменение на трансформациите без увеличаване на броя им е по-голяма.

Ако серията трансформации е само от НСМТ, интервалите $[\tilde{a}_{2,s};\,\tilde{a}_{1,s}]$, съответни на $f_{\tilde{a}_{,s}}$, съвпадат с тези от системата I^{at} и по същия начин са долепени (конкатенирани) един за друг. Ако поне една от трансформациите не е НСМТ, ще има поне едно припокриване на интервали, съответни на $f_{\tilde{a}_{,s}}$, което е без значение, ако никъде няма разстояние между интервалите на две последователни трансформации.

СМ на $[0,+\infty)$ до $[0;\,I_{\mathrm{at},f}]$, $I_{\mathrm{at},f}$ — съответно на $p=m=10$, е разгледано подробно в [1] на базата на получените дотук резултати.

4.8. При променливо m (f расте с m, а $I_{\mathrm{at},f}$ намалява) трябва да се съхраняват четири масива от константите $\tilde{a}_{,s}$, $\tilde{a}_{,s}^2+1$ (може да се пресмятат с $1\times$ и $1+$), $\tilde{a}_{2,s}$ и $\operatorname{arc\,tg}\tilde{a}_{,s}^{-1}$ с дължина на мантисата $m_{\max}$, всеки с дължина $f_{m_{\max}}$, като се използват НСМТ или близки до тях. $|x|\leqq 1$ се намалява от 3^s до 4^s пъти след s трансформации.

5. $\boldsymbol{y=\begin{bmatrix}\sin\\ \cos\end{bmatrix}x_1}$, $x_1\in B_{\left[\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\right],1}=\left[-\dfrac{\pi}{2},\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Известно е [3], че $\sin(2n+1)x=(-1)^nT_{2n+1}(\sin x)$, $\cos nx=T_n(\cos x)$ и $\sin 2nx$ не може да се изрази рационално чрез $\sin x$.

$T_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^i2^{n-2i-1}\dfrac{n}{n-i}\dbinom{n-i}{i}x^{n-2i}$ са полиномите на Чебишев от I-и род (от ИА е по-добре $\dfrac{n}{n-i}\dbinom{n-i}{i}=\dfrac{n}{i}\dbinom{n-1-i}{i-1}$, но трябва да се приеме, че $\dfrac{n}{0}\dbinom{n-1}{-1}=1$ за $i=0$). Тогава $\cos(2n+1)x=T_{2n+1}(\cos x)$,

$$T_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i2^{2(n-i)}\frac{2n+1}{2n+1-i}\binom{2n+1-i}{i}x^{2(n-i)+1}=xP_n^*(x^2),$$

където $P_n^*(x)=\dfrac{T_{2n+1}(\sqrt{x})}{x}=\sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^i2^{2(n-i)}\dfrac{2n+1}{2n+1-i}\dbinom{2n+1-i}{i}x^{n-i}$.

$$\begin{bmatrix}\sin\\ \cos\end{bmatrix}(2n+1)x=\begin{bmatrix}(-1)^n\\ 1\end{bmatrix}T_{2n+1}\left(\begin{bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}(-1)^n\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}P_n^*\left(\begin{bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}^2\right),$$

т. е. СМ на $\left[0,\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ е практически еднакво за $\sin x$ и $\cos x$.

$$\cos 2nx=T_{2n}(\cos x)=P_n^{**}(\cos^2 x),$$

където $T_{2n}(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^i2^{2(n-i)-1}\dfrac{2n}{2n-i}\dbinom{2n-i}{i}x^{2(n-i)}=P_n^{**}(x^2)$, а $P_n^{**}(x) = T_{2n}(\sqrt{x}) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i 2^{2(n-i)-1}\dfrac{2n}{2n-i}\binom{2n-i}{i}x^{n-i}$.

И така при $\sin x$ $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ трябва да се намалява нечетен брой пъти, докато при $\cos x$ няма такова ограничение.

От $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$ лесно се получава

$$T_n(x) = 2(2x^2-1)T_{n-2}(x) - T_{n-4}(x).$$

Тогава $\quad T_{2n+1}(\cos x) = 2(2\cos^2 x - 1)T_{2n-1}(\cos x) - T_{2n-3}(\cos x)$,

т. е. $\quad \cos(2n+1)x = 2(2\cos^2 x - 1)\cos(2n-1)x - \cos(2n-3)x$.

Можем да получим следната, както и съответната ѝ за $\sin(2n+1)x$, рекурентна зависимост и от представянето на $\left[\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\right](2n+1)x + \left[\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\right](2n-3)x$ като произведение:

$$x_n = Ax_{n-1} - x_{n-2},\ n \geqq 1,\ x_{-1} = \begin{bmatrix}\sin(-1)x\\ \cos(-1)x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\sin x\\ \cos x\end{bmatrix},\ x_0 = \begin{bmatrix}\sin(1)x\\ \cos(1)x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{bmatrix},$$

$$A(x) = 2(2x^2-1), \quad A = \begin{bmatrix}-A(\sin x)\\ A(\cos x)\end{bmatrix}, \quad x_n = \begin{bmatrix}\sin\\ \cos\end{bmatrix}(2n+1)x,$$

или $x_n = \left[\begin{smallmatrix}\sin x\\ \cos x\end{smallmatrix}\right]$, като x в x_{-1}, x_0 и A е заменено с $\dfrac{x}{2n+1}$.

Аналогично $T_{2n}(\cos x) = 2(2\cos^2 x - 1)T_{2n-2}(\cos x) - T_{2n-4}(\cos x)$. $x_n = \cos 2nx$ при начални условия $x_{-1} = \cos(-2)x = \dfrac{A(\cos x)}{2}$, $x_0 = \cos 0x = 1$, или $x_n = \cos x$, като x в x_{-1}, x_0 и A е заменено с $\dfrac{x}{2n}$.

За пресмятането на $A\left(\left[\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\right](2n+1)x\right)$ се изискват еднократно $1:$, $1\times$ и $3+$, а за всяка итерация — по $1\times$ и $1+$. За $x_n = \left[\begin{smallmatrix}\sin x\\ \cos x\end{smallmatrix}\right]$ са необходими n итерации, които заедно с A изискват $1:$, $(n+1)_\times$ и $(n+3)_+$, докато за пресмятането им чрез $P_n^*(x)$ се изискват $1:$, $2\times$, $(n+1)_+$ и $n_\times$ къси, заедно със съхраняването на $n+1$ къси коефициента на $P_n^*(x)$. И така рекурентното пресмятане на $\left[\begin{smallmatrix}\sin x\\ \cos x\end{smallmatrix}\right]$ чрез $\left[\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\right]\dfrac{x}{2n+1}$ е по-бавно от това чрез $P_n^*(x)$ по Хорнер, но липсата на константи е голямо преимущество при променливо m, при което x се дели на $2n+1$, $n = n(m)$. В този случай трябва да се пазят коефициентите на $n+1$ полинома $P_s^*(x)$, $s = \overline{0, n(m_{\max})}$, или за всяко x, зададено с m цифри, да се изчисляват рекурентно коефициентите на $P_n^*(x)$, където n съответства на това m. Дори при достатъчно голямо фиксирано m и съответно също голямо n има смисъл $\left[\begin{smallmatrix}\sin x\\ \cos x\end{smallmatrix}\right]$ да се пресмятат рекурентно, особено при $p = 2$, когато $t_\times \gtrapprox t_+$ и понятията късо число и късо умножение са без значение.

Пример. При $p = m = 10$ $I_{\left[\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\right],f} \lessapprox \dfrac{\pi}{6}$, $f = 2$, $B_{\left[\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\right],f} = B_{\left[\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\right],2} = \left[-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right]$, $x_2 = \dfrac{1}{3}x_1$, $\left[\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\right]x_1 = \left[\begin{smallmatrix}-\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\right]x_2[4\left[\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\right]^2 x_2 - 3]$, ($3\times$, $1+$ и 1×4 късо). При $\sin x$

не може да се избере $B_{\sin,f} = \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right]$, понеже $\sin x$ не се изразява рационално чрез $\sin\frac{x}{4}$. При $\cos x$ x може да се намали 4 пъти, като $\cos x = 8\cos^2 0{,}25x(\cos^2 0{,}25x - 1) + 1$ ($2\times$, $2+$ и $2\times$ къси). При това $B_{\cos,f} = \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right]$ за $p = 10$ и $m = 11$.

6. $\boldsymbol{y = \arcsin x_1}$, $x_1 \in D_{\arcsin} = B_{\arcsin,1} = [-1, 1]$.

Понеже $\arcsin x$ е нечетна, $B_{\arcsin,s} = B_{\mathrm{as},s}$ са симетрични относно нулата и е достатъчно да се покаже как $[0,1]$ се СМ до $[0; I_{\mathrm{as},f}]$.

С-методът е неприложим при $\arcsin x$.

Ще приложим Т-метода за СМ на $[0,1]$. Нека разгледаме формулата $\arcsin x + \arcsin x = 2\arcsin x = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}), |x| \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Нека извършим субституцията $X = 2x\sqrt{1-x^2}$. От $|x| \leqq \frac{1}{2}$ следва $|X| \leqq 1$. Намираме $x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1-X^2}}{2}$, но $x^2 \leqq \frac{1}{2}$ по условие, а $\frac{1+\sqrt{1-X^2}}{2} \geqq \frac{1}{2}$, следователно $x^2 = \frac{1-\sqrt{1-X^2}}{2} = \frac{X^2}{2(1+\sqrt{1-X^2})} \leqq \frac{1}{2}$. Ако сега разменим страните на равенството и заменим X с x, получаваме друга събирателна формула, която ще използваме по-нататък:

$$\arcsin x = (\operatorname{sgn} x) 2 \arcsin \frac{|x|}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-x^2})}},$$

$$|x| \leqq 1, \quad \frac{1}{2}|x| \leqq \frac{|x|}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-x^2})}} \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}|x|$$

(равенството отляво се достига за $x = 0$, а отдясно — за $|x| = 1$).

Редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \geqq 0$, зададена рекурентно с $0 \leqq x_1 \leqq 1$ и $x_{n+1} = \frac{x_n}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-x_n^2})}}$, $n \geqq 1$, се мажорира от нулевата редица с общ член $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} \to 0$ при $n \to +\infty$, понеже $x_1 \leqq 1$, $x_2 = \frac{x_1}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-x_1^2})}} \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$, а от допускането, че $x_n \leqq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$, аналогично следва, че и $x_{n+1} \leqq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n}$. Следователно и $x_n \to 0$. Ако $|x_1| \leqq 1$,

$$\arcsin x_1 = (\operatorname{sgn} x_1) 2 \arcsin x_2 = \cdots = (\operatorname{sgn} x_1) 2^n \arcsin x_{n+1}.$$

Окончателно $\arcsin x_1 = (\operatorname{sgn} x_1) 2^n \arcsin x_{n+1}$ за $|x_1| \leqq 1$, $x_n \geqq 0$, $n \geqq 1$, $x_{n+1}^2 = \dfrac{x_n^2}{2(1+\sqrt{1-x_n^2})}$ ($1_{\surd}$, $1_{:}$, 1_{+} и $1_{\times}$ късо).

От ИА е по-добре вместо x_{n+1} да се получава от x_n и да се проверява дали $x_{n+1} \leqq I_{\text{as},f}$, x_{n+1}^2, да се получава от x_n^2 и да се проверява дали $x_{n+1}^2 \leqq I_{\text{as},f}^2$. Това пести по $1_{\surd}$ $\left(x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{x_n^2}{\sqrt{\cdots}}}\right)$ и $1\times (x_n^2$ в $\sqrt{1-x_n^2})$ на всяка итерация, като само накрая $x_{n+1} = \sqrt{x_{n+1}^2}$. Или, понеже $x_{n+1} = 0,5(\sqrt{1+x_n} - \sqrt{1-x_n})$, ($2_{\surd}$, 3_{+} и $1\times$ късо), извършват се $1_{\surd}$ и 2_{+} срещу $1:$ на всяка итерация.

Сходимостта на $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ намалява с $|x_1| \to 1$, като е най-бавна за $I_1 = |x_1| = 1$. Тогава $I_2 = x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$, $I_3 = x_3 \approx 0,366$, $I_4 = x_4 \approx 0,186$, $I_5 = x_5 \approx 0,009$, $I_6 = x_6 \approx 0,047$, $I_7 = x_7 \approx 0,023$, $I_8 = x_8 \approx 0,012$, $I_9 = x_9 \approx 0,006$ и т. н. При $p = m = 10$ $I_{\text{as},f} = 0,1$, $f = 5$ и $\text{tr}^{\max} = 4$. В най-лошия случай коефициентът на намаляване k_1 на $x_1 = 1$ е $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, а при x_s, $s \geqq 2$ — приблизително $\dfrac{1}{2}$, т. е. при s итерации k_s на x_1 е $k_s \lessapprox \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{s-1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2^s}$. Това води до по-бавна сходимост, отколкото при $\operatorname{arctg} x$, където $k_s > \dfrac{1}{3^s}$.

За намиране на точния брой итерации при $|x| \leqq 1$ може да се използва обратната рекурентна формула $x_n^2 = 4x_{n+1}^2(1 - x_{n+1}^2)$. Ако $x_{n+1} = x_f = I_{\text{as},f}$, при $p = m = 10$ получаваме $x_{f-1} \approx 0{,}2$, т. е. за $x_{f-1} \in (0{,}1;\ 0{,}2]$ е необходима само една итерация. Чрез двукратно прилагане на формулата получаваме $x_{f-2} \approx 0{,}392$, т. е. за $x_{f-2} \in [0{,}2;\ 0{,}392]$ са необходими две итерации и т. н.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шишков, Д., К. Янев. Пресмятане на елементарни функции чрез верижни дроби. В: Сб. „Математика и математическо образование“. *Доклади на IV пролетна конференция на БМД*, С., БАН, 1978, 375–397.
2. Шишков, Д. Рекурентно пресмятане на целочислено-псевдоадитивни функции. В: Сб. „Математика и математическо образование“. Доклади на X пролетна конференция на СМБ, С., БАН, 1981, 317–320.
3. Люстерник, Л. А., О. А. Червоненкис, А. Р. Янпольский. Математический анализ. Функции, пределы, ряды, цепные дроби. М., Физматгиз, 1961.

Постъпила на 20.09.1992