ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 1 — Математика
Том 87, 1993

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 1 — Mathématiques
Tome 87, 1993

ВЪРХУ ДВЕ ИНТЕРВАЛНО-АРИТМЕТИЧНИ СТРУКТУРИ И ТЕХНИТЕ СВОЙСТВА[1]

СВЕТОСЛАВ МАРКОВ

Светослав Марков. О ДВУХ ИНТЕРВАЛЬНО-АРИФМЕТИЧЕСКИХ СТРУКТУР И ИХ СВОЙСТВ

Рассматриваются две интервально-арифметические структуры, которые являются расширениями интервальной арифметики для нормальных интервалов, использующей только обычных (внешных) операциях в двух направлений: а) введением специальных (нестандартных) операций; б) расширением множества нормальных интервалов до совокупности направленных интервалов введением несобственных интервалов. Рассмотрены новые свойства интервальных структур. Означения унифицированны используя новую „плюс-минус“-технику для индексации переменных, которая позволяет легко сравнивать и систематизировать обе структуры. Введена новая нормальная форма представлениях направленных интервалов, и благодаря ей можно свести свойств направленных интервалов к свойствам нормальных интервалов используя внешных и внутренных операциях. Доказаны утверждения, позволяющие вычислять области значений функции при помощи интервально-арифметических выражений.

Svetoslav Markov. ON TWO INTERVAL-ARITHMETIC STRUCTURES AND THEIR PROPERTIES

Two interval-arithmetic structures are considered, which are extensions of the interval arithmetic for normal intervals using only familiar (outer) operations in two directions: i) via additional introduction of special inner (non-standard) operations; ii) via extension of the set of normal intervals up to the set of directed (generalized) intervals by improper intervals. New properties of the interval structures are considered. The notations are unified by introducing new (±)-type indeces for the interval variables for an easy comparison and systematization of both structures. The

[1] Работата е частично финансирана от Министерство на образованието и науката — Национален фонд научни изследвания, договор № ММ-10/91.

so-called normal form for the representation of directed intervals is introduced, which alows to reformulate propositions for directed intervals into corresponding propositions for normal intervals, using inner and outer operations. Some propositions supporting the computation of functional ranges via interval arithmetic expressions are formulated.

1. УВОД

Настоящата работа е посветена на систематизирано представяне и изследване на две разширения (обобщения) на интервалната аритметика: а) разширението със специални вътрешни (нестандартни) интервални операции [16, 18] и б) разширението с несобствени интервали [10, 11]. Тези две интервални системи са представяни досега независимо, като са използувани разнообразни подходи и означения. Основният принос в настоящата работа е методологически: показано е, че двете разширения могат да се разглеждат в тясно взаимодействие от единна гледна точка и с единни означения и че разширението с несобствени интервали води до необходимост от използуване на вътрешни интервални операции. Практическата стойност на този начин на изложение е както в по-голямата обозримост и простота при използуването на двете системи, така и във възможността за едновременното им програмно реализиране [27] и съответно използуване посредством числени алгоритми.

Интервалната аритметика е в основата на голям брой числени алгоритми с верификация на резултатите, включително алгоритми, които работят с интервални входни данни. Най-важното приложение на интервалната аритметика (и нейните разширения) е в пресмятането на обхвати (области от стойности) на функции [22, 23, 25, 32] и във възможността за автоматизиране на това пресмятане [2, 3, 28]. Друго приложение (на по-абстрактно ниво) интервално-аритметичните структури намират в анализа на интервално-значни функции [17, 19, 33, 35–39].

Нека $C(T)$ е множеството от непрекъснатите реално-значни функции, дефинирани в интервала $T = [t^{(-)}, t^{(+)}]$. За $f \in C(T)$ множеството $f(T) = \{f(t) \mid t \in T\}$ наричаме обхват (множество от стойности) на f върху T. За $f \in C(T)$ множеството $f(T)$ е интервал. Важна задача е пресмятането на обхват на рационална функция. Една помощна задача е следната: ако са дадени обхватите $f(T)$, $g(T)$ на две функции $f, g \in C(T)$, да се представят обхватите на функциите $f + g$, $f - g$, fg, f/g върху T чрез дадените обхвати. Интервалната аритметика дава полезно помощно средство за практическото решаване на тази задача особено в съчетание с техниката на автоматично диференциране, при което изследването за монотонност на функциите се автоматизира.

В интервалната аритметика често се използуват множества от два елемента (двойки) и двоични променливи, които могат да имат различен смисъл. Например (затворен) интервал е наредена двойка, знак на интервал е двоична променлива и т. н. Подобни двойки и двоични променливи възникват при разширените интервални системи, например външна и вътрешна интервална операция, положителна и отрицателна посока на насочен интервал и др. под. В настоящата работа се въвеждат и системно използуват единни означения за използуваните в интервалната аритметика двоични обекти, за които се показва, че са тясно взаимосвързани, въпреки че привидно са твърде различни по своята природа. Тъй като една често срещана двоична променлива е променливата „знак на интервал", която е обобщение на знака на реално число, и тъй като за стойностите на тази променлива са възприети означенията плюс (+) и минус (−), възприемаме тези означения и за стойностите на всички използувани от нас двоични променливи. Благодарение на така въведените единни означения става възможно да се покаже, че разширената (с вътрешни операции) интервална аритметика е необходим помощен апарат при работа с насочени интервали. Този апарат дава възможност за интерпретиране на резултати, отнасящи се за насочени интервали, в термините на нормални интервали. Показано е също така как твърдения за насочени интервали се преформулират в съответни твърдения за нормални интервали посредством вътрешни и външни интервални операции.

Използуваните в работата символи „+", „−" могат да имат различен смисъл в зависимост от свързаните с тях математически обекти, което личи от контекста и от мястото на тези символи (напр. горен или долен индекс на числова променлива, на символ за операция или релация). Ето някои от използуваните двойки обекти и двоични променливи:

- знак на числова или интервална променлива (плюс/минус);
- край на нормален интервал (десен/ляв);
- компонента на насочен интервал (втора/първа);
- посока на насочен интервал (положителна/отрицателна);
- интервална операция (външна/вътрешна);
- наличност на оператор за спрягане (неспрегнат/спрегнат интервал);
- посока на релация включване (се съдържа в/съдържа);
- числова аритметична операция (събиране/изваждане) и др. под.

В т. 2 се въвежда накратко обикновената интервална аритметика за нормални (собствени) интервали. Това въвеждане става с помощта на споменатата „плюс-минус"-техника на означения, което дава основа за сравняване и унифициране на въведените разширения. В т. 3 се разширява множеството от интервални операции чрез въвеждането на специални вътрешни (нестандартни) операции. В т. 4 се въвеждат несобствени интервали и множеството от нормални (собствени) интервали се разширява до множеството на насочените интервали (собствени и несобствени). Т. 5 е посветена на представянето на насочените интервали в т. нар. нормален запис (състоящ се от двойката обикновен интервал и знак). В т. 6 е демонстрирана техника за преформулиране на твърдения за насочени интервали в твърдения за обикновени интервали; за илюстрация са получени твърдения от разширената интервална аритметика, въведена в т. 3. В т. 7 се формулират твърдения, които позволяват интерпретирането и използуването на разгледаните две интервални системи за пресмятане на области от стойности на функции.

В настоящата работа е поставено ударение върху интервално-аритметичните операции, когато краищата (компонентите) на интервалите са реални числа. Не се разглеждат комплексният случай, компютърно-аритметични операции и свързаните с тях закръглявания, необходими за програмна реализация. Теоретичната основа на тези разглеждания е въвеждането на релации на частична наредба и допълването на частично-наредените интервални пространства с безкрайни елементи (срв. [12–14, 21]). За известна пълнота са дадени само дефинициите на основните релации на частична наредба и някои техни свойства. Този материал няма съществено значение за основните връзки между представените интервално-аритметични системи и читателят може да го пропусне (вж. формули (1), (16), (17), (25)–(27) и свойства **S6**, **M6**, $\tilde{\mathbf{M}}\mathbf{6}$, **K5***ii*), *iii*), **K6**). Но трябва да отбележим, че освен за компютърните закръглявания интервалните релации имат значение за намирането на включвания (вътрешни и външни) на области от стойности на функции. Това е илюстрирано в края на работата (вж. твърдение 9).

2. ОБИКНОВЕНА ИНТЕРВАЛНА АРИТМЕТИКА В „ПЛЮС-МИНУС"-ОЗНАЧЕНИЯ

Ще припомним добре известната интервална аритметика за компактни интервали върху реалната права R, като при това ще въведем нов тип означения, които ще наричаме $(\pm)$-означения.

За дадени $a, b \in R, a \leq b$, нормален (собствен) интервал $[a, b]$ се дефинира като компактно подмножество на реалната права R посредством $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$. Числата $a, b \in R$ наричаме ляв, съответно десен край на $[a, b]$. Множеството $\{[a, b] \mid a, b \in R, a \leq b\}$ от всички интервали означаваме с $I(R)$. Елементите на $I(R)$ ще означаваме с главни букви. Левият край на $A \in I(R)$ означаваме с $A^{(-)}$, а десния край — с $A^{(+)}$, така че $A = [A^{(-)}, A^{(+)}]$. За краищата $A^{(-)}$, $A^{(+)}$ на интервала A ще използваме и означенията $a^{(-)}$, съответно $a^{(+)}$, тъй като означенията на краищата с малки букви са навлезли трайно в литературата по интервален анализ (но за съжаление се отклоняват от обичайния начин на въвеждане на означения с функционален характер). Така $a^{(s)}$ (или $A^{(s)}$), с $s \in \Lambda = \{+, -\}$ означава ляв или десен край на $A \in I(R)$ в зависимост от стойността на s. По-нататък двоичната променлива s често ще се изразява като произведение на две (или повече) двоични променливи, което дефинираме посредством $++ = -- = +$, $+- = -+ = -$. Да отбележим, че това произведение е асоциативно в Λ, т. е. за $p, q, r \in \Lambda$ имаме $(pq)r = p(qr) = pqr$.

Интервал $A = [a^{(-)}, a^{(+)}]$ с $a^{(-)} = a^{(+)}$ се нарича изроден. За изродения интервал $[a, a]$ ще пишем и просто a, напр. $[0, 0] = 0$, $[1, 1] = 1$ и т. н.

Нека $A = [a^{(-)}, a^{(+)}]$, $B = [b^{(-)}, b^{(+)}] \in I(R)$. Релацията включване в $I(R)$ има познатия теоретико-множествен смисъл. В термините на краищата включването се изразява посредством (по-нататък символите „$\wedge$“, „$\vee$“ означават „и“, съответно „или“)

$$(1) \qquad A \subseteq B \iff (b^{(-)} \leq a^{(-)}) \wedge (a^{(+)} \leq b^{(+)}), \qquad A, B \in I(R).$$

Да означим множеството от интервали, съдържащи нула, със $Z = \{A \in I(R) \mid 0 \in A\} = \{A \mid a^{(-)} \leq 0 \leq a^{(+)}\}$, а множеството от интервали, за които нула е вътрешна точка, със $Z^* = \{A \in I(R) \mid a^{(-)} < 0 < a^{(+)}\}$. Множеството от интервали, които не съдържат нула, е $I(R) \setminus Z = \{A \in I(R) \mid 0 \notin A\}$; множеството от интервалите, които не съдържат нула като вътрешна точка, означаваме $I(R)^* = I(R) \setminus Z^*$. Множеството $I(R)^*$ се състои от подмножествата $I(R) \setminus Z$, $\{0\}$, $\{[-a, 0], [0, a] \mid a > 0\}$. Функционалът $\sigma : I(R)^* \to \Lambda$ се дефинира за $A \in I(R)^* \setminus \{0\}$ със $\sigma(A) = \{+,\ \text{ако } a^{(-)} \geq 0;\ -,\ \text{ако } a^{(+)} \leq 0\}$, а за аргумент нула — със $\sigma([0, 0]) = \sigma(0) = +$; ще го наричаме знак на $A \in I(R)^*$. Знак на интервал не се дефинира за интервал от Z^*, т. е. за интервал, съдържащ едновременно и отрицателни, и положителни числа. В частност знак на изроден интервал е познатият знак на число, $\sigma([a, a]) = \mathrm{sgn}(a)$, с уговорката, че знакът на числото нула се приема за положителен. С това функционалът σ е добре дефиниран върху $I(R)^*$ и в частност върху R.

Забележка. В някои работи функционалът σ се дефинира за всички ненулеви интервали посредством $\sigma(A) = \sigma(a^{(-)} + a^{(-)})$; в тази работа няма да използуваме това разширение.

Операциите $+, -, \times, /$ се дефинират за нормални интервали посредством

$$(2) \qquad A * B = \{a * b \mid a \in A, b \in B\},\ * \in \{+, -, \times, /\},\ A, B \in I(R),$$

като в случая на „$* = /$“ се предполага, че $B \in I(R) \setminus Z$ (вж. [1, 24, 41], вж. също [37–39]). Формула (2) не е удобна за софтуерна реализация. Използувайки $(\pm)$-означения, можем да запишем интервално-аритметичните операции посредством краищата на операндите $A = [a^{(-)}, a^{(+)}]$, $B = [b^{(-)}, b^{(+)}]$. За трите операции събиране, умножение и инверсия (реципрочен интервал) имаме съответно:

$$(3) \quad A + B = [a^{(-)} + b^{(-)}, a^{(+)} + b^{(+)}], \quad A, B \in I(R),$$

$$(4) \quad A \times B = \begin{cases} [a^{(-\sigma(B))} b^{(-\sigma(A))}, a^{(\sigma(B))} b^{(\sigma(A))}], & A, B \in I(R)^*, \\ [a^{(\delta)} b^{(-\delta)}, a^{(\delta)} b^{(\delta)}], \quad \delta = \sigma(A), & A \in I(R)^*,\ B \in Z^*, \\ [a^{(-\delta)} b^{(\delta)}, a^{(\delta)} b^{(\delta)}], \quad \delta = \sigma(B), & A \in Z^*,\ B \in I(R)^*, \end{cases}$$

$$(5) \quad A \times B = [\min\{a^{(-)} b^{(+)}, a^{(+)} b^{(-)}\}, \max\{a^{(-)} b^{(-)}, a^{(+)} b^{(+)}\}], \quad A, B \in Z^*,$$

$$(6) \quad 1/B = [1/b^{(+)}, 1/b^{(-)}], \quad B \in I(R) \setminus Z.$$

Дефиницията на умножение е дадена с две отделно номерирани формули за по-лесно цитиране. В подробен запис формула (4) има вида

$$A \times B = [a^{(-)}, a^{(+)}] \times [b^{(-)}, b^{(+)}] = \begin{cases} [a^{(-)}b^{(-)}, a^{(+)}b^{(+)}], & A \geq 0, \quad B \geq 0, \\ [a^{(+)}b^{(-)}, a^{(-)}b^{(+)}], & A \geq 0, \quad B \leq 0, \\ [a^{(-)}b^{(+)}, a^{(+)}b^{(-)}], & A \leq 0, \quad B \geq 0, \\ [a^{(+)}b^{(+)}, a^{(-)}b^{(-)}], & A \leq 0, \quad B \leq 0, \\ [a^{(+)}b^{(-)}, a^{(+)}b^{(+)}], & A \geq 0, \quad B \in Z^*, \\ [a^{(-)}b^{(+)}, a^{(-)}b^{(-)}], & A \leq 0, \quad B \in Z^*, \\ [a^{(-)}b^{(+)}, a^{(+)}b^{(+)}], & A \in Z^*, \quad B \geq 0, \\ [a^{(+)}b^{(-)}, a^{(-)}b^{(-)}], & A \in Z^*, \quad B \leq 0. \end{cases}$$

В частния случай, когато A е изроден от вида $A = [a, a] = a \in R$, формула (4) дава $A \times B = a \times B = [ab^{(-\sigma(a))}, ab^{(\sigma(a))}] = \{[ab^{(-)}, ab^{(+)}]$, ако $a \geq 0$; $[ab^{(+)}, ab^{(-)}]$, ако $a < 0\}$. при умножение с число понякога ще изпускаме знака $\times$, пишейки aB вместо $a \times B$. За $a = -1$ имаме $(-1)B = -B = [-b^{(+)}, -b^{(-)}]$. Операторът $-B$ се нарича отрицание на B и се означава още с $\mathrm{neg}(B)$ (от *negation*). Дефинираните с (2) операции изваждане $A - B$ и деление A/B могат да се представят като съставни операции чрез $A - B = A + (-B)$, $A/B = A \times (1/B)$. Изразени с краищата на операндите, те имат вида

$$(7) \quad A - B = [a^{(-)} - b^{(+)}, a^{(+)} - b^{(-)}], \; A, B \in I(R),$$

$$(8) \quad A/B = \begin{cases} [a^{(-\sigma(B))}/b^{(\sigma(A))}, a^{(\sigma(B))}/b^{(-\sigma(A))}], & A \in I(R)^*, \; B \in I(R) \setminus Z, \\ [a^{(-\delta)}/b^{(-\delta)}, a^{(\delta)}/b^{(-\delta)}], \quad \delta = \sigma(B), & A \in Z^*, \; B \in I(R) \setminus Z. \end{cases}$$

Подробно записано, делението има вида

$$A/B = [a^{(-)}, a^{(+)}]/[b^{(-)}, b^{(+)}] = \begin{cases} [a^{(-)}/b^{(+)}, a^{(+)}/b^{(-)}], & A \geq 0, \quad B > 0, \\ [a^{(+)}/b^{(+)}, a^{(-)}/b^{(-)}], & A \geq 0, \quad B < 0, \\ [a^{(-)}/b^{(-)}, a^{(+)}/b^{(+)}], & A \leq 0, \quad B > 0, \\ [a^{(+)}/b^{(-)}, a^{(-)}/b^{(+)}], & A \leq 0, \quad B < 0, \\ [a^{(-)}/b^{(-)}, a^{(+)}/b^{(-)}], & A \in Z^*, \quad B > 0, \\ [a^{(+)}/b^{(+)}, a^{(-)}/b^{(+)}], & A \in Z^*, \quad B < 0. \end{cases}$$

Тъй като изваждането е съставна операция, можем да не го включваме в списъка на основните операции на така получената алгебрична система $\mathcal{S} = (I(R), +, \times, /, \subseteq)$. Операциите $+, -, \times, /$, дефинирани с (2), респ. с (3), (7), (4)-(5), (8), ще наричаме обикновени или външни интервални операции или $\mathcal{S}$-операции, а системата $\mathcal{S}$ ще наричаме обикновена или външна интервална аритметика (използуването на наименованието „външен“ е мотивирано по-нататък). Свойствата на $\mathcal{S} = (I(R), +, \times, /, \subseteq)$ са добре изучени [1, 24, 29–34, 41]. Ще припомним някои от тях. Ако не е казано нещо друго, A, B, C, ... означават елементи на $I(R)$.

S1. $A + B = B + A, \qquad A \times B = B \times A.$

S2. $(A+B)+C = A+(B+C)$, $\quad (A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.

S3. $X = [0,0] = 0$ и $Y = [1,1] = 1$ са единствени неутрални елементи относно събиране, респ. умножение, т. е.

$$A = X + A \text{ за всяко } A \in I(R) \iff X = [0,0];$$
$$A = Y \times A \text{ за всяко } A \in I(R) \iff Y = [1,1].$$

S4. Никой елемент $A \in I(R)$ с $A^{(-)} \neq A^{(+)}$ не притежава обратен по отношение на операцията $+$ и никой елемент $A \in I(R) \setminus Z$ с $A^{(-)} \neq A^{(+)}$ няма обратен по отношение на $\times$. Елементите $-A$ и $1/A$ (които могат да бъдат заподозрени за обратни, но не са) удовлетворяват включванията

$$0 \in A + (-A) = A - A, \text{ респ. } 1 \in A \times (1/A) = A/A.$$

Тези включвания преминават в равенства само за дегенерирани интервали. Уравнението $A + X = B$ не винаги има единствено решение; то има единствено решение при $b^{(-)} - a^{(-)} \leq a^{(+)} - b^{(+)}$ и в този случай то е $X = [b^{(-)} - a^{(-)}, a^{(+)} - b^{(+)}]$. При $b^{(-)} - a^{(-)} > a^{(+)} - b^{(+)}$ уравнението няма решение. По аналогичен начин стои въпросът с решението на уравнението $A \times X = B$; то съществува и е единствено при определено условие за краищата на интервалите A и B.

В сила са следните закони за съкращаване:
а) за $A, B, C \in I(R)$, $A + C = B + C \Longrightarrow A = B$;
б) за $A, B \in I(R)$, $C \in I(R)^* \setminus \{0\}$, $A \times C = B \times C \Longrightarrow A = B$.

Закон за съкращаване при умножение има и в случая $A, B, C \in Z^*$.

S5. Имаме $(A+B) \times C \subseteq (A \times C) + (B \times C)$ (субдистрибутивен закон [30]). Равенство (дистрибутивност) е налице *в някои частни случаи*, измежду които ще отбележим следните:

$$\begin{aligned} c(A+B) &= cA + cB, \ c \in R, \\ (A+B) \times C &= (A \times C) + (B \times C), \end{aligned}$$

ако $A, B, C, A+B \in I(R) \setminus Z$, $\sigma(A) = \sigma(B)$.

S6. Имаме $X \subseteq X_1 \Longrightarrow X * C \subseteq X_1 * C$ за $* \in \{+, -, \times, /\}$. Като следствие се получава

$$X \subseteq X_1\ ,\ Y \subseteq Y_1 \Longrightarrow X * Y \subseteq X_1 * Y_1.$$

Съединение (или свързано обединение) $[A \bigvee B]$ на два интервала A, B се дефинира посредством

$$[A \bigvee B] = [\min\{A^{(-)}, B^{(-)}\}, \max\{A^{(+)}, B^{(+)}\}].$$

В частния случай, когато интервалите A, B са изродени, т. е. $A = a$, $B = b$, $a, b \in R$, съединението $[A \bigvee B] = [a \bigvee b]$ е удобно за представяне на интервал, на който краищата a, b са известни, но евентуално не е известно кой от краищата е ляв и кой десен (такава ситуация възниква, когато краищата са стойности на функции, които не са известни предварително или още не са пресметнати).

Алгебричните системи $(I(R), +)$, $(I(R)^*, \times)$, $(I(R) \setminus Z, +, \times, /)$ имат редица несъвършенства, които ги правят непривлекателни за приложенията. Съгласно **S1—S4** $(I(R), +)$ и $(I(R)^*, \times)$ са комутативни полугрупи, но не са групи, тъй като не съществуват обратни елементи по отношение на операциите $+$, съответно $\times$ (вж. напр. [15, гл. 2]). Решенията на уравненията $A + X = B$, съответно $A \times X = B$, когато съществуват, не могат да бъдат изразени чрез интервалните операции (2). В $(I(R) \setminus Z, +, \times, /)$ операцията $1/B$ не може да бъде определена чрез $+$ и $\times$ (напр. не може да се твърди, че е обратна на умножението). В $(I(R)^*, +, \times)$ няма дистрибутивен закон в общия случай и въобще между операциите събиране и умножение в множеството от обикновените интервали има твърде слаба поносимост. Външните интервални операции са неприложими за получаване на вътрешни включвания (вж. т. 8, твърдение 9).

Известни са два пътя за преодоляване на споменатите недостатъци на обикновената интервална аритметика: а) чрез разширяване на множеството от операции в $I(R)$, и б) чрез разширяване на самото множество $I(R)$ и додефиниране на аритметичните операции в новото множество. Разширяването на множеството от операциите посредством специални вътрешни (нестандартни) интервални операции $+^-, \times^-$ води до интервално-аритметичната структура $\mathcal{M} = (I(R), +, +^-, \times, \times^-, \subseteq)$ [16–21]. При това разширяване носителят на пространството остава непроменен — това е множеството от нормалните интервали. Алтернативно чрез разширяване на множеството $I(R)$ от нормалните интервали до множеството D от насочените (обобщените) интервали и чрез подходящо разширяване на дефинициите на интервално-аритметичните операции от $I(R)$ до D получаваме интервалното пространство $\mathcal{K} = (D, +, \times)$, в което операциите $+, \times$ имат групови свойства [7–11, 21, 26]. Това разширяване е съществено по-силно от първото, защото при него се засяга носителят на пространството, а именно от нормални интервали се преминава към насочени. По-нататък ще разгледаме последователно тези две разширени интервални системи. Въвеждането на двете системи може да се направи независимо една от друга. Действително, читателят може да прочете следващите т. 3 и 4 в произволен ред. В т. 5, която използва резултати от предишните две точки, са дадени връзки между двете интервални системи $\mathcal{M}$ и $\mathcal{K}$, получени чрез едно ново т. нар. нормално представяне на насочените интервали.

3. РАЗШИРЕНА ИНТЕРВАЛНА АРИТМЕТИКА

В интервалната аритметика $\mathcal{S}$ въвеждаме специални вътрешни (или нестандартни) операции. Така полученото разширение ще наричаме разширена интервална аритметика.

Да дефинираме функционалите $\omega : I(R) \to R^+ = [0, \infty)$, $\chi : I(R)^* \setminus \{0\} \to [0, 1]$ посредством

$$\begin{aligned} \omega(A) &= a^{(+)} - a^{(-)}, \\ \chi(A) &= a^{(-\sigma(A))}/a^{(\sigma(A))} = \begin{cases} a^{(-)}/a^{(+)}, & \sigma(A) = +, \\ a^{(+)}/a^{(-)}, & \sigma(A) = -, \end{cases} \end{aligned}$$

както и $\phi : I(R) \bigotimes I(R) \to \Lambda$, $\psi : (I(R)^* \setminus \{0\}) \bigotimes (I(R)^* \setminus \{0\}) \to \Lambda$ посредством

$$\begin{aligned} \phi(A, B) &= \sigma(\omega(A) - \omega(B)) = \begin{cases} +, & \omega(A) \geq \omega(B), \\ -, & \omega(A) \geq \omega(B); \end{cases} \\ \psi(A, B) &= \sigma(\chi(A) - \chi(B)) = \begin{cases} +, & \chi(A) \geq \chi(B), \\ -, & \chi(A) \geq \chi(B). \end{cases} \end{aligned}$$

С помощта на така въведените функционали дефинираме в $I(R)$ операциите $+^-, \times^-$ посредством

$$A +^- B = [a^{(-\phi)} + b^{(\phi)}, a^{(\phi)} + b^{(-\phi)}], \quad \phi = \phi(A, B), \quad A, B \in I(R), \tag{9}$$

$$A \times^- B = \begin{cases} [a^{(\sigma(B)\psi)} b^{(-\sigma(A)\psi)}, a^{(-\sigma(B)\psi)} b^{(\sigma(A)\psi)}], & \psi = \psi(A, B), \\ & A, B \in I(R)^*, \\ [a^{(-\delta)} b^{(-\delta)}, a^{(-\delta)} b^{(\delta)}], \quad \delta = \sigma(A), & A \in I(R)^*,\ B \in Z^*, \\ [a^{(-\delta)} b^{(-\delta)}, a^{(\delta)} b^{(-\delta)}], \quad \delta = \sigma(B), & A \in Z^*,\ B \in I(R)^* \\ [0, 0], \ A, B \in Z^*. \end{cases} \tag{10}$$

Забележки. В предишни работи [16–22] за случая $A, B \in Z^*$ резултатът от операцията $A \times^- B$ е дефиниран като $[\max\{a^{(-)}b^{(+)}, a^{(+)}b^{(-)}\}, \min\{a^{(-)}b^{(-)}, a^{(+)}b^{(+)}\}]$. При това полагане обаче твърдение 9 не е вярно за $A, B \in Z^*$. Във формула (10) в случая $A, B \in I(R)^*$ (първия ред) може да възникне неяснота, когато някой от интервалите A, B е нулев (поради това, че функционалите χ, съответно ψ, не са дефинирани за нулеви интервали). В тези случаи резултатът е нула, тъй като краищата са нули. Понякога е удобно функционалът χ да се додефинира в $Z^* \setminus \{0\}$, като в дефиниционната му формула $\sigma(A)$ се замени с $\sigma(a^{(-)} + a^{(+)})$. По този начин функционалът χ се дефинира за всеки интервал от $I(R) \setminus \{0\}$, т. е. χ остава дефиниран само за нулевия интервал $[0, 0] = 0$. В тази работа няма да се налага да използуваме такова разширение на дефиниционната област на χ. Читателят ще забележи дуалност между резултатите, отнасящи се до събиране, съответно умножение, при която функционалите ω и χ са съответни един на друг. В тези резултати има малка несиметрия, която може да се премахне, ако функционалът ω се дефинира като $\omega = a^{(-)} - a^{(+)}$, което обаче не е прието в литературата по интервален анализ.

Твърдение 1. *Изразите в десните страни на* (9), (10) *са интервали от* $I(R)$, *т. е. първите им компоненти не надминават съответните втори компоненти и действително са леви, съответно десни краища на интервали.*

Доказателство. Това е очевидно за изразите, в които не участват ϕ и ψ. Остава да покажем, че в изразите за $+^-$, $\times^-$, дефинирани със:

$$(11)\qquad A +^- B = [a^{(-\gamma)} + b^{(\gamma)}, a^{(\gamma)} + b^{(-\gamma)}],\ A, B \in I(R),$$
$$(12)\qquad A \times^- B = [a^{(\varepsilon\sigma(B))} b^{(-\varepsilon\sigma(A))}, a^{(-\varepsilon\sigma(B))} b^{(\varepsilon\sigma(A))}],\ A, B \in I(R)^*,$$

двоичните променливи $\gamma, \varepsilon \in \Lambda$ могат да се изберат по такъв начин, че десните страни да са елементи на $I(R)$, т. е. $a^{(-\gamma)} + b^{(\gamma)} \leq a^{(\gamma)} + b^{(-\gamma)}$, $a^{(\varepsilon\sigma(B))} b^{(-\varepsilon\sigma(A))} \leq a^{(-\varepsilon\sigma(B))} b^{(\varepsilon\sigma(A))}$. От тези условия ще изразим γ, ε посредством ϕ и ψ. Като използуваме, че за $A, B \in I(R) \setminus Z$ неравенствата $\chi(A) \geq \chi(B)$ и $a^{(\sigma(B))} b^{(-\sigma(A))} \leq a^{(-\sigma(B))} b^{(\sigma(A))}$ са еквивалентни (!), получаваме, че γ, ε в (11)—(12) се представят с $\gamma = \phi(A, B)$, $\varepsilon = \psi(A, B)$, както това се изисква в (9), (10). □

Ако редът на краищата не ни е нужен, можем да използуваме представяне с помощта на съединение. Тогава формули (11), (12) добиват вида

$$A +^- B = [(a^{(-)} + b^{(+)}) \vee (a^{(+)} + b^{(-)})],\ A, B \in I(R),$$
$$A \times^- B = [(a^{(\sigma(B))} b^{(-\sigma(A))}) \vee (a^{(-\sigma(B))} b^{(\sigma(A))})],\ A, B \in I(R)^*.$$

Интервално-аритметичната структура $\mathcal{M} = (I(R), +, +^-, \times, \times^-, \subseteq)$ е разширение на интервалната аритметика $\mathcal{S} = (I(R), +, \times, /, \subseteq)$; ще я наричаме разширена интервална аритметика [16–22]. Да отбележим, че $A +^- (-A) = 0$, $A \times^- (1/A) = 1$, което означава, че $-A = [-a^{(+)}, -a^{(-)}]$ и $1/A = [1/a^{(+)}, 1/a^{(-)}]$ са обратни елементи съответно относно операциите $+^-$ и $\times^-$. Ще припомним, че операторът $1/A$ не може да се определи с помощта на основните интервално-аритметични операции „$+$" и „$\times$" и следователно трябва да се разглежда като основен в $\mathcal{S}$, но същият оператор $1/A$ не е основен в $\mathcal{M}$, тъй като $1/A$ може да се определи като обратния на A по отношение на основната операция $\times^-$. Алгебричната структура $\mathcal{M}$, дефинирана посредством (3)–(5), (9)–(10), позволява въвеждане на операции, определени чрез основните аритметичните операции $+, +^-, \times, \times^-$ и чрез обратните елементи $-A$ и $1/A$ по отношение на операциите $+^-$ и $\times^-$. Такива са съставните операции $A - B = A + (-B)$ и $A/B = A \times (1/B)$, дефинирани посредством (7), съответно (8). Можем да дефинираме и съставните операции $A -^- B = A +^- (-B)$ и $A /^- B = A \times^- (1/B)$, които се изразяват чрез краищата на операндите посредством

$$(13)\quad A -^- B = [a^{(-\phi)} - b^{(-\phi)}, a^{(\phi)} - b^{(\phi)}],\qquad \phi = \phi(A, B),\ A, B \in I(R),$$

$$(14)\quad A /^- B = \begin{cases} [a^{(\sigma(B)\psi)}/b^{(\sigma(A)\psi)}, a^{(-\sigma(B)\psi)}/b^{(-\sigma(A)\psi)}], & \psi = \psi(A, B), \\ & A \in i(R)^*,\ B \in I(R) \setminus Z, \\ [a^{(-\delta)}/b^{(\delta)}, a^{(\delta)}/b^{(\delta)}], & \delta = \sigma(B),\quad A \in Z^*,\ B \in I(R) \setminus Z. \end{cases}$$

Като използуваме операцията „съединение", можем да запишем изразите, в които участват променливите ϕ и ψ, в следната по-обозрима форма:

$$A -^- B = [(a^{(-)} - b^{(-)}) \vee (a^{(+)} - b^{(+)})],\quad A, B \in I(R),$$
$$A /^- B = [(a^{(\sigma(B))}/b^{(\sigma(A))}) \vee (a^{(-\sigma(B))}/b^{(-\sigma(A))})],\quad A, B \in I(R) \setminus Z.$$

Четирите основни операции (3)–(5), (9), (10) заедно с четирите съставни операции (7), (8), (13), (14) дават осем интервално-аритметични операции в $\mathcal{M}$, които ще наричаме $\mathcal{M}$-операции. Четири от тези $\mathcal{M}$-операции са $\mathcal{S}$-операциите $+, -, \times, /$, които наричаме още външни интервални операции. Останалите четири операции $+^-, \times^-, -^-, /^-$, дефинирани съответно с (9), (10), (13), (14), ще наричаме вътрешни (това наименование се използува напр. в [40], друго използувано наименование е „специални" [2] или „нестандартни" [21]. Ще припомним, че $\mathcal{S}$-операцията „$/$" може да се определи чрез операцията „$\times$" и оператора „обратен елемент" $1/A$ относно „$\times^-$" (аналогично на случая с изваждането „$-$"). Това ни позволява да записваме алгебричната структура $\mathcal{M}$ във вида $(I(R), +, +^-, \times, \times^-, \subseteq)$, при който $\mathcal{S}$-изваждането и $\mathcal{S}$-делението се изключват от списъка на основните операции на $\mathcal{M}$.

В някои случаи е възможна следната нагледна интерпретация на операциите в разширената интервална аритметика. Нека „$*$" е коя да е от четирите числови операции $* \in \{+, -, \times, /\}$ и $A = [a^{(-)}, a^{(+)}]$, $B = [b^{(-)}, b^{(+)}] \in I(R)$. Като извършим числовата операция „$*$" между край на единия интервал и край на другия интервал, получаваме четирите реални числа $a^{(-)} * b^{(-)}, a^{(-)} * b^{(+)}, a^{(+)} * b^{(-)}, a^{(+)} * b^{(+)}$. Да предположим, че тези числа са две по две различни помежду си. Да ги подредим по големина, означавайки ги с c_1, c_2, c_3, c_4, където $c_1 < c_2 < c_3 < c_4$. Тогава външният интервал $[c_1, c_4]$ е резултатът от съответната външна интервална операция върху интервалите A, B, т. е. $A * B = [c_1, c_4]$, а вътрешният интервал $[c_2, c_3]$ е резултатът от съответната вътрешна интервална операция, т. е. $A *^- B = [c_2, c_3]$. Изключение от това правило е случаят на умножение на два интервала, които едновременно съдържат нула във вътрешността си; в този случай вътрешното произведение съгласно (10) е нулев интервал.

На двете $\mathcal{M}$-операции за събиране може да се гледа като на една „двумодусна" операция $+^\theta$ с параметър $\theta \in \Lambda$, който определя типа (модуса) на операцията (външен/вътрешен) по формулата

$$A +^\theta B = [(a^{(-)} + b^{(-\theta)}) \bigvee (a^{(+)} + b^{(\theta)})], \ A, B \in I(R).$$

Аналогично на двете $\mathcal{M}$-операции за умножение може да се гледа като на една операция $\times^\theta$ с параметър $\theta \in \Lambda$, която за $A, B \in I(R) \setminus Z$ може да се запише във вида

$$A \times^\theta B = [(a^{(-\sigma(B))} b^{(-\theta\sigma(A))}) \bigvee (a^{(\sigma(B))} b^{(\theta\sigma(A))})], \ A, B \in I(R)^*.$$

При тези означения можем да записваме системата $\mathcal{M}$ още във вида $\mathcal{M} = (I(R), +^\theta, \times^\theta, \subseteq)$.

Забележка. Възможно е в $\mathcal{M}$ да се вземе друг набор от основни операции, например $+, -^-, \times$ и $/^-$. В този случай операциите $+^-, \times^-$, които приехме за основни, ще се определят чрез избраните за основни операции $+, -^-, \times, /^-$ посредством $A +^- B = A -^- (-B)$, $A \times^- B = A /^- (1/B)$. В [16–20] взетите за основни операции $-^-$ и $/^-$ се означават съответно с „$-$" и „$/$", а производните операции $+^-, -, \times^-$ и $/$ се означават съответно с $\oplus, \ominus, \otimes$ и $\oslash$. Един недостатък на този подход е, че означенията „$-$“ и „$/$“ съответно за $\mathcal{S}$-изваждането и $\mathcal{S}$-делението са широко възприети в литературата по интервален анализ и има опасност от объркване.

Съгласно дефинираното в началото на т. 2 произведение на двоични символи имаме $+^{++} = +^{--} = +^{+} = +$, $+^{+-} = +^{-+} = +^{-}$, $\times^{++} = \times^{--} = \times^{+} = \times$, $\times^{+-} = \times^{-+} = \times^{-}$. За $A \in I(R)^*$ ще означаваме $|A| = \sigma(A)A = \{A,$ ако $\sigma(A) = +; -A,$ ако $\sigma(A) = -\}$.

Освен релациите **S1**—**S6** в $\mathcal{M}$ в сила са следващите закони **M1**—**M7**. Непосредствената проверка на тези закони е елементарна, макар и в някои от случаите доста трудоемка. В т. 6 даваме просто извеждане на някои от формулираните по-долу твърдения.

M1. За $A, B \in I(R)$ имаме $A +^{-} B = B +^{-} A$, $A \times^{-} B = B \times^{-} A$.

M2 (условно асоциативен закон за „$+^{\theta}$“). За $A, B, C \in I(R)$ имаме

$$\begin{aligned}
(A + B) +^{-} C &= A +^{\phi(B,C)} (B +^{-} C);\\
(A +^{-} B) + C &= \begin{cases} A +^{-\phi(B,C)} (B +^{-} C), & \omega(A) \geq \omega(B),\\ A +^{-} (B + C), & \omega(A) < \omega(B);\end{cases}\\
(A +^{-} B) +^{-} C &= \begin{cases} A +^{-\phi(B,C)} (B +^{-} C), & \omega(A) < \omega(B),\\ A +^{-} (B + C), & \omega(A) \geq \omega(B).\end{cases}
\end{aligned}$$

Условно асоциативен закон за „$\times^{\theta}$“. За $A, B, C \in I(R) \setminus Z$ имаме

$$\begin{aligned}
(A \times B) \times^{-} C &= A \times^{-\psi(B,C)} (B \times C);\\
(A \times^{-} B) \times C &= \begin{cases} A \times^{-\psi(B,C)} (B \times^{-} C), & \chi(A) \leq \chi(B),\\ A \times^{-} (B \times C), & \chi(A) > \chi(B);\end{cases}\\
(A \times^{-} B) \times^{-} C &= \begin{cases} A \times^{-\psi(B,C)} (B \times^{-} C), & \chi(A) > \chi(B),\\ A \times^{-} (B \times C), & \chi(A) \leq \chi(B).\end{cases}
\end{aligned}$$

M3. $X = [0, 0] = 0$ и $Y = [1, 1] = 1$ са единствени неутрални елементи относно вътрешните $\mathcal{M}$-операции за събиране и умножение, т. е.
$A = X +^{-} A$ за всяко $A \in I(R) \iff X = [0, 0]$,
$A = Y \times^{-} A$ за всяко $A \in I(R) \iff Y = [1, 1]$.

M4. Всеки елемент $A \in I(R)$ има единствен обратен относно $+^{-}$ и всеки елемент $A \in I(R) \setminus Z$ има единствен обратен относно $\times^{-}$. Това са елементите $-A$, съответно $1/A$, т. е. $0 = A +^{-} (-A) = A -^{-} A$ и $1 = A \times^{-} (1/A) = A /^{-} A$. За $\lambda \in \Lambda$ уравнението $A +^{\lambda} X = B$ има единствено решение при $\omega(A) \leq \omega(B)$, то е $X = B -^{(-\lambda)} A$. При $\omega(A) > \omega(B)$ единствено решение не е налице — може да има две решения или нито едно. По-точно при $\omega(A) > \omega(B)$ уравнението $A + X = B$ няма решение, а уравнението $A +^{-} X = B$ има две решения: $X = B - A$ и $X = B -^{-} A$.

Аналогично уравнението $A \times^{\lambda} X = B$ при $A, B \in I(R) \setminus Z$, $\lambda \in \Lambda$, има единствено решение при $\chi(A) \geq \chi(B)$, то е $X = B/^{-\lambda}A$. При $\chi(A) < \chi(B)$ единствено решение не е налице – може да има две решение или нито едно. По-точно при $\chi(A) < \chi(B)$ уравнението $A \times X = B$ няма решение, а уравнението $A \times^{-} X = B$ има две решения: $X = B/A$ и $X = B/^{-}A$.

В сила е условен закон за съкращаване, който за вътрешното събиране гласи:

$$A +^{-} C = A +^{-} D, \quad \omega(C) \leq \omega(A), \quad \omega(D) \leq \omega(A) \Longrightarrow C = D,$$

където $\leq$ може да се замени с $\geq$. В общия случай при липса на допълнително условие от типа $\omega(C) \leq \omega(A)$, $\omega(D) \leq \omega(A)$ закон за съкращаване не е в сила, тъй като при произволно $B \in I(R)$ интервалите $C = B - A$, $D = B -^{-} A$ удовлетворяват $A +^{-} C = A +^{-} D$ и при това $\omega(C) > \omega(A)$, $\omega(D) < \omega(A)$ при $A \neq 0$.

M5 (**условно-дистрибутивен закон**). За $A, B, C, A + B \in I(R) \setminus Z$ имаме следните равенства:

$$(A + B) \times C = \begin{cases} (A \times C) + (B \times C), \ \sigma(A) = \sigma(B); \\ (A \times C) +^{\psi(C,B)} (B \times^{-} C), \\ \qquad \qquad \sigma(A) = -\sigma(B) = \sigma(A + B), \\ (A \times^{-} C) +^{\psi(C,A)} (B \times C), \\ \qquad \qquad \sigma(A) = -\sigma(B) = -\sigma(A + B); \end{cases}$$

$$(A + B) \times^{-} C = \begin{cases} (A \times^{-} C) +^{\psi(A,C)\psi(B,C)} (B \times^{-} C), \ \sigma(A) = \sigma(B); \\ (A \times^{-} C) +^{\psi(C,A)} (B \times C), \\ \qquad \qquad \sigma(A) = -\sigma(B) = \sigma(A + B), \\ (A \times C) +^{\psi(C,B)} (B \times^{-} C), \\ \qquad \qquad \sigma(A) = -\sigma(B) = -\sigma(A + B); \end{cases}$$

$$(A +^{-} B) \times C = \begin{cases} (A \times C) +^{-\psi(C,B)} (B \times^{-} C), \ \sigma(A) = \sigma(B), \\ \qquad \qquad \omega(A) \geq \omega(B), \\ (A \times^{-} C) +^{\psi(C,A)} (B \times C), \ \sigma(A) = \sigma(B), \\ \qquad \qquad \omega(A) < \omega(B), \\ (A \times C) +^{-} (B \times C), \ \sigma(A) = -\sigma(B), \\ \qquad \qquad \xi(A, B) \geq 0, \\ (A \times^{-} C) +^{\psi(C,A)\psi(C,B)} (B \times^{-} C), \ \sigma(A) = -\sigma(B), \\ \qquad \qquad \xi(A, B) < 0; \end{cases}$$

$$(A +^- B) \times^- C = \begin{cases} (A \times^- C) +^{-\psi(C,A)} (B \times C), \ \sigma(A) = \sigma(B), \\ \qquad \omega(A) \geq \omega(B), \\ (A \times C) +^{\psi(C,B)} (B \times^- C), \ \sigma(A) = \sigma(B), \\ \qquad \omega(A) < \omega(B), \\ (A \times^- C) +^{-\psi(C,A)\psi(C,B)} (B \times^- C), \ \sigma(A) = -\sigma(B), \\ \qquad \xi(A,B) \geq 0, \\ (A \times C) +^- (B \times^- C), \ \sigma(A) = -\sigma(B), \ \xi(A,B) < 0, \end{cases}$$

където $\xi(A,B) = \sigma(A \times (A +^- B))\phi(A,B)$.

В частност в $\mathcal{M}$ е в сила $a(B +^- C) = aB +^- aC$, $a \in R$, което комбинирано с $a(B + C) = aB + aC$, $a \in R$, дава

$$a(B +^\theta C) = aB +^\theta aC, \ a \in R, \ \theta \in \Lambda,$$

Като друг частен случай получаваме

$$(a+b)C = (aC) +^{\sigma(a)\sigma(b)} (bC) = \begin{cases} (aC) + (bC), & \sigma(a) = \sigma(b); \\ (aC) +^- (bC), & \sigma(a) = -\sigma(b). \end{cases}$$

M6. Нека $* \in \{+^-, -^-\}$ и $X, X_1, Y, Y_1 \in I(R)$. Предполагаме $X \supseteq X_1$, $Y \subseteq Y_1$ и получаваме:

$$\text{ако } \omega(X) \leq \omega(Y), \ \text{ то } X * Y \subseteq X_1 * Y_1;$$
$$\text{ако } \omega(X_1) \geq \omega(Y_1), \ \text{ то } X * Y \supseteq X_1 * Y_1.$$

Нека $* \in \{\times^-, /^-\}$ и $X, X_1, Y, Y_1 \in I(R) \setminus Z$ са такива, че $X \subseteq X_1$, $Y \subseteq Y_1$. При тези предположения имаме:

$$\text{ако } \min\{\chi(X), \chi(X_1)\} \geq \max\{\chi(Y), \chi(Y_1)\}, \ \text{ то } X * Y \subseteq X_1 * Y_1;$$
$$\text{ако } \max\{\chi(X), \chi(X_1)\} \leq \min\{\chi(Y), \chi(Y_1)\}, \ \text{ то } X * Y \subseteq X_1 * Y_1.$$

Понякога е удобно да се използува релацията $\preceq$, дефинирана посредством

$$(15) \qquad A \preceq B \iff (a^{(-)} \leq b^{(-)}) \wedge (a^{(+)} \leq b^{(+)}), \ \ A, B \in I(R).$$

Релацията $\preceq$ удовлетворява следните свойства, аналогични на свойствата **S6**, **M6**, отнасящи се до релацията $\subseteq$.

$\widetilde{\mathbf{M6}}$. Нека $* \in \{+, +^-\}$, $X, X_1, Y, Y_1 \in I(R)$. Тогава $X \preceq X_1$, $Y \preceq Y_1 \Rightarrow X * Y \preceq X_1 * Y_1$.
Нека $* \in \{-, -^-\}$, $X, X_1, Y, Y_1 \in I(R)$. Тогава $X \preceq X_1$, $Y_1 \preceq Y \Rightarrow X * Y \preceq X_1 * Y_1$.
Нека $* \in \{\times, \times^-\}$, $X, X_1, Y, Y_1 \in I(R)^*$. Тогава $|X| \preceq |X_1|$, $|Y| \preceq |Y_1| \Rightarrow |X * Y| \preceq |X_1 * Y_1|$.
Нека $* \in \{/, /^-\}$ и $X, X_1, Y, Y_1 \in I(R) \setminus Z$. Тогава $|X| \preceq |X_1|$, $|Y_1| \preceq |Y| \Rightarrow |X * Y| \preceq |X_1 * Y_1|$.

M7. За $A, B \in I(R)$ имаме $A *^- B \subseteq A * B$, $* \in \{+, -, \times, /\}$. Равенство е налице точно тогава, когато поне единият от интервалите A, B е изроден. Това оправдава изпускането на знаците $\times, \times^-$ при умножение на интервал с число.

Ако $A \preceq B$, ще записваме съединението $C = [A \bigvee B]$ още във вида $C = [A, B]$ и ще казваме, че A, B са ляв, съответно десен (интервален) край на C.

Представяне в CR-форма. Използваното до този момент представяне на интервалите с помощта на техните краища ще наричаме EP-представяне (от англ. *end-point*). Ще използваме и представяне с центрове и радиуси, което ще наричаме CR-представяне за нормални интервали.

Да означим центъра и радиуса на $A \in I(R)$ съответно с $c(A)$ и $\rho(A)$, т. е. $c(A) = (a^{(-)} + a^{(+)})/2$, $\rho(A) = (a^{(+)} - a^{(-)})/2$. Преходът от CR-представяне $A = (c(A), \rho(A))$ в EP-представяне става посредством $a^{(-)} = c(A) - \rho(A)$, $a^{(+)} = c(A) + \rho(A)$. Всяка двойка (c, ρ) с $\rho \geq 0$ представя по единствен начин един нормален интервал в CR-форма. По-нататък ще дадем формулите за аритметичните операции в CR-форма [4]. Ако не е казано друго, A, B са елементи на $I(R)$. Използвани са и следните означения: $|c(A)| = \sigma(A)c(A)$, $\overline{\rho}(A) = \sigma(A)\rho(A)$. Имаме представянията:

$$\begin{aligned}
A + B &= (c(A) + c(B), \rho(A) + \rho(B)),\\
A - B &= (c(A) - c(B), \rho(A) + \rho(B)),\\
A \times B &= (c(A)c(B) + \overline{\rho}(A)\overline{\rho}(B), |c(A)|\rho(B) + |c(B)|\rho(A)),\ A, B \in I(R)^*,\\
A/B &= (\delta^2(c(A)c(B) + \overline{\rho}(A)\overline{\rho}(B)), (\delta^2(|c(A)|\rho(B) + |c(B)|\rho(A))),\\
&\ A \in I(R)^*, B \in I(R) \setminus Z,
\end{aligned}$$

където тук и по-нататък $\delta^2 = \delta^2(B) = (c^2(B) - \rho^2(B))^{-1}$.

За вътрешните операции имаме представянията [4, 6]:

$$\begin{aligned}
A +^- B &= (c(A) + c(B), |\rho(A) - \rho(B)|),\\
A -^- B &= (c(A) - c(B), |\rho(A) - \rho(B)|),\\
A \times^- B &= (c(A)c(B) - \overline{\rho}(A)\overline{\rho}(B), ||c(A)|\rho(B) - |c(B)|\rho(A)|),\ A, B \in I(R)^*,\\
A /^- B &= (\delta^2(c(A)c(B) - \overline{\rho}(A)\overline{\rho}(B)), (\delta^2||c(A)|\rho(B) - |c(B)|\rho(A)|),\\
&\ A \in I(R)^*, B \in I(R) \setminus Z.
\end{aligned}$$

В CR-запис е удобно да разглеждаме двете операции $+^\theta$, $\theta = \pm$, като една операция-функция с параметър двоичната променлива $\theta \in \Lambda$, която задава двата възможни начина на изпълнение на операцията: външен при $\theta = +$ и вътрешен при $\theta = -$. Като гледаме по подобен начин и на останалите операции, можем да резюмираме формулите за външните и вътрешните интервални операции, както следва:

$$\begin{aligned}
A +^\theta B &= (c(A) + c(B), |\rho(A)\ \theta\ \rho(B)|),\\
A -^\theta B &= (c(A) - c(B), |\rho(A)\ \theta\ \rho(B)|),\\
A \times^\theta B &= (c(A)c(B)\ \theta\ \overline{\rho}(A)\overline{\rho}(B), ||c(A)|\rho(B)\ \theta\ |c(B)|\rho(A)|),\ A, B \in I(R)^*,\\
A /^\theta B &= (\delta^2(c(A)c(B)\ \theta\ \overline{\rho}(A)\overline{\rho}(B)), (\delta^2||c(A)|\rho(B)\ \theta\ |c(B)|\rho(A)|),\\
&\ A \in I(R)^*, B \in I(R) \setminus Z,
\end{aligned}$$

където $\theta = \pm$ в десните страни означава числова аритметична операция (събиране/изваждане).

Да изразим съотношенията $\subseteq$ и $\preceq$ в CR-форма. Имаме

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow |c(B) - c(A)| \leq \rho(B) - \rho(A). \tag{16}$$

Наистина

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\Longleftrightarrow b^{(-)} \leq a^{(-)} \wedge a^{(+)} \leq b^{(+)} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} c(B) - \rho(B) \leq c(A) - \rho(A) \\ c(A) + \rho(A) \leq c(B) + \rho(B) \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} c(B) - c(A) \leq \rho(B) - \rho(A) \\ c(A) - c(B) \leq \rho(B) - \rho(A) \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow |c(A) - c(B)| \leq \rho(B) - \rho(A). \end{aligned}$$

От свойство (16) следва $\rho(B) - \rho(A) \geq 0$, т. е. $A \subseteq B \Longrightarrow \rho(A) \leq \rho(B)$.

Аналогично за релацията $\preceq$ имаме

$$A \preceq B \Longleftrightarrow |\rho(B) - \rho(A)| \leq c(A) - c(B). \tag{17}$$

Наистина

$$\begin{aligned} A \preceq B &\Longleftrightarrow a^{(-)} \leq b^{(-)} \wedge a^{(+)} \leq b^{(+)} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} c(A) - \rho(A) \leq c(B) - \rho(B) \\ c(A) + \rho(A) \leq c(B) + \rho(B) \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} c(A) - c(B) \leq \rho(A) - \rho(B) \\ c(A) - c(B) \leq \rho(B) - \rho(A) \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow c(B) - c(A) \geq |\rho(A) - \rho(B)|. \end{aligned}$$

От свойство (17) следва $c(B) - c(A) \geq 0$, т. е. $A \preceq B \Longrightarrow c(A) \leq c(B)$. Свойства (16) и (17) се получават едно от друго чрез формална размяна на c и ρ.

Още съотношения в разширената интервална аритметика ще бъдат получени в т. 6 с помощта на алгебричната система на насочените интервали, която ще разгледаме в следващата точка.

4. НАСОЧЕНИ ИНТЕРВАЛИ В ПОКОМПОНЕНТНА ФОРМА

Алгебричните системи $(I(R), +)$ и $(I(R), \times)$ са комутативни полугрупи, като в първата има закон за съкращаване, а във втората може да се отдели подполугрупа със съкращаване. Поради това тези системи могат да бъдат вложени в групи (вж. [15, с. 62]). Така получените влагания са изследвани основно от Е. Каухер [9–11]. По-нататък представяме накратко някои резултати на Е. Каухер, като използваме отново $(\pm)$-означения.

Ще разширим множеството $I(R)$ до множеството $D = \{[a, b] \mid a, b \in R\}$ от наредените двойки реални числа, като по този начин въвеждаме и „интервали", на които „левият край" е по-голям от „десния". За да не става объркване със случая на обикновени интервали, елементите на D ще наричаме насочени (или обобщени) интервали, а „краищата“ на насочените интервали ще наричаме компоненти. Първата компонента на $\mathbf{A} \in D$ ще означаваме с a^- или с $\mathbf{A}^-$, а втората — с a^+ или с $\mathbf{A}^+$, така че $\mathbf{A} = [a^-, a^+] = [\mathbf{A}^-, \mathbf{A}^+]$. Липсата на скобки, заграждащи $+$ и $-$ в горните индекси, ще означава, че неравенството $a^- \le a^+$ вече не е задължително (за разлика от $a^{(-)} \le a^{(+)}$, което е задължително за краищата на собствените интервали). Използуваната форма на представяне наричаме покомпонентна или CW-форма (от англ. *component-wise*). На насочения интервал $\mathbf{A} = [a^-, a^+] \in D$ съпоставяме двоичната променлива „посока“ $\tau(\mathbf{A})$, дефинирана с $\tau(\mathbf{A}) = \sigma(a^+ - a^-) = \{+, \text{ ако } a^- < a^+; \ -, \text{ ако } a^- > a^+\}$. Съгласно дадената дефиниция изродените интервали (тези с $a^- = a^+$) имат положителна посока. Множеството от всички елементи на D, които са с положителна посока, т. е. множеството от собствените интервали, е еквивалентно на $I(R)$ (поради което ще го означаваме отново с $I(R)$); множеството от интервалите с отрицателна посока, които ще наричаме несобствени, ще означаваме с $\overline{I(R)}$, така че $D = I(R) \cup \overline{I(R)}$. На всеки насочен интервал $\mathbf{A} = [a^-, a^+] \in D$ съпоставяме собствения интервал $p(\mathbf{A}) = \{[a^-, a^+], \text{ ако } \tau(\mathbf{A}) = +; \ [a^+, a^-], \text{ ако } \tau(\mathbf{A}) = -\}$; имаме $p(\mathbf{A}) = [a^{-\tau(\mathbf{A})}, a^{\tau(\mathbf{A})}]$. Вместо $p(\mathbf{A})$ ще пишем понякога просто A, ако това не води до неяснота. Интервала A ще наричаме собствена (нормална) част на насочения интервал $\mathbf{A}$.

Ще разширим дефиниционните области на операциите $+, \times$ от $I(R)$ в D. Да означим

$$\begin{aligned}
\overline{Z} &= \{\mathbf{A} \in \overline{I(R)} \mid a^+ \le 0 \le a^-\}, \\
\overline{Z}^* &= \{\mathbf{A} \in \overline{I(R)} \mid a^+ < 0 < a^-\}, \\
\mathcal{T} &= Z \cup \overline{Z} = \{\mathbf{A} \in D \mid 0 \in p(\mathbf{A})\} \\
&= \{\mathbf{A} \in D \mid (a^- < 0 < a^+) \vee (a^+ < 0 < a^-)\}.
\end{aligned}$$

С $\mathcal{T}^*$ означаваме насочените интервали, които съдържат както отрицателни, така и положителни числа, т. е.

$$\mathcal{T}^* = Z^* \cup \overline{Z}^* = \{\mathbf{A} \in \mathcal{T} \mid (a^- < 0 < a^+) \vee (a^+ < 0 < a^-)\}.$$

В $D^* = D \setminus \mathcal{T}^*$ дефинираме знак на насочен интервал $\sigma : D^* \to \{+, -\}$ посредством $\sigma(\mathbf{A}) = \sigma(A) = \{+, \text{ ако } a^- \ge 0, a^+ \ge 0\ ; \ -, \text{ ако } a^- \le 0, \ a^+ \le 0, \ a^- + a^+ \ne 0\}$. (Ще отбележим, че от $\mathbf{A} \in D^*$ следва $A = p(\mathbf{A}) \in I(R)^*$, а за интервали от $I(R)^*$ знакът σ е дефиниран.)

Формалното заместване на краищата (леви/десни) с компонентите (първи/втори), както и на $I(R)^*$ с D^* и на Z^* с $\mathcal{T}^*$ в (3)–(4) дава формули за операциите $+, \times$ в D:

$$\begin{aligned}
&(18) \qquad \mathbf{A} + \mathbf{B} = [a^- + b^-, a^+ + b^+], \quad \mathbf{A}, \mathbf{B} \in D, \\
&(19) \qquad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{cases} [a^{-\sigma(B)} b^{-\sigma(A)}, a^{\sigma(B)} b^{\sigma(A)}], & \mathbf{A}, \mathbf{B} \in D^*, \\ [a^{\delta} b^{-\delta}, a^{\delta} b^{\delta}], \quad \delta = \sigma(A), & \mathbf{A} \in D^*, \ \mathbf{B} \in \mathcal{T}^*, \\ [a^{-\delta} b^{\delta}, a^{\delta} b^{\delta}], \quad \delta = \sigma(B), & \mathbf{A} \in \mathcal{T}^*, \ \mathbf{B} \in D^*. \end{cases}
\end{aligned}$$

Завършваме разширяването на дефиницията на $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ за случая, когато $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{T}^*$, като положим (срв. [9, 11]):

$$(20) \qquad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{cases} [\min\{a^-b^+, a^+b^-\}, \max\{a^-b^-, a^+b^+\}], & \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{Z}^*, \\ [\max\{a^-b^-, a^+b^+\}, \min\{a^-b^+, a^+b^-\}], & \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \overline{\mathcal{Z}}^*, \\ 0, \quad \mathbf{A} \in \mathcal{Z}^*, \mathbf{B} \in \overline{\mathcal{Z}}^* \quad \text{или} \quad \mathbf{A} \in \overline{\mathcal{Z}}^*, \mathbf{B} \in \mathcal{Z}^*. \end{cases}$$

Формули (18)–(20) дефинират алгебричната система $\mathcal{K} = (D, +, \times)$, която ще наричаме насочено (обобщено) интервално пространство или насочена (обобщена) интервална аритметика.

От (19) за $\mathbf{A} = [a, a] = a$, $\mathbf{B} \in D$ имаме $a \times \mathbf{B} = a\mathbf{B} = [ab^{-\sigma(a)}, ab^{\sigma(a)}]$. Полагайки $a = -1$, получаваме $(-1)\mathbf{B} = [-b^+, -b^-]$. Оператора $(-1)\mathbf{B}$ ще наричаме отрицание на $\mathbf{B}$ и ще го означаваме с $-\mathbf{B}$ или $\mathrm{neg}(\mathbf{B})$. Очевидно $-\mathbf{B}$ е разширение на $\mathcal{S}$-оператора отрицание в D. Съставната операция $\mathbf{A} + (-1)\mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = [a^- - b^+, a^+ - b^-]$ за $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in D$ е разширение на $\mathcal{S}$-изваждането в D и ще се означава и занапред с $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ както в (7).

Системите $(D, +)$ и $(D \setminus \mathcal{T}, \times)$ са групи [10]; в тях съществуват обратни елементи. Да означим обратния адитивен елемент на $\mathbf{A} \in D$ с $-_h\mathbf{A}$, а обратния елемент на $\mathbf{A} \in D \setminus \mathcal{T}$ по отношение на операцията „$\times$“ с $1/_h\mathbf{A}$. За обратните елементи имаме покомпонентните представяния $-_h\mathbf{A} = [-a^-, -a^+]$ за $\mathbf{A} \in D$ и $1/_h\mathbf{A} = [1/a^-, 1/a^+]$ за $\mathbf{A} \in D \setminus \mathcal{T}$.

Обратният адитивен елемент $-_h\mathbf{A}$ не трябва да се смесва с отрицанието на $\mathbf{A}$, т. е. с $-\mathbf{A} = (-1) \times \mathbf{A} = [-a^+, -a^-]$. Използувайки операторите $-\mathbf{A} = [-a^+, -a^-]$ и $-_h\mathbf{A} = [-a^-, -a^+]$, образуваме оператора

$$(21) \qquad \overline{\mathbf{A}} = -_h(-\mathbf{A}) = -(-_h\mathbf{A}) = [a^+, a^-],$$

който наричаме спрягане. Операторът спрягане в D е съставен оператор, производен на операциите $+, \times$ и техните обратни. Ще означаваме оператора спрягане по три възможни начина: $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_- = \mathrm{con}(\mathbf{A})$. Операторите „спрягане“ и „обратен адитивен“ променят посоката на аргумента, а операторът „отрицание“ я запазва.

Равенствата (21) подсказват, че можем да търсим оператор $1/\mathbf{A}$ в $D \setminus \mathcal{T}$, който (аналогично на оператора $-\mathbf{A}$ в (21)) евентуално удовлетворява съотношенията

$$(22) \qquad 1/_h(1/\mathbf{A}) = 1/(1/_h\mathbf{A}) = \overline{\mathbf{A}}.$$

Единственият такъв оператор е „инверсията“ $1/\mathbf{A} = \overline{1/_h\mathbf{A}} = 1/_h\overline{\mathbf{A}} = [1/a^+, 1/a^-]$ за $\mathbf{A} \in D \setminus \mathcal{T}$; противоположно на случая в $\mathcal{S}$ тук инверсията $1/\mathbf{A}$ е съставен оператор. От друга страна, операцията $\mathbf{A} \times (1/\mathbf{B})$ за $\mathbf{A} \in D$, $\mathbf{B} \in D \setminus \mathcal{T}$, която ще означаваме по-нататък с $\mathbf{A}/\mathbf{B}$, е разширение в D на $\mathcal{S}$-операцията $\mathbf{A}/\mathbf{B}$, дефинирана с (8); имаме

$$\mathbf{A}/\mathbf{B} = \mathbf{A} \times (1/\mathbf{B}) = \begin{cases} [a^{-\sigma(B)}/b^{\sigma(A)}, a^{\sigma(B)}/b^{-\sigma(A)}], & \mathbf{A} \in D^*, \ \mathbf{B} \in D \setminus \mathcal{T}, \\ [a^{-\delta}/b^{-\delta}, a^{\delta}/b^{-\delta}], \ \delta = \sigma(B), & \mathbf{A} \in \mathcal{T}^*, \ \mathbf{B} \in D \setminus \mathcal{T}. \end{cases}$$

От $\overline{\mathbf{A}} = -(-_h\mathbf{A})$ и $\overline{\mathbf{A}} = 1/(1/_h\mathbf{A})$ (вж. (21) и (22)) получаваме следните изрази за обратните оператори: $-_h\mathbf{A} = -\overline{\mathbf{A}}$, $1/_h\mathbf{A} = 1/\overline{\mathbf{A}}$. Обратните елементи $-_h\mathbf{A}$, $1/_h\mathbf{A}$ пораждат операциите $\mathbf{A}+(-_h\mathbf{B}) = \mathbf{A}+(-\overline{\mathbf{B}}) = \mathbf{A}-\overline{\mathbf{B}}$, $\mathbf{A}\times(1/_h\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times(1/\overline{\mathbf{B}}) = \mathbf{A}/\overline{\mathbf{B}}$, които ще означаваме с $\mathbf{A} -_h \mathbf{B}$ и $\mathbf{A}/_h\mathbf{B}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} -_h \mathbf{B} &= \mathbf{A} + (-_h\mathbf{B}) = \mathbf{A} - \overline{\mathbf{B}} = [a^- - b^-, a^+ - b^+],\ \mathbf{A},\mathbf{B} \in D,\\
\mathbf{A} /_h \mathbf{B} &= \mathbf{A} \times (1/_h\mathbf{B}) = \mathbf{A}/\overline{\mathbf{B}}\\
&= \begin{cases} [a^{-\sigma(B)}/b^{-\sigma(A)}, a^{\sigma(B)}/b^{\sigma(A)}],\ \mathbf{A} \in D^*,\ \mathbf{B} \in D\setminus\mathcal{T},\\ [a^{-\delta}/b^{\delta}, a^{\delta}/b^{\delta}],\ \delta = \sigma(B),\ \mathbf{A} \in \mathcal{T}^*,\ \mathbf{B} \in D\setminus\mathcal{T}. \end{cases}
\end{aligned}$$

От последното равенство получаваме $\mathbf{A}/\mathbf{B} = \mathbf{A}/_h\overline{\mathbf{B}} = \mathbf{A}/_h(-_h((-1)\times\mathbf{B}))$, което показва, че делението „$/$“ може да се определи чрез операциите „$\times$“, $-_h$ и $/_h$ (обратно на ситуацията в $\mathcal{S}$, където „$/$“ е независима операция). Следователно символът „$/$“ може да не се включва в списъка от основните операции на така получената алгебрична система, която ще означаваме с $\mathcal{K} = (D,+,\times)$. Виждаме, че системата $\mathcal{K}$ съдържа съставните операции изваждане $\mathbf{A}-\mathbf{B}$, деление $\mathbf{A}/\mathbf{B}$, спрягане $\overline{\mathbf{A}}$, операциите $\mathbf{A}-\overline{\mathbf{B}}$, $\mathbf{A}/\overline{\mathbf{B}}$ и техните спрегнати $\overline{\mathbf{A}}-\mathbf{B}$, $\overline{\mathbf{A}}/\mathbf{B}$. Други съставни операции са $\mathbf{A}+\overline{\mathbf{B}}$, $\mathbf{A}\times\overline{\mathbf{B}}$, $\overline{\mathbf{A}}+\mathbf{B}$, $\overline{\mathbf{A}}\times\mathbf{B}$; покомпонентните представяния на последните са съответно (вземайки предвид, че $\sigma(\mathbf{A}) = \sigma(\overline{\mathbf{A}}) = \sigma(A)$):

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}+\overline{\mathbf{B}} &= [a^- + b^+, a^+ + b^-],\quad \mathbf{A},\mathbf{B} \in D;\\
\overline{\mathbf{A}}+\mathbf{B} &= [a^+ + b^-, a^- + b^+],\quad \mathbf{A},\mathbf{B} \in D;\\
\mathbf{A}\times\overline{\mathbf{B}} &= \begin{cases} [a^{-\sigma(B)}b^{\sigma(A)}, a^{\sigma(B)}b^{-\sigma(A)}], & \mathbf{A},\mathbf{B} \in D^*,\\ [a^{\delta}b^{\delta}, a^{\delta}b^{-\delta}],\quad \delta = \sigma(A), & \mathbf{A} \in D^*,\ \mathbf{B} \in \mathcal{T}^*,\\ [a^{-\delta}b^{-\delta}, a^{\delta}b^{-\delta}],\quad \delta = \sigma(B), & \mathbf{A} \in \mathcal{T}^*,\ \mathbf{B} \in D^*; \end{cases}\\
\overline{\mathbf{A}}\times\mathbf{B} &= \begin{cases} [a^{\sigma(B)}b^{-\sigma(A)}, a^{-\sigma(B)}b^{\sigma(A)}], & \mathbf{A},\mathbf{B} \in D^*,\\ [a^{-\delta}b^{-\delta}, a^{-\delta}b^{\delta}],\quad \delta = \sigma(A), & \mathbf{A} \in D^*,\ \mathbf{B} \in \mathcal{T}^*,\\ [a^{\delta}b^{\delta}, a^{-\delta}b^{\delta}],\quad \delta = \sigma(B), & \mathbf{A} \in \mathcal{T}^*,\ \mathbf{B} \in D^*. \end{cases}
\end{aligned}$$

Операциите $\tilde{+}$ и $\tilde{\times}$, дефинирани с $\mathbf{A}\tilde{+}\mathbf{B} = \mathbf{A}+\overline{\mathbf{B}}$, $\mathbf{A}\tilde{\times}\mathbf{B} = \mathbf{A}\times\overline{\mathbf{B}}$, удовлетворяват $\mathbf{B}\tilde{+}\mathbf{A} = \mathbf{B}+\overline{\mathbf{A}} = \overline{\mathbf{A}\tilde{+}\mathbf{B}}$, $\mathbf{B}\tilde{\times}\mathbf{A} = \mathbf{B}\times\overline{\mathbf{A}} = \overline{\mathbf{A}\tilde{\times}\mathbf{B}}$, което показва, че „$\tilde{+}$“ и „$\tilde{\times}$“ не са комутативни.

По-общо, като използуваме означенията $\mathbf{A}_- = \overline{\mathbf{A}}$, $\mathbf{A}_+ = \mathbf{A}$, можем да запишем, че за $t,s \in \{+,-\}$

$$\mathbf{A}_t + \mathbf{B}_s = [a^{-t} + b^{-s}, a^t + b^s],\quad \text{за } \mathbf{A},\mathbf{B} \in D, \tag{23}$$

$$\mathbf{A}_t \times \mathbf{B}_s = \begin{cases} [a^{-t\sigma(B)}b^{-s\sigma(A)}, a^{t\sigma(B)}b^{s\sigma(A)}], & \mathbf{A},\mathbf{B} \in D^*,\\ [a^{t\delta}b^{-s\delta}, a^{t\delta}b^{s\delta}],\quad \delta = \sigma(A), & \mathbf{A} \in D^*,\ \mathbf{B} \in \mathcal{T}^*,\\ [a^{-t\delta}b^{s\delta}, a^{t\delta}b^{s\delta}],\quad \delta = \sigma(B), & \mathbf{A} \in \mathcal{T}^*,\ \mathbf{B} \in D^*. \end{cases} \tag{24}$$

Формули (23), (24) позволяват пресмятането на изразите $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\overline{\mathbf{A}}+\mathbf{B}$, $\mathbf{A}+\overline{\mathbf{B}}$, $\overline{\mathbf{A}}+\overline{\mathbf{B}}$, $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$, $\overline{\mathbf{A}}\times\mathbf{B}$, $\mathbf{A}\times\overline{\mathbf{B}}$, $\overline{\mathbf{A}}\times\overline{\mathbf{B}}$.

Нововъведеното означение $\mathbf{A}_{\pm}$, показващо наличие или липса на спрягане върху $\mathbf{A}$, е много удобно за работа и ще се използува често по-нататък. С негова помощ например формула (20) може да се запише за $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{T}^*$ така:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{cases} [\min\{a^- b^+, a^+ b^-\},\ \max\{a^- b^-, a^+ b^+\}]_{\tau(\mathbf{A})}, & \tau(\mathbf{A}) = \tau(\mathbf{B}), \\ 0, \quad \tau(\mathbf{A}) = -\tau(\mathbf{B}). \end{cases}$$

Операциите $+, \times$ запазват свойствата комутативност и асоциативност при тяхното разширение (18)–(20) от $I(R)$ в D [10, 11, 26]. Освен това в D разширените операции имат обратни и съответните алгебрични системи са групи. Особено привлекателно е това, че в $\mathcal{K}$ има прости дистрибутивно-подобни връзки, които могат да се формулират в следното

Твърдение 2 (условно-дистрибутивен закон). *За* $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{A} + \mathbf{B} \in D^*$ *е в сила*

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \times \mathbf{C}_{\sigma(\mathbf{A})\sigma(\mathbf{A}+\mathbf{B})}) + (\mathbf{B} \times \mathbf{C}_{\sigma(\mathbf{B})\sigma(\mathbf{A}+\mathbf{B})}).$$

Доказателство. Като използуваме дефинициите за умножение и събиране, получаваме

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} &= [(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-\sigma(\mathbf{C})} \mathbf{C}^{-\sigma(\mathbf{A}+\mathbf{B})},\ (\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\sigma(\mathbf{C})} \mathbf{C}^{\sigma(\mathbf{A}+\mathbf{B})}] \\ &= [(\mathbf{A}^{-\sigma(\mathbf{C})} + \mathbf{B}^{-\sigma(\mathbf{C})}) \mathbf{C}^{-\sigma(\mathbf{A}+\mathbf{B})},\ (\mathbf{A}^{\sigma(\mathbf{C})} + \mathbf{B}^{\sigma(\mathbf{C})}) \mathbf{C}^{\sigma(\mathbf{A}+\mathbf{B})}]. \end{aligned}$$

Поради $\sigma(\mathbf{A})\sigma(\mathbf{A}) = +$ и формула (24) намираме за дясната страна

$$\begin{aligned} &[(\mathbf{A})^{-\sigma(\mathbf{C})} \mathbf{C}^{-\sigma(\mathbf{A}+\mathbf{B})},\ (\mathbf{A})^{\sigma(\mathbf{C})} \mathbf{C}^{\sigma(\mathbf{A}+\mathbf{B})}] \\ &\qquad + [(\mathbf{B})^{-\sigma(\mathbf{C})} \mathbf{C}^{-\sigma(\mathbf{A}+\mathbf{B})},\ (\mathbf{B})^{\sigma(\mathbf{C})} \mathbf{C}^{\sigma(\mathbf{A}+\mathbf{B})}] \\ &= [(\mathbf{A}^{-\sigma(\mathbf{C})} + \mathbf{B}^{-\sigma(\mathbf{C})}) \mathbf{C}^{-\sigma(\mathbf{A}+\mathbf{B})},\ (\mathbf{A}^{\sigma(\mathbf{C})} + \mathbf{B}^{\sigma(\mathbf{C})}) \mathbf{C}^{\sigma(\mathbf{A}+\mathbf{B})}]. \end{aligned}$$

Навсякъде тук аргументите на σ са насочени интервали, но вместо тях могат да се пишат съответните им собствени части, например $\sigma(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \sigma(A + B) = \sigma(A +^- B)$ и т. н. Още едно просто извеждане на условно-дистрибутивния закон ще бъде направено в края на следващата точка. В по-подробен запис условно-дистрибутивният закон има вида

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \begin{cases} (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) + (\mathbf{B} \times \mathbf{C}), & \sigma(\mathbf{A}) = \sigma(\mathbf{B})\ \ (= \sigma(\mathbf{A} + \mathbf{B})), \\ (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) + (\mathbf{B} \times \overline{\mathbf{C}}), & \sigma(\mathbf{A}) = -\sigma(\mathbf{B}) = \sigma(\mathbf{A} + \mathbf{B}), \\ (\mathbf{A} \times \overline{\mathbf{C}}) + (\mathbf{B} \times \mathbf{C}), & \sigma(\mathbf{A}) = -\sigma(\mathbf{B}) = -\sigma(\mathbf{A} + \mathbf{B}). \end{cases}$$

Условно-дистрибутивният закон може да се запише и в следните форми:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C}_{\sigma(A+B)} = (\mathbf{A} \times \mathbf{C}_{\sigma(A)}) + (\mathbf{B} \times \mathbf{C}_{\sigma(B)}),\ \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{A} + \mathbf{B} \in D^*,$$

$$\mathbf{C}_{\sigma(A+B)} \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\mathbf{C}_{\sigma(A)} \times \mathbf{A}) + (\mathbf{C}_{\sigma(B)} \times \mathbf{B}),\ \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{A} + \mathbf{B} \in D^*,$$

които показват, че интервалът $\mathbf{C}$ при множителите $\mathbf{A} + \mathbf{B}, \mathbf{A}, \mathbf{B}$ се спряга, ако съответният множител е отрицателен.

Релации за включване. Удобно е да се използуват две релации за включване.

Релацията h-включване [11] е удобна за работа, но има необичаен смисъл; тя се дефинира така:

$$\mathbf{A} \subseteq_h \mathbf{B} \iff (b^- \leq a^-) \wedge (a^+ \leq b^+), \quad \mathbf{A}, \mathbf{B} \in D. \tag{25}$$

Релацията p-включване се дефинира за два насочени интервала $\mathbf{A} = [a^-, a^+]$, $\mathbf{B} = [b^-, b^+]$ по следния естествен начин:

$$\mathbf{A} \subseteq_p \mathbf{B} \iff p(\mathbf{A}) \subseteq p(\mathbf{B}), \quad \mathbf{A}, \mathbf{B} \in D, \tag{26}$$

като в случая $\mathbf{A} = \mathbf{B}_-$, т. е. $b^- = a^+$, $b^+ = a^-$, приемаме за определеност, че интервалът с положителна посока съдържа този с отрицателна посока. Формула (26) изразява, че компонентите на $\mathbf{A}$ се намират между компонентите на $\mathbf{B}$ (или че краищата на A са между краищата на B). Друг еквивалентен запис на (26) е $\mathbf{A} \subseteq_p \mathbf{B} \iff b^{-\tau(\mathbf{B})} \leq a^{-\tau(\mathbf{A})} \leq a^{\tau(\mathbf{A})} \leq b^{\tau(\mathbf{B})}$, $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in D$.

Връзките между релациите $\subseteq_h$ и $\subseteq_p$ се дават за интервали $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ с еднаква посока посредством

$$\mathbf{A} \subseteq_h \mathbf{B} \iff \mathbf{A} \subseteq_p^{\theta} \mathbf{B}, \ \mathbf{A} \subseteq_p \mathbf{B} \iff \mathbf{A} \subseteq_h^{\theta} \mathbf{B}, \ \tau(\mathbf{A}) = \tau(\mathbf{B}) = \theta, \tag{27}$$

където $\subseteq_p^+ = \subseteq_p$, $\subseteq_p^- = \supseteq_p$, $\subseteq_h^+ = \subseteq_h$ и $\subseteq_h^- = \supseteq_h$.

По-нататък обобщаваме основните свойства на интервалната структура $\mathcal{K} = (D, +, \times, \subseteq_p)$. Ако не е казано нещо друго, с $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, ..., \mathbf{X}, \mathbf{Y}$ ще означаваме елементи на D. С изключение на свойства **K5** и **K6** изброените по-нататък свойства могат да се намерят в [11].

K1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times \mathbf{A}$.

K2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}), \quad (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$.

K3. $\mathbf{X} = [0, 0] = 0$ и $\mathbf{Y} = [1, 1] = 1$ са единствените нулев и съответно единичен елемент по отношение на събирането и умножението, т. е.

$$\mathbf{A} = \mathbf{X} + \mathbf{A} \text{ за всяко } \mathbf{A} \in D \iff \mathbf{X} = [0, 0];$$
$$\mathbf{A} = \mathbf{Y} \times \mathbf{A} \text{ за всяко } \mathbf{A} \in D \iff \mathbf{Y} = [1, 1].$$

K4. Всеки елемент $\mathbf{A} \in D$ има единствен обратен елемент по отношение на $+$ и всеки елемент $\mathbf{A} \in D \setminus \mathcal{T}$ притежава единствен обратен елемент по отношение на $\times$. Това са елементите $-\overline{\mathbf{A}}$, съответно $1/\overline{\mathbf{A}}$, т. е. имаме

$$0 = \mathbf{A} + (-\overline{\mathbf{A}}) = \mathbf{A} - \overline{\mathbf{A}} \ \text{ и } \ 1 = \mathbf{A} \times (1/\overline{\mathbf{A}}) = \mathbf{A}/\overline{\mathbf{A}}.$$

K5. *i*) За $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{A}+\mathbf{B} \in D^*$, $(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \times \mathbf{C}_{\sigma(A+B)} = (\mathbf{A} \times \mathbf{C}_{\sigma(A)}) + (\mathbf{B} \times \mathbf{C}_{\sigma(B)})$;
ii) За $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in I(R)$ имаме $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \subseteq_p \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$;
iii) За $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \overline{I(R)}$ имаме $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \supseteq_p \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$.

K6. Нека $* \in \{+,-,\times,/\}$. Тогава $\mathbf{X} \subseteq_p \mathbf{X}_1, \implies \mathbf{X} * \mathbf{C} \subseteq_p \mathbf{X}_1 * \mathbf{C}$. Като обобщение получаваме $\mathbf{X} \subseteq_p \mathbf{X}_1, \mathbf{Y} \subseteq_p \mathbf{Y}_1 \implies \mathbf{X} * \mathbf{Y} \subseteq_p \mathbf{X}_1 * \mathbf{Y}_1$.

K7. Операцията спрягане удовлетворява следните свойства:
$i)$ $\overline{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}}$, $\overline{\mathbf{A}\times\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} \times \overline{\mathbf{B}}$;
$ii)$ $\mathbf{A} + \overline{\mathbf{A}} = a^- + a^+ \in R$,
$\mathbf{A} \times \overline{\mathbf{A}} = \{a^-a^+$, ако $\mathbf{A} \in D\setminus\mathcal{T}$; 0, ако $\mathbf{A} \in \mathcal{T}\} \in R$.

K8. За $\mathbf{A},\mathbf{B} \in D\setminus\mathcal{T}$, $1/(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (1/\mathbf{A})\times(1/\mathbf{B})$, $1/(\mathbf{A}/\mathbf{B}) = \mathbf{B}/\mathbf{A}$.

За прегледност резюмираме по-важните аритметични закони в D, съответно в D^*:

$i)$ За $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C} \in D$, $\quad \mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$, $\quad (\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} = \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$;

$ii)$ За $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C} \in D$, $\quad \mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{B}\times\mathbf{A}$, $\quad (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = \mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$;

$iii)$ За $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{A}+\mathbf{B} \in D^*$, $\quad (\mathbf{A}+\mathbf{B})\times\mathbf{C}_{\sigma(A+B)} = (\mathbf{A}\times\mathbf{C}_{\sigma(A)})+(\mathbf{B}\times\mathbf{C}_{\sigma(B)})$.

Хиперболично умножение. Операцията „хиперболично умножение" (h-умножение) на насочени интервали се дефинира посредством [10]

$$\mathbf{A} \times_h \mathbf{B} = [a^-b^-, a^+b^+], \ \mathbf{A},\mathbf{B} \in D. \tag{28}$$

Нека $\mathbf{A} \in D\setminus\mathcal{L}$, където $\mathcal{L} = \{[a^-,a^+] \mid a^-a^+ = 0\}$. Лесно се проверява, че обратният елемент на $\mathbf{A} = [a^-,a^+] \in D\setminus\mathcal{L}$ по отношение на хиперболичното умножение е $[1/a^-, 1/a^+]$, който означихме с $1/_h\mathbf{A}$. Забелязваме, че за $\mathbf{A} \in D\setminus\mathcal{T}$ *обратният елемент* на $\mathbf{A}$ относно „$\times_h$" съвпада с обратния елемент на $\mathbf{A}$ относно „$\times$", който съгласно **K4** е $1/\overline{\mathbf{A}} = [1/a^-, 1/a^+]$.

Следващото твърдение се отнася до свойства на хиперболичното умножение и мотивира наименованието *хиперболично полутяло на системата* $(D,+,\times_h)$.

Твърдение 3 ([10]). *В сила са следните свойства:*

а) $(D,\times_h)$ *е комутативна полугрупа и* $(D\setminus\mathcal{L},\times_h)$ *е група;*

б) *операциите* $+$ *и* $\times_h$ *са дистрибутивни, т. е. в* D^* *имаме* $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times_h\mathbf{C} = (\mathbf{A}\times_h\mathbf{C}) + (\mathbf{B}\times_h\mathbf{C})$;

в) $(D,+,\times_h)$ *е тяло с нулев делител в* $\mathcal{L}$.

Алгебричната система $(D,+,\times_h)$ е проста и лесна за използуване. Но в тази система липсват важните интервални оператори отрицание $-\mathbf{A}$ и спрягане, т. е. те не могат да бъдат определени чрез операциите $+,\times_h$ и техните обратни или съставни. Въвеждането на кой да е от операторите отрицание или спрягане допълва $(D,+,\times_h)$ до система, еквивалентна на обобщеното интервално пространство $\mathcal{K} = (D,+,\times)$. Наистина следващите съотношения показват, че всеки един от тези оператори се определя чрез другия и чрез хиперболичното умножение: $-\mathbf{A} = (-1)\times_h\overline{\mathbf{A}}$; $\overline{\mathbf{A}} = (-1)\times_h(-\mathbf{A})$. Записани в термините на neg и con тези съотношения имат вида $\mathrm{neg}(\mathbf{A}) = (-1)\times_h \mathrm{con}(\mathbf{A})$, $\mathrm{con}(\mathbf{A}) = (-1)\times_h \mathrm{neg}(\mathbf{A})$. Това показва, че е в сила следното

Твърдение 4. *Системите* $(D,+,\times_h,\mathrm{con})$, $(D,+,\times_h,\mathrm{neg})$ *и* $(D,+,\times)$ *са еквивалентни.*

Можем да намерим връзки между интервалното и хиперболичното умножение, съответно деление. За $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in D^*$ имаме

$$\text{(29)} \qquad \mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{A}_{\sigma(B)} \times_h \mathbf{B}_{\sigma(A)},\ \mathbf{A}\times_h\mathbf{B} = \mathbf{A}_{\sigma(B)} \times \mathbf{B}_{\sigma(A)};$$
$$\text{(30)} \qquad \mathbf{A}/\mathbf{B} = \mathbf{A}_{\sigma(B)}/_h\mathbf{B}_{-\sigma(A)},\ \mathbf{A}/_h\mathbf{B} = \mathbf{A}_{\sigma(B)}/\mathbf{B}_{-\sigma(A)}.$$

Към горните връзки можем да причислим и съотношенията

$$\text{(31)} \qquad \mathbf{A}-\mathbf{B} = \mathbf{A} -_h \mathbf{B}_-, \quad \mathbf{A} -_h \mathbf{B} = \mathbf{A}-\mathbf{B}_-, \quad \mathbf{A},\mathbf{B}\in D,$$

които допълват възможността за преход между трите системи $(D,+,\times_h,\mathrm{con})$, $(D,+,\times_h,\mathrm{neg})$ и $(D,+,\times)$.

Като приложение на хиперболичното полутяло ще изведем условно-дистрибутивния закон от твърдение 2. Съгласно дистрибутивния закон в $(D^*,+,\times_h)$ (твърдение 3б) имаме $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times_h\mathbf{C} = (\mathbf{A}\times_h\mathbf{C})+(\mathbf{B}\times_h\mathbf{C})$. Като заместим h-произведенията с интервални умножения с помощта на (29) (което имаме право да извършим в D^*) и преозначим $\mathbf{A}_{\sigma(C)}, \mathbf{B}_{\sigma(C)}$ отново с $\mathbf{A}$, съответно $\mathbf{B}$, получаваме $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times\mathbf{C}_{\sigma(A+B)} = (\mathbf{A}\times\mathbf{C}_{\sigma(A)})+(\mathbf{B}\times\mathbf{C}_{\sigma(B)})$. Това демонстрира ползата от $(\pm)$-означенията, които позволяват наличието, респ. липсата, на операцията спрягане да се постави в зависимост от стойността на двоичната променлива „знак на интервал". Табличното представяне, използвано от Е. Каухер, не е така удобно за работа.

5. НАСОЧЕНИ ИНТЕРВАЛИ В НОРМАЛНА ФОРМА

Дотук използвахме покомпонентната форма (CW-форма) на представяне на насочените интервали. Ще използваме и едно друго представяне на насочените интервали $\mathbf{A} = [a^-, a^+] \in D$, което ще наричаме представяне в нормална форма. Елементите на декартовото произведение $I(R)\bigotimes\Lambda$, $\Lambda = \{+,-\}$, са двойки $\{A,\alpha\}$, състоящи се от нормален (собствен) интервал $A \in I(R)$ и знак $\alpha \in \Lambda$, които ще интерпретираме съответно като собствена част на насочен интервал $\mathbf{A}$ и неговата посока $\tau(\mathbf{A})$. Това ще записваме $\mathbf{A} = \{A,\alpha\} = [A;\alpha] = [a^{(-)}, a^{(+)};\alpha]$ с $A = [a^{(-)}, a^{(+)}] \in I(R)$ и $\alpha = \tau(\mathbf{A}) \in \Lambda$. Само двойката $\{[0,0],-\} = [0,0;-]$ не съответствува на никой насочен интервал, поради което ще я изключим от множеството $I(R)\bigotimes\Lambda$. По такъв начин между множествата D и $(I(R)\bigotimes\Lambda)\setminus\{[0,0],-\}$ има едно-еднозначно съответствие, поради което последното множество ще означаваме отново с D.

Формулите за преход от покомпонентна форма $\mathbf{A} = [a^-, a^+]$ към нормална форма $\mathbf{A} = [a^{(-)}, a^{(+)};\alpha]$ имат вида

$$\text{(32)} \quad \alpha = \sigma(a^+ - a^-), \quad a^{(-)} = a^{-\alpha}, \quad a^{(+)} = a^{\alpha}, \quad a^- = a^{(-\alpha)}, \quad a^+ = a^{(\alpha)}.$$

Да намерим израз за сума $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ на два насочени интервала $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, представени в нормална форма. За посоката $\gamma = \tau(\mathbf{C})$ на сумата $\mathbf{C} = [c^-, c^+] = [a^- + b^-, a^+ + b^+]$ получаваме

$$\begin{aligned}
\gamma = \tau(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \sigma(c^+ - c^-) = \sigma(a^+ + b^+ - a^- - b^-) \\
&= \sigma((a^{(\alpha)} - a^{(-\alpha)}) + (b^{(\beta)} - b^{(-\beta)})) \\
&= \sigma\left(\alpha\omega(A) + \beta\omega(B)\right), \qquad (33)
\end{aligned}$$

където $\omega(A) = a^{(+)} - a^{(-)}$. В израза $\sigma\left(\alpha\omega(A) + \beta\omega(B)\right)$ символите $\alpha, \beta \in \Lambda$ пред реалните положителни числа $\omega(A)$, съответно $\omega(B)$, се интерпретират като знаци на тези числа, т. е. $\alpha, \beta = \pm 1$.

Подробно записан, последният израз има вида

$$\begin{aligned}
\gamma = \tau(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \begin{cases} \alpha, & \alpha = \beta, \\ \alpha, & \alpha = -\beta,\ \omega(A) > \omega(B), \\ \beta, & \alpha = -\beta,\ \omega(A) < \omega(B), \\ +, & \alpha = -\beta,\ \omega(A) = \omega(B), \end{cases} \\
&= \begin{cases} \alpha, & \omega(A) > \omega(B), \\ \beta, & \omega(A) < \omega(B), \\ \alpha, & \omega(A) = \omega(B),\ \alpha = \beta, \\ +, & \omega(A) = \omega(B),\ \alpha = -\beta. \end{cases}
\end{aligned}$$

Сега пресмятаме краищата: $c^{(-)} = c^{-\gamma} = a^{-\gamma} + b^{-\gamma} = a^{(-\alpha\gamma)} + b^{(-\beta\gamma)}$, $c^{(+)} = c^{\gamma} = a^{\gamma} + b^{\gamma} = a^{(\alpha\gamma)} + b^{(\beta\gamma)}$. Следователно

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = [a^{(-)}, a^{(+)}; \alpha] + [b^{(-)}, b^{(+)}; \beta] = [a^{(-\alpha\gamma)} + b^{(-\beta\gamma)}, a^{(\alpha\gamma)} + b^{(\beta\gamma)}; \gamma], \qquad (34)$$

където $\gamma = \tau(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ се дава от (33).

От израза (34) следва, че нормалната част $p(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = [a^{(-\alpha\gamma)} + b^{(-\beta\gamma)}, a^{(\alpha\gamma)} + b^{(\beta\gamma)}]$ на сумата $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ в случая $\alpha = \beta$ $(= \gamma)$ е равна на $[a^{(-)} + b^{(-)}, a^{(+)} + b^{(+)}] = A + B = p(\mathbf{A}) + p(\mathbf{B})$. При $\alpha \neq \beta$ нормалната част на $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ е равна на

$$\begin{aligned}
C &= \begin{cases} [a^{(-)} + b^{(+)}, a^{(+)} + b^{(-)}], & a^{(-)} + b^{(+)} \le a^{(+)} + b^{(-)}, \\ [a^{(+)} + b^{(-)}, a^{(-)} + b^{(+)}], & a^{(-)} + b^{(+)} > a^{(+)} + b^{(-)}, \end{cases} \\
&= \begin{cases} [a^{(-)} + b^{(+)}, a^{(+)} + b^{(-)}], & \omega(A) \ge \omega(B), \\ [a^{(+)} + b^{(-)}, a^{(-)} + b^{(+)}], & \omega(A) < \omega(B), \end{cases} \qquad (35)
\end{aligned}$$

което е собствен интервал с краища $a^{(-)} + b^{(+)}$ и $a^{(+)} + b^{(-)}$. Интервалът (35) е вътрешната (нестандартна) сума $A +^- B$. Следователно можем да запишем

$$p(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \begin{cases} A + B, & \tau(\mathbf{A}) = \tau(\mathbf{B}), \\ A +^- B, & \tau(\mathbf{A}) \neq \tau(\mathbf{B}). \end{cases}$$

Виждаме, че за да се представи собствената част на сума от два насочени интервала посредством собствените части на тези интервали, са необходими двата типа суми за нормални интервали: външната сума $A + B$ и вътрешната сума $A +^- B$.

За униформеност при представянето на $C = p(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ да използваме означението $+^{+} = +$; тогава можем да обобщим двата случая $\alpha = \beta$, $\alpha \neq \beta$, като запишем $C = A +^{\alpha\beta} B$. И така C е или външна, или вътрешна сума на A и B. Имаме .

$$\begin{aligned} [A;\alpha]+[B;\beta] &= [A +^{\alpha\beta} B; \tau([A;\alpha]+[B;\beta])],\ A,B \in I(R), \alpha,\beta \in \Lambda; \\ \mathbf{A}+\mathbf{B} &= [A +^{\tau(\mathbf{A})\tau(\mathbf{B})} B; \tau(\mathbf{A}+\mathbf{B})],\ \mathbf{A},\mathbf{B} \in D, \end{aligned} \tag{36}$$

където $\tau(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \gamma$ се дава с (33).

За посоката на сумата на насочените интервали $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ в случай, че сумата не е изроден интервал, може да се вземе функционалът $\tau_1 : D \bigotimes D \to \Lambda$, дефиниран посредством

$$\tau_1(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \tau_1([A;\alpha],[B;\beta]) = \begin{cases} \alpha, & \omega(A) \geq \omega(B), \\ \beta, & \omega(A) < \omega(B). \end{cases} \tag{37}$$

При $\omega(C) \neq 0$ имаме $\tau_1(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \tau(\mathbf{A}+\mathbf{B})$. Стойността на $\tau_1(\mathbf{A},\mathbf{B})$ обаче може да бъде отрицателна при $\omega(C) = 0$, а съгласно уславянето, което направихме, в този случай знакът е положителен. Поради това формула (37) не съвпада напълно с (33). В някои случаи обаче стойността на $\tau_1(\mathbf{A},\mathbf{B})$ при $\omega(C) = 0$ е без значение, поради което вместо $\tau(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ можем да използваме $\tau_1(\mathbf{A},\mathbf{B})$ (такъв е случаят с твърдения 6 и 7 от следващата точка).

За да представим разликата $\mathbf{C} = \mathbf{A}-\mathbf{B} = \mathbf{A}+(-\mathbf{B}) = [a^- - b^+, a^+ - b^-]$ в нормална форма, най-напред пресмятаме $\tau(\mathbf{C}) = \tau(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = \tau(\mathbf{A}+(-\mathbf{B})) = \sigma(\alpha(\omega(A) + \beta(\omega(-B)) = \sigma(\alpha(\omega(A) + \beta(\omega(B)) = \tau(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ (използваме, че $\omega(-(B)) = \omega(B)$ и $\tau(\mathbf{B}) = \tau(-\mathbf{B}) = \beta$). След това с помощта на (32) пресмятаме $c^{(-)} = c^{-\gamma} = a^{-\gamma} - b^{\gamma} = a^{(-\alpha\gamma)} - b^{(\beta\gamma)}$, $c^{(+)} = c^{\gamma} = a^{\gamma} - b^{-\gamma} = a^{(\alpha\gamma)} - b^{(-\beta\gamma)}$, така че

$$\begin{aligned} \mathbf{A}-\mathbf{B} &= [a^{(-)}, a^{(+)}; \alpha] - [b^{(-)}, b^{(+)}; \beta] \\ &= [a^{(-\alpha\gamma)} - b^{(\beta\gamma)}, a^{(\alpha\gamma)} - b^{(-\beta\gamma)}; \tau(\mathbf{A}-\mathbf{B})], \end{aligned} \tag{38}$$

където $\tau(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = \tau(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \gamma$ се дава с (33).

От (38) следва, че при $\alpha = \beta (= \gamma)$ собствената част $p(\mathbf{A}-\mathbf{B})$ на разликата $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ е равна на $[a^{(-)} - b^{(+)}, a^{(+)} - b^{(-)}] = A - B = p(\mathbf{A}) - p(\mathbf{B})$. При $\alpha \neq \beta$ собствената част $p(\mathbf{A}-\mathbf{B})$ е равна на интервала

$$\begin{cases} [a^{(-)} - b^{(-)}, a^{(+)} - b^{(+)}], & \omega(A) \geq \omega(B), \\ [a^{(+)} - b^{(+)}, a^{(-)} - b^{(-)}], & \omega(A) < \omega(B), \end{cases}$$

т. е. на собствения интервал с краища $a^{(-)} - b^{(-)}$ и $a^{(+)} - b^{(+)}$. Както знаем от т. 3, последният е точно вътрешната (нестандартната) разлика $A -^{-} B$. Следователно можем да запишем

$$p(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = \begin{cases} A - B, & \tau(\mathbf{A}) = \tau(\mathbf{B}), \\ A -^{-} B, & \tau(\mathbf{A}) \neq \tau(\mathbf{B}). \end{cases}$$

Това показва, че за представянето на собствената част на разликата на два насочени интервала са необходими двата типа разлики: външната разлика $A - B$ и вътрешната разлика $A -^{-} B$.

За да получим общ израз за разлика на два насочени интервала, използваме означението $-^{+} = -$; тогава можем да запишем

$$\begin{aligned} [A;\alpha] - [B;\beta] &= [A -^{\alpha\beta} B; \tau([A;\alpha] - [B;\beta])],\ A, B \in I(R), \alpha, \beta \in \Lambda; \\ \text{(39)} \qquad \mathbf{A} - \mathbf{B} &= [A -^{\tau(\mathbf{A})\tau(\mathbf{B})} B; \tau(\mathbf{A} - \mathbf{B})],\ \mathbf{A}, \mathbf{B} \in D, \end{aligned}$$

където $\tau(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \tau(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \sigma(\alpha\omega(A) + \beta\omega(B)) = \gamma$ се дава с (33).

Аналогично получаваме

$$\text{(40)} \quad [A;\alpha] \times [B;\beta] = [A \times^{\alpha\beta} B; \tau([A;\alpha] \times [B;\beta])] \text{ за } A, B \in I(R)^*, \alpha, \beta \in \Lambda,$$

$$\text{(41)} \qquad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = [A \times^{\tau(\mathbf{A})\tau(\mathbf{B})} B; \tau(\mathbf{A} \times \mathbf{B})],\ \mathbf{A}, \mathbf{B} \in D^*,$$

където $\times^{+} = \times$ е външното произведение, а $\times^{-}$ — вътрешното произведение, дефинирано в $I(R)^*$ с

$$\begin{aligned} A \times^{-} B &= \begin{cases} [a^{(-\sigma(B))} b^{(\sigma(A))}, a^{(\sigma(B))} b^{(-\sigma(A))}], & \chi(A) \ge \chi(B), \\ [a^{(\sigma(B))} b^{(-\sigma(A))}, a^{(-\sigma(B))} b^{(\sigma(A))}], & \chi(A) > \chi(B), \end{cases} \\ \chi(A) &= a^{(-\sigma(A))} / a^{(\sigma(A))}. \end{aligned}$$

За участващата в (41) посока на произведението имаме $\tau(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = +$ в случай, че някой от интервалите $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ е нула, а за интервали A, B от $D^* \setminus \{0\}$ посоката се дава със:

$$\begin{aligned} \gamma = \tau(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \tau([A;\alpha] \times [B;\beta]) \\ &= \begin{cases} \alpha, & \alpha = \beta, \\ \alpha, & \alpha = -\beta,\ \chi(A) < \chi(B), \\ \beta, & \alpha = -\beta,\ \chi(A) > \chi(B), \\ +, & \alpha = -\beta,\ \chi(A) = \chi(B), \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha, & \chi(A) < \chi(B), \\ \beta, & \chi(A) > \chi(B), \\ \alpha, & \chi(A) = \chi(B),\ \alpha = \beta, \\ +, & \chi(A) = \chi(B),\ \alpha = -\beta. \end{cases} \end{aligned}$$

Последната формула може да се представи в компактна форма така: $\gamma = \sigma(\alpha\chi(B) + \beta\chi(A))$. (Същото представяне е в сила и когато и двата интервала съдържат нула във вътрешността си, стига в този случай да се използва разширената дефиниция на χ.)

Получихме, че собствената част на произведение на два насочени интервала от D^* е или външното, или вътрешното произведение на собствените им части в зависимост от посоките на насочените интервали.

Ако произведението на насочените интервали $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in D \setminus \mathcal{T}$ не е изроден интервал, то неговата посока може да се определи посредством функционала $\tau_2 : D \setminus \mathcal{T} \bigotimes D \setminus \mathcal{T} \to \Lambda$, дефиниран със

$$\text{(42)} \qquad \tau_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \tau_2([A;\alpha], [B;\beta]) = \begin{cases} \alpha, & \chi(A) \le \chi(B), \\ \beta, & \chi(A) > \chi(B). \end{cases}$$

В някои случаи вместо $\tau(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ можем да използуваме $\tau_2(\mathbf{A},\mathbf{B})$ (вж. твърдения 6 и 7 от следващата точка).

За да представим собствената част на частно на два насочени интервала $\mathbf{A}/\mathbf{B} = \mathbf{A}\times(1/\mathbf{B})$, са необходими двата типа интервално деление за собствени интервали — външното деление „$/$“, дефинирано с (2), респ. (8), и вътрешното деление „$/^-$“, дефинирано за $A\in I(R)^*, B\in I(R)\setminus Z$ посредством

$$A/^-B = \begin{cases} [a^{(-\sigma(B))}/b^{(\sigma(A))}, a^{(\sigma(B))}/b^{(-\sigma(A))}], & \chi(A)\ge\chi(B),\\ [a^{(\sigma(B))}/b^{(-\sigma(A))}, a^{(-\sigma(B))}/b^{(\sigma(A))}], & \chi(A)>\chi(B).\end{cases}$$

Използувайки външно и вътрешно деление, можем да запишем

$$\begin{aligned} \mathbf{A}/\mathbf{B} &= [A/^{\tau(\mathbf{A})\tau(\mathbf{B})}B;\tau(\mathbf{A}/\mathbf{B})],\ \mathbf{A}\in D^*, \mathbf{B}\in D\setminus\mathcal{T}, \\ \tau(\mathbf{A}/\mathbf{B}) &= \tau([A;\alpha]/[B;\beta]) = \tau(\mathbf{A}\times\mathbf{B}). \end{aligned} \tag{43}$$

Всички пресмятания с насочени интервали могат да бъдат извършвани в нормална форма. Да дадем някои примери. Съгласно (41) произведението с изроден интервал a се изразява посредством $a\times[B;\beta] = a\times[b^{(-)},b^{(+)};\beta] = [ab^{(-\sigma(a))}, ab^{(\sigma(a))};\beta]$. Ако $a=-1$, имаме $(-1)\times[b^{(-)},b^{(+)};\beta] = -[b^{(-)},b^{(+)};\beta] = [-b^{(+)},-b^{(-)};\beta]$. Вижда се, че операторът отрицание $\mathrm{neg}[B;\beta] = -[B;\beta] = [-B;\beta] = [-b^{(+)},-b^{(-)};\beta]$ запазва посоката и сменя знака на аргумента.

Обратният адитивен на $\mathbf{A} = -\overline{\mathbf{A}} = [A;\alpha] = [a^{(-)},a^{(+)};\alpha]$ е насоченият интервал $\mathrm{inva}(\mathbf{A}) = [-A;-\alpha] = [-a^{(+)},-a^{(-)};-\alpha]$. Наистина от (34) имаме $[a^{(-)},a^{(+)};\alpha]+[-a^{(+)},-a^{(-)};-\alpha] = [0,0;\pm] = 0$. Обратният адитивен променя както посоката, така и знака на насочения интервал.

Обратният адитивен на отрицателния е спрегнатият интервал

$$\mathrm{con}([a^{(-)},a^{(+)};\alpha]) = [a^{(-)},a^{(+)};\alpha]_- = \mathrm{inva}(-[A;\alpha]) = [a^{(-)},a^{(+)};-\alpha].$$

Операторът спрягане обръща посоката, но запазва знака. Имаме

$$[a^{(-)},a^{(+)};\alpha]_- = [a^{(-)},a^{(+)};-\alpha],$$

съответно $[A;\alpha]_- = [A;-\alpha]$. По-общо за $\lambda\in\Lambda$ имаме $\mathbf{A}_\lambda = [A;\alpha]_\lambda = [A;\lambda\alpha]$. Двоичната променлива λ е индикатор за наличност или липса на оператор за спрягане. Това означение е важно за софтуерни реализации; вместо да се разменят краищата на интервала, сменя се само стойността на двоичната променлива „посока“.

Аналогично, обратният мултипликативен на $[A;\alpha] = [a^{(-)},a^{(+)};\alpha]$ е насоченият интервал

$$\mathrm{invm}(\mathbf{A}) = 1/\overline{\mathbf{A}} = [1/A;\alpha]_- = [1/A;-\alpha] = [1/a^{(+)},1/a^{(-)};-\alpha].$$

Имаме $[a^{(-)},a^{(+)};\alpha]\times[1/a^{(+)},1/a^{(-)};-\alpha] = [1,1;\pm] = 1$.

Видяхме, че за насочените интервали от D^* има прости връзки между хиперболичното и интервалното умножение (вж. (29)). В нормален запис връзките между $\times_h$ и $\times$ се дават със

$$[A;\alpha] \times [B;\beta] = [A;\alpha\sigma(B)] \times_h [B;\beta\sigma(A)], \tag{44}$$

$$[A;\alpha] \times_h [B;\beta] = [A;\alpha\sigma(B)] \times [B;\beta\sigma(A)], \tag{45}$$

където A, B са произволни интервали от $I(R) \setminus Z$.

Всяко съотношение за насочени интервали, записано като интервално-аритметичен израз, поражда съотношение за собствените части на участвуващите в него интервали, т. е. израз за нормални интервали. Ще демонстрираме смисъла на това твърдение, като изведем някои основни закони за нормални интервали, изхождайки от съответни закони за насочени интервали.

6. ОСНОВНИ ЗАКОНИ ЗА НОРМАЛНИ ИНТЕРВАЛИ, ИЗВЕДЕНИ ЧРЕЗ НАСОЧЕНИ ИНТЕРВАЛИ

Свойствата на нормалните интервали (вж. свойства **S1**–**S5**, **M1**–**M5**) могат да се получат просто като частен случай на съответни свойства на насочените интервали. Следващите твърдения демонстрират техника за получаване на такива свойства.

Твърдение 5 (комутативен закон в $\mathcal{M}$).
а) *За $A, B \in I(R)$ и $\lambda \in \Lambda$ имаме $A +^{\lambda} B = B +^{\lambda} A$;*
б) *За $A, B \in I(R)^*$ и $\lambda \in \Lambda$ имаме $A \times^{\lambda} B = B \times^{\lambda} A$.*

Доказателство. Съгласно **K1** имаме $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$, $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in D$. Като използуваме (33), (36) и разгледаме поотделно случаите, когато $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ имат еднакви и различни посоки, получаваме съответно за собствените им части равенствата $A + B = B + A$, $A +^- B = B +^- A$.

Твърдение 6 (условно-асоциативен закон в $\mathcal{M}$).
а) *За $A, B, C \in I(R)$ и $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$ имаме*

$$(A +^{\alpha\beta} B) +^{\gamma\tau_1(\mathbf{A},\mathbf{B})} C = A +^{\alpha\tau_1(\mathbf{B},\mathbf{C})} (B +^{\beta\gamma} C); \tag{46}$$

б) *За $A, B, C, D \in I(R)$ и $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Lambda$ имаме*

$$\begin{aligned}(A +^{\alpha\beta} B) &+^{\tau_1(\mathbf{A},\mathbf{B})\tau_1(\mathbf{C},\mathbf{D})} (C +^{\gamma\delta} D)\\ &= (A +^{\alpha\gamma} C) +^{\tau_1(\mathbf{A},\mathbf{C})\tau_1(\mathbf{B},\mathbf{D})} (B +^{\beta\gamma} D);\end{aligned} \tag{47}$$

в) *За $A, B, C \in I(R)^*$ и $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$ имаме*

$$(A \times^{\alpha\beta} B) \times^{\gamma\tau_2(\mathbf{A},\mathbf{B})} C = A \times^{\alpha\tau_2(\mathbf{B},\mathbf{C})} (B \times^{\beta\gamma} C); \tag{48}$$

г) *За $A, B, C, D \in I(R)^*$ и $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Lambda$ имаме*

$$\begin{aligned}(A \times^{\alpha\beta} B) &\times^{\tau_2(\mathbf{A},\mathbf{B})\tau_2(\mathbf{C},\mathbf{D})} (C \times^{\gamma\delta} D)\\ &= (A \times^{\alpha\gamma} C) \times^{\tau_2(\mathbf{A},\mathbf{C})\tau_2(\mathbf{B},\mathbf{D})} (B \times^{\beta\gamma} D),\end{aligned} \tag{49}$$

където τ_1, τ_2 *са дефинираните с* (33), (42) *знакови функции за сума, съответно произведение на насочените интервали* $\mathbf{A} = [A;\alpha]$, $\mathbf{B} = [B;\beta]$, $\mathbf{C} = [C;\gamma]$, $\mathbf{D} = [D;\delta]$.

Доказателство. Ще докажем а). Като заместим $\mathbf{A} = [A;\alpha]$, $\mathbf{B} = [B;\beta]$, $\mathbf{C} = [C;\gamma]$ в $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} = \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ и използуваме (36), получаваме $[A+^{\alpha\beta} B;\tau(\mathbf{A}+\mathbf{B})]+[C;\gamma] = [A;\alpha]+[B+^{\beta\gamma} C;\tau(\mathbf{B}+\mathbf{C})]$. Първо сумираме, после сравняваме собствените части на изразите от двете страни на равенството и получаваме асоциативния закон (46). Асоциативният закон (47) се извежда по аналогичен начин; той играе важна роля в интервалния анализ [19]. Съотношенията (48) и (49) се получават аналогично с помощта на (41), (42). □

Забележка. Навсякъде във формули (46)–(49) можем да пишем вместо τ_1, τ_2 посоката τ на съответната сума или произведение.

Тъждеството (46) обобщава условно-асоциативните връзки, отнасящи се до всевъзможните комбинации между операциите $+, +^-$ (вж. правило **M2** от т. 3). Използувайки (46), можем да сменим реда на извършване на операциите в произволен израз, в който участвуват две събирания (външни или вътрешни) на нормални интервали.

Твърдение 7 (условно-дистрибутивен закон в $\mathcal{M}$). *За произволни* $A, B, C \in I(R)^*$, *такива че* $A + B \in I(R)^*$, *и за произволни* $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$ *е изпълнено*

$$\begin{aligned}&(A +^{\alpha\beta} B) \times^{\gamma\tau_1(\mathbf{A},\mathbf{B})} C \\ &\qquad = (A \times^{\alpha\gamma\sigma(A)\sigma(A+B)} C) +^{\tau_2(\mathbf{A},\mathbf{C})\tau_2(\mathbf{B},\mathbf{C})} (B \times^{\beta\gamma\sigma(B)\sigma(A+B)} C).\end{aligned}$$

Доказателство. Като положим $\mathbf{A} = [A;\alpha]$, $\mathbf{B} = [B;\beta], \mathbf{C} = [C;\gamma]$ в твърдение 2 и използуваме (36), (41), получаваме

$$[A +^{\alpha\beta} B;\tau(\mathbf{A} + \mathbf{B})] \times [C;\gamma]$$

$$= [A \times^{\alpha\gamma\sigma(A)\sigma(A+B)} C;\tau(\mathbf{A} \times \mathbf{C})] + [B \times^{\beta\gamma\sigma(B)\sigma(A+B)} C;\tau(\mathbf{B} \times \mathbf{C})].$$

Като използуваме отново нормалните форми за операцията „$\times$“ в лявата страна и за операцията „$+$“ в дясната и сравним собствените части в двете страни на горното уравнение, получаваме твърдението. □

Твърдение 7 резюмира дистрибутивния закон на разширената интервална аритметика (вж. правило **M5** от т. 3).

Методът на изследване на множеството $I(R)$ от нормалните интервали, произтичащ от структурата $\mathcal{K}$ на насочените интервали, води до фундаментални релации в $I(R)$, представени в сбита форма. Известните досега подобни релации имат твърде необозрима форма и не са така удобни за автоматична символна обработка (вж. напр. [4, 6, 29–31]).

Алгебричните свойства на системата $\mathcal{M} = (I(R), +, +^-, \times, \times^-, \subseteq)$ са изучени в [4–7, 16–18]; тези свойства съдържат и разширяват свойствата на стандартните интервално-аритметични операции. Нестандартните операции се използуват в интервалния анализ [17, 19, 20]. Смисълът на нестандартните операции става прозрачен, когато те се използуват за пресмятане на обхвати на монотонни функции, което ще разгледаме в следващата точка.

Представяне на насочени интервали в CR-форма. Ще използуваме два начина за представяне на насочени интервали с помощта на техните центрове и радиуси: единия начин ще наричаме (обикновено) CR-представяне, а другия — CR-представяне в нормална форма.

CR-представяне на насочени интервали. Насочените интервали се представят във вида $(c(\mathbf{A}), r(\mathbf{A}))$, където $c(\mathbf{A})$ и $r(\mathbf{A})$ са реални числа, които могат да вземат и отрицателни стойности ($r(\mathbf{A}) < 0$ означава, че интервалът $\mathbf{A}$ е несобствен). Формулите за преход от CW-форма в CR-форма и обратно се дават със

$$c(\mathbf{A}) = (a^- + a^+)/2,\ r(\mathbf{A}) = (a^+ - a^-)/2; \quad a^- = c(\mathbf{A}) - r(\mathbf{A}),\ a^+ = c(\mathbf{A}) + r(\mathbf{A}).$$

Тук привеждаме операциите в D, записани в CR-форма. Използувани са следните означения: $|c(\mathbf{A})| = \sigma(\mathbf{A})c(\mathbf{A})$, $\overline{r}(\mathbf{A}) = \sigma(\mathbf{A})r(\mathbf{A})$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}+\mathbf{B} &= (c(\mathbf{A})+c(\mathbf{B}), r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})),\\
\mathbf{A}-\mathbf{B} &= (c(\mathbf{A})-c(\mathbf{B}), r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})),\\
\mathbf{A}\times\mathbf{B} &= (c(\mathbf{A})c(\mathbf{B})+\overline{r}(\mathbf{A})\overline{r}(\mathbf{B}), |c(\mathbf{A})|r(\mathbf{B})+|c(\mathbf{B})|r(\mathbf{A})),\ \mathbf{A},\mathbf{B}\in D^*,\\
\mathbf{A}/\mathbf{B} &= (\delta^2(c(\mathbf{A})c(\mathbf{B})+\overline{r}(\mathbf{A})\overline{r}(\mathbf{B})), (\delta^2(|c(\mathbf{A})|r(\mathbf{B})+|c(\mathbf{B})|r(\mathbf{A}))),\\
&\qquad \mathbf{A}\in D^*, \mathbf{B}\in D\setminus\mathcal{T},
\end{aligned}$$

където $\delta^2 = \delta^2(\mathbf{B}) = (c^2(\mathbf{B}) - r^2(\mathbf{B}))^{-1}$.

За хиперболичното умножение имаме

$$\mathbf{A}\times_h\mathbf{B} = (c(\mathbf{A})c(\mathbf{B})+r(\mathbf{A})r(\mathbf{B}), |c(\mathbf{A})|r(\mathbf{B})+|c(\mathbf{B})|r(\mathbf{A})),\ \mathbf{A},\mathbf{B}\in D^*.$$

За нестандартните операции са в сила представянията

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}+^-\mathbf{B} &= (c(\mathbf{A})+c(\mathbf{B}), |r(\mathbf{A})-r(\mathbf{B})|),\\
\mathbf{A}-^-\mathbf{B} &= (c(\mathbf{A})-c(\mathbf{B}), |r(\mathbf{A})-r(\mathbf{B})|),\\
\mathbf{A}\times^-\mathbf{B} &= (c(\mathbf{A})c(\mathbf{B})-\overline{r}(\mathbf{A})\overline{r}(\mathbf{B}), ||c(\mathbf{A})|\rho(\mathbf{B})-|c(\mathbf{B})|r(\mathbf{A})|),\ \mathbf{A},\mathbf{B}\in I(R)^*,\\
\mathbf{A}/^-\mathbf{B} &= (\delta^2(c(\mathbf{A})c(\mathbf{B})-\overline{r}(\mathbf{A})\overline{r}(\mathbf{B})), (\delta^2||c(\mathbf{A})|r(\mathbf{B})-|c(\mathbf{B})|r(\mathbf{A})|),\\
&\qquad \mathbf{A}\in I(R)^*, \mathbf{B}\in I(R)\setminus Z.
\end{aligned}$$

Формулите за стандартните и нестандартните операции могат да се обобщят по следния начин:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}+^\theta\mathbf{B} &= (c(\mathbf{A})+c(\mathbf{B}), |r(\mathbf{A})\ \theta\ r(\mathbf{B})|),\\
\mathbf{A}-^\theta\mathbf{B} &= (c(\mathbf{A})-c(\mathbf{B}), |r(\mathbf{A})\ \theta\ r(\mathbf{B})|),\\
\mathbf{A}\times^\theta\mathbf{B} &= (c(\mathbf{A})c(\mathbf{B})\ \theta\ \overline{r}(\mathbf{A})\overline{r}(\mathbf{B}), ||c(\mathbf{A})|r(\mathbf{B})\ \theta\ |c(\mathbf{B})|r(\mathbf{A})|),\ \mathbf{A},\mathbf{B}\in I(R)^*,\\
\mathbf{A}/^\theta\mathbf{B} &= (\delta^2(c(\mathbf{A})c(\mathbf{B})\ \theta\ \overline{\rho}(\mathbf{A})\overline{r}(\mathbf{B})), (\delta^2||c(\mathbf{A})|r(\mathbf{B})\ \theta\ |c(\mathbf{B})|r(\mathbf{A})|),\\
&\qquad \mathbf{A}\in I(R)^*, \mathbf{B}\in I(R)\setminus Z,
\end{aligned}$$

където $\theta = \pm$.

CR-представяне в нормална форма за насочени интервали. Това представяне е много близко до CR-представянето. Разликата е в това, че за знака на радиуса се предвижда отделна променлива $\alpha = \sigma(r(\mathbf{A})) = \tau(\mathbf{A})$. Тогава радиусът $r(\mathbf{A})$ се записва във вида $r(\mathbf{A}) = \alpha\rho(\mathbf{A})$, с $\rho(\mathbf{A}) \geq 0$, т. е. имаме $\mathbf{A} = (c(\mathbf{A}), \alpha\rho(\mathbf{A})) = (c(\mathbf{A}), \tau(\mathbf{A})\rho(\mathbf{A})$. За аргумента на c и ρ не е от значение дали е насочен интервал или нормалната му част, т. е. $c(\mathbf{A}) = c(A)$, $\rho(\mathbf{A}) = \rho(A)$, поради което ще пишем още $\mathbf{A} = (c(A), \alpha\rho(A))$. Като означим както по-рано $\overline{r}(\mathbf{A}) = \sigma(\mathbf{A})r(\mathbf{A}) = \sigma(A)\alpha\rho(A) = \alpha\sigma(A)\rho(A) = \alpha\overline{\rho}(A)$, изразите за интервалните операции могат да се запишат във вида

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} + \mathbf{B} &= (c(A) + c(B), \alpha\rho(A) + \beta\rho(B)),\\
\mathbf{A} - \mathbf{B} &= (c(A) - c(B), \alpha\rho(A) + \beta\rho(B)),\\
\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (c(A)c(B) + \alpha\overline{\rho}(A)\beta\overline{\rho}(B), |c(A)|\beta\rho(B) + |c(B)|\alpha\rho(A)),\ \mathbf{A}, \mathbf{B} \in D^*,\\
\mathbf{A}/\mathbf{B} &= (\delta^2(c(A)c(B) + \alpha\overline{\rho}(A)\beta\overline{\rho}(B)), (\delta^2(|c(A)|\beta\rho(B) + |c(B)|\alpha\rho(A))),\\
&\qquad \mathbf{A} \in D^*, \mathbf{B} \in D \setminus \mathcal{T},
\end{aligned}$$

където $\delta^2 = \delta^2(\mathbf{B}) = (c^2(B) - \rho^2(B))^{-1}$.

От тези формули веднага се получава посоката на резултантния интервал, именно тя е равна на знака на втората компонента. Например $\tau(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \sigma(\alpha\rho(A) + \beta\rho(B))$ съвпада с (33), $\tau(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \sigma(|c(A)|\beta\rho(B) + |c(B)|\alpha\rho(A))$ съвпада с (42), т. е. с израза $\sigma(\alpha\chi(B) + \beta\chi(A))$. Това показва, че роля, подобна на функционала χ, играе функционал от вида $(a^{(-)} + a^{(+)})/(a^{(-)} - a^{(+)})$.

7. ПРЕДСТАВЯНЕ И ПРЕСМЯТАНЕ НА ОБХВАТИ И НАСОЧЕНИ ОБХВАТИ НА МОНОТОННИ ФУНКЦИИ

Нека $CM(T)$ е множеството от всички непрекъснати и монотонни функции, дефинирани в $T = [t^{(-)}, t^{(+)}] \in I(R)$. Множеството $f(T) = \{f(t) | t \in T\}$ от функционални стойности на f ще наричаме обхват на f (върху T). Ако $f \in CM(T)$, то за обхвата на f имаме или $f(T) = [f(t^{(-)}), f(t^{(+)})]$, или $f(T) = [f(t^{(+)}), f(t^{(-)})]$ в зависимост от типа монотонност. На всяка $f \in CM(T)$ съпоставяме двоична променлива $\tau_f = \tau(f; T) \in \Lambda = \{+, -\}$, която определя типа на монотонност на f посредством

$$\tau(f;T) = \sigma(f(x^+ - f(x^-) = \begin{cases} +, & f(t^-) \leq f(t^+);\\ -, & f(t^-) > f(t^+). \end{cases}$$

За $f(t^{(-)}) = f(t^{(+)})$, т. е. $f = \mathrm{const}$, приемаме за определеност $\tau(f, T) = +$. За $f, g \in CM(T)$ равенството $\tau_f = \tau_g$ означава, че двете функции f, g са изотонни (ненамаляващи) или двете са антитонни (нерастящи) в T; $\tau_f = -\tau_g$ означава, че едната от двете функции е изотонна, а другата — антитонна. В следващото твърдение използуваме и означението $\tau_{|f|} = \tau(|f|; T)$ за монотонни функции, които не си менят знака в T.

Твърдение 8 ([20]). *Нека $f, g \in CM(T)$. Тогава за $X \subseteq T$ имаме:*

i) ако $f+g \in CM(T)$, то $(f+g)(X) = f(X) +^{\tau_f \tau_g} g(X)$;

ii) ако $f-g \in CM(T)$, то $(f-g)(X) = f(X) -^{-\tau_f \tau_g} g(X)$.

Нека в допълнение на предположението $f, g \in CM(T)$ функциите f, g не променят знака си в T. Тогава за $X \subseteq T$:

iii) ако $fg \in CM(T)$, то $(fg)(X) = f(X) \times^{\tau_{|f|}\tau_{|g|}} g(X)$;

iv) ако $f/g \in CM(T)$, $g(x) \neq 0$, $x \in T$, то $(f/g)(X) = f(X) /^{-\tau_{|f|}\tau_{|g|}} g(X)$.

Пример 1. Да означим $\exp(-X) = \{\exp(-x) \mid x \in X\}$, $\mathrm{arctg}X = \{\mathrm{arctg}x \mid x \in X\}$. С помощта на твърдение 8 получаваме за обхвата на сумата $h(x) = \exp(-x) + \mathrm{arctg}x$ израза $h(X) = \exp(-X) +^- \mathrm{arctg}X$ за всяко $X \in I(R), 0 \notin X$; ще отбележим, че в интервалната аритметика $\mathcal{S}$ не можем да представим $h(X)$ посредством обхватите $\exp(-X)$ и $\mathrm{arctg}X$.

Нека $X \in I(R)$ е фиксиран интервал. Ако f е непрекъсната в X, то $\min_{x \in X} f(x)$, $\max_{x \in X} f(x)$ съществуват; вместо тези означения ще пишем кратко $\min f$, съответно $\max f$. Нека f, g са непрекъснати в X. Имаме:

а) $\min f + \min g \leq \min(f+g)$, $\max(f+g) \leq \max f + \max g$;

б) $\min(f+g) \leq \min f + \max g \leq \max(f+g)$, $\min(f+g) \leq \max f + \min g \leq \max(f+g)$.

Горните неравенства означават, че интервалът $(f+g)(X) = [\min(f+g), \max(f+g)]$:

а) се съдържа в интервала с краища $\min f + \min g$, $\max f + \max g$, т. е. в интервала $f(X) + g(X)$;

б) съдържа интервала с краища $\min f + \max g$, $\max f + \min g$, т. е. интервала $f(X) +^- g(X)$.

В символен запис получаваме $f(X) +^- g(X) \subseteq (f+g)(X) \subseteq f(X) + g(X)$. С аналогични разсъждения за останалите операции (изваждане, умножение и деление) намираме:

Твърдение 9. *Функциите f, g са непрекъснати в $D \subseteq R$. За $* \in \{+, -, \times, /\}$ и за всяко $X \subseteq D, X \in I(R)$ имаме $f(X) *^- g(X) \subseteq (f * g)(X) \subseteq f(X) * g(X)$.*

Горното твърдение показва, че външните операции са удобни за получаване на външни включвания, докато вътрешните интервални операции служат за вътрешни включвания. Това оправдава наименованието „вътрешни интервални опереции“, използувано от някои автори (вж. напр. [40]). Пример за използуване на вътрешни включвания има в [5].

Ще формулираме аналог на твърдение 8 за насочени интервали. Тук ще дефинираме насочен обхват чрез допускане на несобствени интервали за аргументи на функцията по следния начин:

Дефиниция. Нека $T \in I(R)$, $f \in CM(T)$. Нека $\mathbf{X} = [x^-, x^+] \in D$, $\mathbf{X} \subseteq T$. Насоченият обхват на f върху $\mathbf{X}$ е насоченият интервал $f(\mathbf{X}) = [f(x^-), f(x^+)]$. Неговата посока $\tau(f(\mathbf{X})) = \sigma(f(x^+) - f(x^-)$ ще наричаме монотонност на f върху $\mathbf{X}$ и ще означаваме още с $\tau(f; \mathbf{X})$.

Твърдение 10. *Нека $f, g \in CM(T)$. За $\mathbf{X} \subseteq T$ имаме:*

i) ако $f+g \in CM(T)$, то $(f+g)(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}) + g(\mathbf{X})$;

ii) ако $f-g \in CM(T)$, то $(f-g)(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}) - g(\mathbf{X})_- = f(\mathbf{X}) -_h g(\mathbf{X})$.

Да предположим в допълнение на $f, g \in CM(T)$, че функциите f, g не си променят знака в T. Тогава за $\mathbf{X} \subseteq T$:

iii) ако $fg \in CM(T)$, то

$$(fg)(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X})_{\sigma(g(X))} \times g(\mathbf{X})_{\sigma(f(X))} = f(\mathbf{X}) \times_h g(\mathbf{X});$$

iv) ако $f/g \in CM(T)$, $0 \notin g(X)$, то

$$(f/g)(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X})_{\sigma(g(X))}/g(\mathbf{X})_{-\sigma(f(X))} = f(\mathbf{X})/_h g(\mathbf{X}).$$

В последните две равенства $\sigma(f(X))$ означава знака на интервала $f(X)$ (в случая е без значение дали ще пишем $\sigma(f(\mathbf{X}))$ или $\sigma(f(X))$). Така например имаме $g(\mathbf{X})_{\sigma(f(X))} = \{g(\mathbf{X}),$ ако $f \geq 0$; $\mathrm{con}(g(\mathbf{X}))$, ако $f \leq 0\}$.

Твърдение 10 ни дава посоката на резултантните интервали, следователно и допълнителна информация (в сравнение с твърдение 8) за типа на монотонност (изотонност или антитонност) на резултата $f * g$, $* \in \{+, -, \times, /\}$.

Нека $\mathbf{X}$ е насочен интервал и X е собствената му част, а ξ е посоката му. От твърдение 10 *iii)* виждаме, че ако f не променя знака си в X, то насоченият обхват на функцията $-f = (-1)f$ върху $\mathbf{X}$ удовлетворява $(-f)(\mathbf{X}) = -f(\mathbf{X})_- = -[f(X); \tau(f; \mathbf{X})]_- = [-f(X); -\tau(f; \mathbf{X})]$. В частност насоченият обхват на функцията $f(x) = -x$ върху $\mathbf{X}$ е насоченият интервал $-(\mathbf{X})_- = [-X; -\tau(\mathbf{X})] = [-X; -\xi]$, т. е. обратно-адитивният насочен интервал на насочения обхват $[X; \xi]$ на функцията x върху $\mathbf{X}$. Сега можем да направим обичайната в интервалния анализ илюстрация с пресмятането на обхвата на функцията $x - x$ (както знаем, резултатът в обикновената интервална аритметика $\mathcal{S}$ е $X - X = [x^{(-)} - x^{(+)}, x^{(+)} - x^{(-)}]$, който е интервал с дължина $2\omega(X)$). В насочена интервална аритметика обхватът на функцията $x - x = x + (-x)$ върху насочения интервала $\mathbf{X} = [x^-, x^+]$ дава съгласно твърдение 10 *i)* $[X; \xi] + [-X; -\xi] = [X -^- X; +] = 0$.

Като друго следствие на твърдение 10 за обхвата на функцията $h(x) = 1/g(x)$ върху $\mathbf{X}$ получаваме $h(\mathbf{X}) = 1/g(\mathbf{X})_-$. В частност, ако $h(x) = 1/x$, то за $\mathbf{X} = [x^-, x^+]$, такъв че $0 \notin X$, имаме $h(\mathbf{X}) = 1/(\mathbf{X})_- = 1/[x^-, x^+; -] = [1/X; -\xi] = [1/x^+, 1/x^-; -\xi]$.

Пример 2. Както в пример 1 да означим $\exp(-X) = \{\exp(-x) | x \in X\}$ и $\mathrm{arctg} X = \{\mathrm{arctg} x | x \in X\}$. За съответните насочени обхвати имаме $\exp(-\mathbf{X}) = [\exp(-X); -\xi]$, съответно $\mathrm{arctg}\mathbf{X} = [\mathrm{arctg}X; \xi]$. От твърдение 8 получаваме за насочения обхват на $h(x) = \exp(-x) + \mathrm{arctg}x$ върху $\mathbf{X}$ израза $h(\mathbf{X}) = \exp(-\mathbf{X}) + \mathrm{arctg}\mathbf{X}$ за всяко $\mathbf{X} \in D$, върху което $h(x)$ е монотонна, т. е. за $\mathbf{X} \in D^*$. Сравнен с резултата за $h(X)$ от пример 1, тук $h(\mathbf{X})$ съдържа допълнителна информация за типа на монотонност на h върху $\mathbf{X}$.

Този пример подсказва следното правило за работа с функция от функция. Ако са дадени функции $g \in CM(T)$, $f \in CM(g(T))$, $h = f(g) \in CM(T)$, то очевидно имаме за посоката на h върху $\mathbf{X}$ равенството $\tau(h, \mathbf{X}) = \tau(f, g(\mathbf{X}))$.

Пример 3. Да разгледаме функцията $h(x) = 1 - x + x^2$, $x \in X = [0, 1]$. Означавайки $f(x) = 1 - x$, $g(x) = x^2$, имаме $F(X) = 1 - X$, $G(X) = X \times X =$

X^2. Разделяме интервала $[0,1]$ на два подинтервала $[0,1/2]$, $[1/2,1]$, такива че f, g и h са монотонни във всеки подинтервал. Съгласно твърдение 8 можем да пресметнем точно обхвата на функцията h във всеки подинтервал, използувайки вътрешна сума $H([0,1/2]) = (1-X) +^- X^2 = [3/4,1]$, $H([1/2,1]) = (1-X) +^- X^2 = [3/4,1]$, и получаваме окончателно $H(X) = H([0,1/2]) \cup H([1/2,1]) = [3/4,1]$. Ако не използуваме съображения за монотонност, то можем да получим съотношения на включване; външното събиране води до външно включване, докато вътрешното събиране дава вътрешно включване. Наистина имаме $F(X) + G(X) = [0,1] + [0,1] = [0,2]$ и $F(X) +^- G(X) = [0,1] +^- [0,1] = [1,1]$.

Разгледаните обобщени интервални структури позволяват не само да получаваме (евентуално груби) външни включвания с помощта на $\mathcal{S}$-операциите, но и да намираме вътрешни включвания, както и да представяме точно обхвати на функции (при отчитане на монотонности). Възможността да се използуват равенства вместо включвания може да се разпространи върху рационални функции, тъй като те имат свойството да са монотонни в даден интервал с евентуално изключение на краен брой точки от него. В [2] е показано как вътрешните операции в $\mathcal{M}$ могат да се използуват за получаване на тесни включвания за обхвати на функции.

Благодарности. Авторът изказва благодарност на рецензента за внимателното прочитане на ръкописа и многобройните му забележки, които допринесоха съществено за подобряване на качеството на изложението.

ЦИТИРАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Alefeld, G., J. Herzberger. Einführung in die Intervallrechnung. Bibliographisches Institut Mannheim, 1974.
2. Bartholomew-Biggs, M., S. Zakovich. Using Markov's Interval Arithmetic to Evaluate Bessel-Rikatti Functions. — NOC Technical Report 297, University of Herdfordshire, October 1994 (submitted to Numerical Algorithmes).
3. Corliss, G. F., L. B. Rall. Computing the Range of Derivatives. In: Computer arithmetic, scientific computation and mathematical modelling (eds. E. Kaucher, S. M. Markov, G. Mayer), J. C. Baltzer AG, Basel, 1991, 195–212.
4. Dimitrova, N. Über die Distributivgesetze der erweiterten Intervallarithmetik. *Computing*, **24**, *1980*, *33–49*.
5. Dimitrova, N. An Interval Halley-like Method for Nonlinear Equations (submitted to Interval Computations).
6. Dimitrova, N., S. M. Markov. Distributive Laws in the Extended Interval Arithmetic. — Ann. Sof. Univ., Math. Fac., **71**, Part I, 1976/77, 169–185 (in Bulgarian).
7. Dimitrova, N., S. M. Markov, E. Popova. Extended Interval Arithmetics: New Results and Applications. In: Computer arithmetic and enclosure methods (eds. L. Atanassova, J. Herzberger), North-Holland, Amsterdam, 1992, 225–232.
8. Gardeñes, E., A. Trepat. Fundamentals of SIGLA, an Interval Computing System over the Completed Set of Intervals. — Computing, **24**, 1980, 161–179.
9. Kaucher, E. Über metrische und algebraische Eigenschaften einiger beim numerischen Rechnen auftretender Räume. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1973.

10. K a u c h e r, E. Über Eigenschaften und Anwendungsmöglichkeiten der erweiterten Intervallrechnung und des hyperbolischen Fastkörpers über R. — Computing Suppl., **1**, 1977, 81–94.
11. K a u c h e r, E. Interval Analysis in the Extended Interval Space IR. — Computing Suppl., **2**, 1980, 33–49.
12. K u l i s c h, U. Grundlagen des Numerischen Rechnens — Mathematische Begründung der Rechnerarithmetik. — Reihe Informatik, B. **19**, Bibliographisches Institut Mannheim, 1976.
13. K u l i s c h, U., W. L. M i r a n k e r. Computer Arithmetic in Theory and Practice. Academic Press, N. Y., 1981.
14. K u l i s c h, U., W. L. M i r a n k e r. The Arithmetic of the Digital Computer: A New Approach. — SIAM Review, **28**, 1986, 1.
15. K u r o s h, A. G. Lectures on Abstract Algebra (Lekcii po obshchei algebre). Nauka, Moskow, 1973 (in Russian).
16. M a r k o v, S. M. Extended Interval Arithmetic. — Compt. rend. Acad. Bulg. Sci., **30**, 9, 1977, 1239–1242.
17. M a r k o v, S. M. Extended Interval Arithmetic and Differential and Integral Calculus for Interval Functions of a Real Variable. — Ann. Sof. Univ., Fac. Math., **71**, Part I, 1976/77, 131–168 (in Bulgarian).
18. M a r k o v, S. M. On the Extended Interval Arithmetic. — Compt. rend. Acad. Bulg. Sci., **31**, 2, 1978, 163–166.
19. M a r k o v, S. M. Calculus for Interval Functions of a Real Variable. — Computing, **22**, 1979, 325–337.
20. M a r k o v, S. M. Some Applications of the Extended Interval Arithmetic to Interval Iterations. — Computing Suppl., **2**, 1980, 69–84.
21. M a r k o v, S. M. Extended Interval Arithmetic Involving Infinite Intervals. Mathematica Balkanica, New Series, **6**, 3, 1992, 269–304.
22. M a r k o v, S. M. On the Presentation of Ranges of Monotone Functions Using Interval Arithmetic. — Interval Computations, **4**, 6, 1992, 19–31.
23. M a r k o v, S. M. Some Interpolation Problems Involving Interval Data. — Interval Computations, **3**, 1993, 164–182.
24. M o o r e, R. E. Interval Analysis. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1966.
25. N e s t e r o v, V. How to Use Monotonicity Type Information to Get Better Estimates of The Range of Real-Valued Functions. — Interval Computations, **4**, 1993, 3–12.
26. O r t o l f, H.-J. Eine Verallgemeinerung der Intervallarithmetik. — Geselschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, Bonn, **11**, 1969, 1–71.
27. P o p o v a, E. Extended Interval Arithmetic in IEEE Floating-point Environment (submitted to Interval Computations).
28. R a l l, L. Automatic Differentiation: Techniques and Applications. — Lecture Notes in Computer Sciences, **120**, Springer, 1981.
29. R a t s c h e k, H. Über einige intervallarithmetische Grundbegrife. — Computing, **4**, 1969, 43–55.
30. R a t s c h e k, H. Die Subdistributivität der Intervallarithmetik. — ZAMM, **51**, 1971, 189–192.
31. R a t s c h e k, H. Teilbarkeitskriterien der Intervallarithmetik. — J. Reine Angew. Math., **252**, 1972, 128–138.
32. R a t s c h e k, H., J. R o k n e. Computer Methods for the Ranges of Functions. Ellis Horwood, Chichester, 1984.
33. R a t s c h e k, H., G. S c h r o e d e r. Ueber die Ableitung von intervallwertigen Functionen. — Computing, **7**, 1971, 172–187.
34. S c h m i d t, K. D. Embedding Theorems for Cones and Applications to Classes of Convex Sets Occurring in Interval Mathematics. In: Interval mathematics, 1985 (ed. by K. Nickel), Lecture notes in computer science, **212**, Springer, 1986.
35. S c h r ö d e r, G. Bemerkung zur Differentiation von intervallwertigen Funktionen. — Computing, **26**, 1981, 271–274.

36. S e n d o v, B l. Segment Arithmetic and Segment Limit. — C. R. Acad. Bulg. Sci., **30**, 1977, 955–968.
37. S e n d o v, B l. Segment Derivatives and Taylor's Formula. — C. R. Acad. Bulg. Sci., **30**, 1977, 1093–1096.
38. S e n d o v, B l. Some Topics of Segment Analysis. In: Interval Mathematics'80 (ed. by K. Nickel), Academic Press, 1980, 236–245.
39. S e n d o v, B l. Hausdorff Approximations, Kluver, Dordrecht, 1990.
40. S t e t t e r, H. J. Validated Solution of Initial Value Problems for ODE. In: Computer Arithmetic and Self-Validating Numerical Methods (ed. Ch. Ullrich), Academic Press, 1990.
41. S u n a g a, T. Theory of an Interval Algebra and its Applications to Numerical Analysis. — RAAG Memoirs, **2**, 1958, 29–46.

Постъпила на 04.05.1994 г.