ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 1 — Математика
Том 87, 1993

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI"

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 1 — Mathématiques
Tome 87, 1993

О K_4'-ГРАФАХ

НИКОЛАЙ ХАДЖИИВАНОВ

Николай Хаджииванов. О K_4'-ГРАФАХ

G называется K_4'-графом, если при произвольной 2-раскраске его ребер появляются монохроматические треугольники с общей стороной. Через $R^k(K_4')$ обозначаем минимальное число вершин K_4'-графов с кликовым числом k. Доказаны неравенства $R^5(K_4') \leqq 29$ и $R^4(K_4') \leqq 61$.

Nikolaj Khadzhiivanov. ON K_4'-GRAPHS

G is called K_4'-graph if for every 2-coloring of its edges there are monochromatic triangles with common edge. By $R^k(K_4')$ we denote the minimum of vertex number of K_4'-graphs with clique number k. The inequalities $R^5(K_4') \leqq 29$ and $R^4(K_4') \leqq 61$ are proved.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть фиксирован некоторый граф Г. Для графа G будем говорить, что он является Г-*графом*, если для любой 2-раскраски ребер графа G имеется хотя бы один подграф этого графа, который одновременно монохроматичен и изоморфен графу Г. Согласно теореме Рамсея [1] имеются Г-графы.

Минимальное n, которое является числом вершин Г-графа, обозначается через $R(\Gamma)$ и называется *числом Рамсея графа* Г.

Через K_n обозначается полный n-вершинный граф, а через K_n' — его подграф, полученный удалением некоторого ребра из K_n.

В настоящей заметке докажем несколько предложений, относящихся к Г-графам в специальном случае $\Gamma = K_4'$. В [2] (см. также [4]) доказано, что K_{10} является K_4'-графом, однако K_9 нет, так что $R(K_4') = 10$.

В [3] доказано, что для любого графа Г существует Г-граф с тем же кликовым числом. Следовательно имеются K_4'-графы с кликовым числом 3. Для данного k с $R^k(\Gamma)$ обозначим минимальное n, для которого имеется Г-граф с кликовым числом k.

Здесь найдем оценки сверху для чисел $R^5(K_4')$ и $R^4(K_4')$.

2. СУЩЕСТВЕННО 3-СТЕПЕННЫЕ ГРАФЫ

Граф G будем называть *существенно 3-степенным*, если для любого разбиения множества его вершин в объединение двух подмножеств A_i, хотя бы для одного A_i верно следующее: как бы ни выбирали вершину v в A_i, остальные вершины множества A_i порождают подграф графа G, который имеет степень хотя бы 3, т. е. $\deg\langle A_i \setminus v\rangle_G \geqq 3$. Совершенно легко указать примеры существенно 3-степенных графов. Для нас представляют интерес такие из них, которые имеют кликовое число 2.

ПРИМЕР СУЩЕСТВЕННО 3-СТЕПЕННОГО ГРАФА С КЛИКОВЫМ ЧИСЛОМ 2

Пусть V_i, $1 \leqq i \leqq 5$, — дизъюнктные 5-элементные множества. Положим $V = \cup V_i$ и объявим V множеством вершин графа H, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда принадлежат соответственно двум V_i и V_{i+1} , где $1 \leqq i \leqq 5$ и $V_6 = V_1$. Очевидно в графе H нет треугольников, так что эго кликовое число 2. Граф H получается из простого цикла C_5 расщеплением каждой из его вершин в 5 долей, причем, конечно, любое ребро расщепляется в 25 долей.

Лемма 1. *Только что построенный граф H является существенно 3-степенным графом.*

Доказательство. Пусть $V = A_1 \cup A_2$. Так как множество V_i — 5-элементное и $V_i = (V_i \cap A_1) \cup (V_i \cap A_2)$, то хотя бы одно из множеств $V_i \cap A_1$ или $V_i \cap A_2$ имеет хотя 3 элементов. Число множеств V_i равняется 5 и поэтому для одного из индексов $j \in \{1, 2\}$ имеются три индекса i, для которых $|V_i \cap A_j| \geqq 3$. Следовательно найдутся такие i и j, что $|V_i \cap A_j| \geqq 3$ и $|V_{i+1} \cap A_j| \geqq 3$. Пусть $V_i \cap A_j \supset \{a_1, a_2, a_3\}$ и $V_{i+1} \cap A_j \supset \{a_4, a_5, a_6\}$. Эти 6 вершин порождают в H полный бихроматический граф $K_{3,3}$ и, очевидно, удаляя любую из них, получим подграф $K_{2,3}$. Теперь ясно, что удаляя произвольную вершину v из A_j, остальные вершины этого множества порождают подграф графа H, который имеет степень хотя бы 3, что и требовалось доказать.

Проблема. Найти минимальное n, для которого существует n-вершинный существенно 3-степенный граф с кликовым числом 2.

3. СОЕДИНЕНИЕ СВЯЗНОГО И СУЩЕСТВЕННО 3-СТЕПЕННОГО ГРАФА

Пусть L — связный граф, а M — существенно 3-степенный граф и эти два графа не имеют общих вершин. Через G обозначим соединение графов L и M, $G = L + M$.

Лемма 2. *Если при некоторой 2-раскраске ребер графа $G = L + M$ нет монохроматических K_4', тогда подграф L монохроматичен.*

Доказательство. Очевидно, достаточно в качестве L иметь ввиду связный 2-реберный граф, т. е. считать, что L состоит из двух ребер $[a_0, a_1]$ и $[a_0, a_2]$ с общей вершиной a_0. Допустим, противно тому, что требуется доказать, что имеется 2-раскраска ребер графа G, при которой ребро $[a_0, a_1]$ — черное, а ребро $[a_0, a_2]$ — белое, причем нет монохроматических K_4'.

Через A_1 обозначим множество всех вершин подграфа M, любая из которых связана с вершиной a_0 черным ребром. Через A_2 обозначим множество всех остальных вершин подграфа M, так что вершина a_0 связана с любой из вершин множества A_2 белым ребром.

Установим, что в A_i имеется такая вершина c_i, что $\deg\langle A_i \setminus c_i\rangle_M \leqq 2$, что противоречит предположению, что M является существенно 3-степенным графом. Разумеется, из-за симметрии, это достаточно доказать только для множества A_1.

Все вершины множества A_1, за исключением самое более одной, связаны вершиной a_1 белым ребром, потому что иначе существовали бы два черные треугольника с общей стороной $[a_0, a_1]$, т. ė. имели бы черный K_4'.

Итак, в A_1 имеется вершина c_1, такая что все вершины множества $A_1 \setminus c_1$ связаны белыми ребрами с вершиной a_1.

Теперь уже нетрудно сообразить, что в порожденном подграфе $\langle A_1 \setminus c_1\rangle_M$ нет смежных черных ребер и нет смежных белых ребер. Действительно, если имеются в $\langle A_1 \setminus c_1\rangle_M$ черные ребра с общей вершиной v, тогда мы имели бы два черные треугольника с общей стороной $[a_0, v]$, а если имеются две белые ребра с общей вершиной v, тогда $[a_1, v]$ будет общей стороной двух белых треугольников.

Окончательно в графе $\langle A_1 \setminus c_1\rangle_M$ нет смежных ребер одинокового цвета и следовательно нет вершин степени 3. Таким образом доказано, что в A_1 имеется такая вершина c_1, что $\deg\langle A_1 \setminus c_1\rangle_M \leqq 2$. Как мы уже отметили, таким же образом доказывается, что в A_2 имеется вершина c_2, для которой $\deg\langle A_2 \setminus c_2\rangle_M \leqq 2$. Оказывается, граф M не существенно 3-степенен, что является противоречием.

Доказательство леммы 2 завершено.

4. K_4'-ГРАФ С КЛИКОВЫМ ЧИСЛОМ 5

Из леммы 2 элементарно вытекает:

Лемма 3. *Если M — существенно 3-степенный граф, тогда соединение $G = K_4' + M$ является K_4'-графом.*

Доказательство. Если допустить, что утверждение не верно, тогда найдется 2-раскраска ребер графа G без монохроматических подграфов, изоморфных графу K_4'. Тогда, согласно лемме 2, подграф K_4' будет монохроматическим, что является противоречием.

Пусть H — граф, определенный в п. 2. Из леммы 3 тривиально следует

Теорема 1. *Соединение $G_1 = K_4' + H$ является K_4'-графом с кликовым числом 5.*

Действительно, из леммы 1 и леммы 3 следует, что соединение G_1 является K_4'-графом. Кликовое число этого соединения равняется 5, потому что слагаемое K_4' имеет кликовое число 3, а слагаемое H — 2.

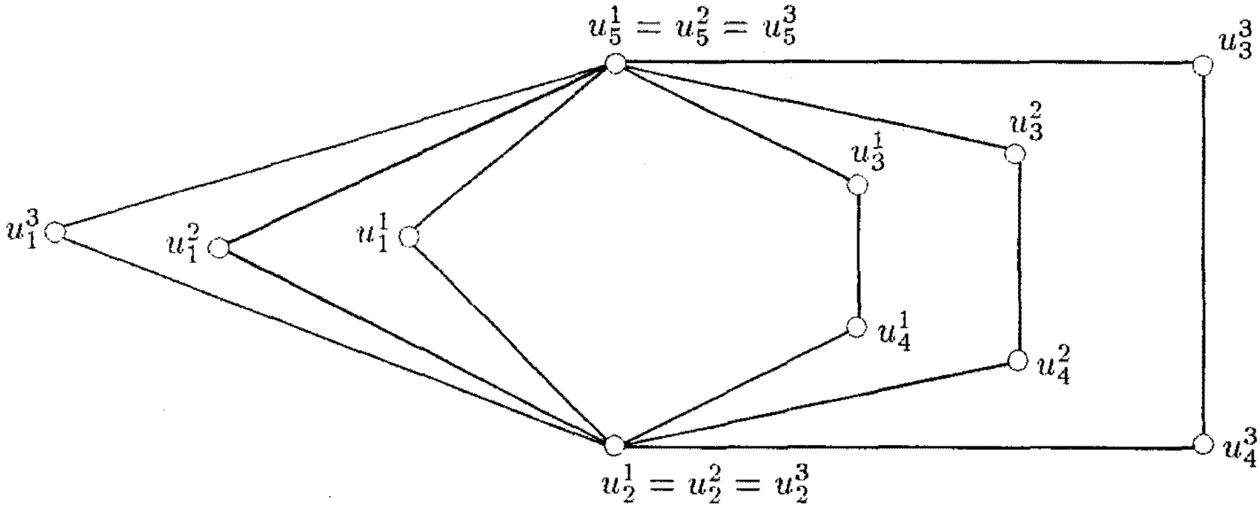
Так как число вершин соединения G_1 равняется 29, то из доказанной теоремы следует, что

$$R^5(K_4') \leqq 29.$$

Проблема. Найти $R^5(K_4')$.

5. K_4'-ГРАФ С КЛИКОВЫМ ЧИСЛОМ 4

Рассмотрим граф на фиг. 1, состоящий из трех 5-циклов с двумя общими несмежными вершинами; i-ый 5-цикл нумерован u_1^i, u_2^i, u_3^i, u_4^i, u_5^i, причем $u_2^i = a$, $u_5^i = b$, $i = 1, 2, 3$.



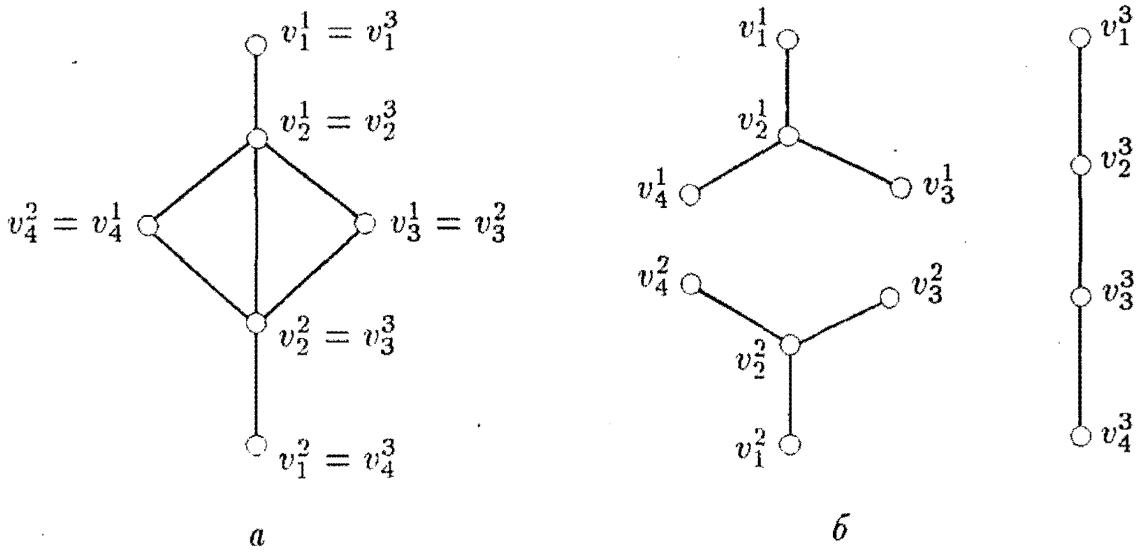
Фиг. 1

Из этого графа получим новый граф $\widehat{H}$ следующим образом: заменим каждую из 11 вершин u_j^i с 5-антикликой U_j^i, а каждое из 15 ребер $[u_j^i, u_{j+1}^i]$ (будем считать $u_6^i = u_1^i$) заменим группой из 25 ребер, соединяющих любую вершину из U_j^i с любой вершиной из U_{j+1}^i; ясно, что $U_2^1 = U_2^2 = U_2^3$ и $U_5^1 = U_5^2 = U_5^3$.

Таким образом граф $\widehat{H}$ получается из трех экземпляров графа H (определенного в п. 2) — H^1, H^2 и H^3 — посредством отождествления некоторых вершин.

Граф $\widehat{H}$ содержит в качестве подграфа граф H и поэтому является существенно 3-степенным графом (см. лемму 1).

Рассмотрим еще граф L, изображенный на фиг. 2*а*. Он получен объединением трех графов L^i, изображенных на фиг. 2*б*, причем отождествлены некоторые вершины и ребра.



Фиг. 2

Наконец, сконструируем граф G_2 следующим образом: G_2 является дизъюнктным объединением графов L и $\widehat{H}$, к которому присоединены в качестве ребер всевозможные отрезки, соединяющие любую из вершин графа L^i с любой из вершин графа H^i, где $i = 1, 2, 3$.

Таким образом, граф G_2 получен из трех соединений $L^i + H^i$ отождествлением некоторых вершин и ребер этих соединений.

Теорема 2. *Только-что построенный граф G_2 является K_4'-графом с кликовым числом 4.*

Доказательство. Докажем сначала, что G_2 — K_4'-граф. Допустим противное. Тогда имеется 2-раскраска ребер графа G_2 без монохроматических подграфов, изоморфных графу K_4'. Так как каждый H^i — существенно 3-степенный граф, при помощи леммы 2 заключаем, что L^i — монохроматический при рассматриваемой раскраске. С другой стороны,

L^1 и L^2 имеют общее ребро с L^3, так что все ребра графа L должны быть окрашены одинаково.

Таким образом, при рассматриваемой раскраске ребер графа G_2, лишенной монохроматических K_4', подграф L — монохроматический. Однако L содержит в качестве подграфа граф K_4'. Окончательно, мы достигли до заключения, что при рассматриваемой раскраске ребер графа G_2 все таки имеется монохроматический K_4', что является противоречием.

Итак, доказано, что G_2 — K_4'-граф. Остается показать, что G_2 имеет кликовое число 4. То что граф G_2 содержит 4-клики ясно — любой из подграфов $L^i + H^i$ очевидно имеет это свойство. Поэтому надо установить, что граф G_2 не имеет 5-клик. Во первых, подграф $\widehat{H}$ очевидно не содержит 3-клик, а если $[u, v]$ — 2-клика этого подграфа, тогда хотя бы одна из ее вершин — будем считать, что это u — не содержится в объединении $U_2^i \cup U_5^i$. Это показывает, что u является вершиной ровно одного из подграфов H^i; обозначим его через H^{i_0}. Из определения графа G_2 следует, что вершина u смежна в L только вершинам подграфа L^{i_0}, который не содержит 3-клик. Следовательно в G_2 нет 5-клик.

Доказательство теоремы 2 завершено.

Число вершин графа G_2 равняется 61. Поэтому из только-что доказанной теоремы следует, что

$$R^4(K_4') \leqq 61.$$

Проблема. Найти $R^4(K_4')$.

Как мы уже упомянули в п. 1, существуют K_4'-графы с кликовым числом 3.

Проблема. Построить K_4'-граф с кликовым числом 3.

6. ПРИБАВЛЕНИЕ

В [5] построены K_3-графы с кликовым числом 5 и 4. В идейном отношении [5] имеет некоторое сходство с настоящей статьей. Здесь хотим исправить несколько допущенных в [5] опечаток на стр. 213.

1) На строчке 1 дополнить определения графа M следующим образом: $M = \bigcup\limits_{i=1}^{3} (R_i + S_i) \cup \{[c', c''], [c'', c'''], [c''', c']\}$.

2) На строчке 5 вместо $U_i \cup V_i$ поставить $U_i + V_i$.

3) На строчке 9 приписать в конце: „... без монохроматических треугольников“.

4) На рис. $2a$ соединить вершины c' и c'' ребром.

ЛИТЕРАТУРА

1. R a m s e y, F. P. On a problem of formal logic. — Proc. London Math. Soc., **30**, 1930, 264–286.
2. C h v à t a l, V., F. H a r a r r y. Generalized Ramsey theory for graphs, II. Small diagonal numbers. — Proc. Amer. Math. Soc., **32**, 1972, 389–394.
3. N e ŝ e t r̂ i l, I., V. R ö d l. The Ramsey property for graphs with forbidden complete subgraphs. — Jour. Comb. Th. (B), **20**, 1976, 243–249.
4. Х а д ж и и в а н о в, Н. Етюди по теорията на Ремзи, II. — Математика (болг. журнал по элем. матем.), № 1, 1994, 19–23.
5. Х а д ж и и в а н о в, Н., Н. Н е н о в. О графах Рамсея. — Год. Соф. унив., ФММ, **78**, 1984, кн. 1 — Математика, 211–216.

Поступила на 20.09.1994