

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Книга 2 — Механика

Том 87, 1993

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Livre 2 — Mécanique

Tome 87, 1993

SUR LA DISTRIBUTION DE FLUX THERMIQUES
PAR FROTTEMENT POUR QUELQUES SYSTEMES
TRIBOMECHANIQUES

VASSIL DIAMANDIEV

Васил Диамандиев. О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ ПРИ ТРЕНИИ
ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ТРИБОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

В этой работе рассмотрена общая термическая проблема при трении для конкретных трибомеханических систем. В работе найдены температурные поля этих систем, через которых определено распределение тепловых потоков возникающих при трении.

Vassil Diamandiev. ON THE DISTRIBUTION OF THERMAL FLUXES AT FRICTION TO
SOME TRIBOMECHANICAL SYSTEMS

A general thermal problem at friction to some concrete tribomechanical systems is considered in this paper. The temperature fields of these systems are found, on the base of which the distribution of thermal fluxes arisen at the friction is determined.

Il est notoire que quand deux corps se frottent dans un plan quelconque on surgit une chaleur qui se distribue par des flux entre deux corps. Ces flux forment des champs thermiques en deux corps qui déterminent la température du frottement. Ce problème thermique a une grande signification pratique pour les propriétés d'exploitation des machines. Le problème thermique selon la physique mathématique [1] peut se formuler de la manière suivante [2]. Il faut résoudre

l'équation de la conductivité thermique

$$(1) \quad \frac{1}{a_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial z^2} \quad (i = 1, 2)$$

par les conditions suivantes initiales et limitées:

$$(2) \quad \theta_i(x, y, z, 0) = T_0 \quad (i = 1, 2),$$

$$(3) \quad \theta_i(x, y, z, t)/\Sigma_i = T_0 \quad (i = 1, 2),$$

$$(4) \quad \theta_1(0, y, z, t) = \theta_2(0, y, z, t),$$

$$(5) \quad \lambda_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x}(0, y, z, t) - \lambda_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x}(0, y, z, t) = J f p v.$$

Ici $\theta_1(x, y, z, t)$, $\theta_2(x, y, z, t)$ sont les champs thermiques en deux corps qui sont en général non stationnaires, c'est-à-dire dépendent du temps. On suppose que le plan dans lequel on a le frottement est le plan $x = 0$. Les surfaces Σ_1 et Σ_2 limitent les corps. Les coefficients a_i s'expriment par les coefficients thermiques λ_i , c_i , ρ_i par la formule

$$(6) \quad a_i = \frac{\lambda_i}{c_i \rho_i} \quad (i = 1, 2).$$

L'équation (2) exprime que la température des corps au moment initial coïncide avec celle de l'environnement. L'équation (4) exprime la température du contact de deux corps. L'équation (5) exprime que la somme des flux thermiques selon la loi de Fourier est égale à la chaleur qui se forme par le frottement.

On applique ce schéma général du problème thermique pour des systèmes concrets tribomécaniques. On trouve les champs thermiques pour deux corps et après on résout le problème pour la distribution de la chaleur à des flux thermiques.

Dans cet article on considère un système tribomécanique suivant: deux vilebrequins se frottent dans leur section frontale et transversale. L'un des vilebrequins est immobile tandis que l'autre se tourne avec une vitesse angulaire constante ω . On veut trouver les champs thermiques de deux corps qui sont en général non stationnaires. On suppose que la section transversale a des dimensions minimales.

Ce système tribomécanique est examiné par Klémentev [3] mais en *un aspect très borné*. Klémentev suppose que la température ne dépend pas du temps. Cette proposition simplifie le problème jusqu'à une équation différentielle ordinaire tandis que le cas général *amène* jusqu'à une équation différentielle partielle.

Ici on *considère* des variantes différentes selon les longueurs des vilebrequins.

1. CAS DE VILEBREQUINS AVEC LONGUEUR INFINIE ET COEFFICIENTS THERMIQUES DIFFÉRENTS.

Le système tribomécanique est représenté à Fig. 1. On suppose que les deux vilebrequins ont une longueur infinie et que leurs coefficients thermiques λ_i , c_i , ρ_i

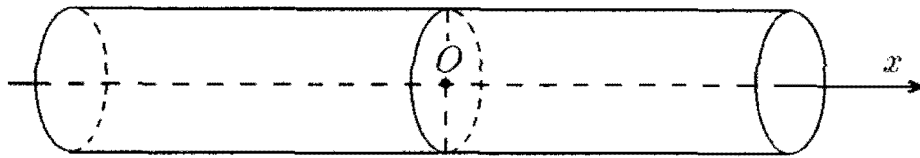


Fig. 1

sont différents. On suppose aussi que les corps ont une isolation thermique, c'est-à-dire il n'y a pas un échange thermique avec l'environnement.

A cause des dimensions minimales de la section transversale la température dépendra seulement de x et t , c'est-à-dire l'équation (1) se réduit aux équations

$$(7) \quad \frac{1}{a_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2},$$

$$(8) \quad \frac{1}{a_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2},$$

où a_1 et a_2 sont données de (6).

Respectivement les conditions initiales et limitées sont données par les formules

$$(9) \quad \theta_1(x, 0) = \theta_2(x, 0) = T_0,$$

$$(10) \quad \theta_1(\infty, t) = T_0,$$

$$(11) \quad \theta_2(-\infty, t) = T_0,$$

$$(12) \quad \theta_1(0, t) = \theta_2(0, t).$$

On déduira en détail la condition (5) pour le cas concret. On suppose que l'énergie mécanique du frottement se transforme entièrement en chaleur. La quantité de la chaleur qui se forme pour un temps dt de la surface dS est égale à la grandeur

$$(13) \quad dQ_{(dS)} = J \frac{f N}{S} dS v dt,$$

où N est la charge normale entre les vilebrequins. Ici on a

$$(14) \quad \begin{aligned} dS &= r dr d\varphi, \\ v &= r\omega \end{aligned}$$

à cause de la rotation uniforme ω . On remplace (14) en (13) et on obtient

$$(15) \quad dQ_{(dS)} = J f p \omega r^2 dr d\varphi dt,$$

où $p = \frac{N}{S}$ est la pression nominale.

La quantité de la chaleur qui se forme dans toute section transversale se trouve de (15), c'est-à-dire

$$dQ = J f p \omega \int_0^{r_0} r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi dt,$$

où r_0 est le rayon du vilebrequin. On trouve après l'intégration

$$(16) \quad dQ = \frac{2\pi}{3} J f p \omega r_0^3 dt.$$

On note avec dQ_1 et dQ_2 les flux thermiques des deux vilebrequins. Selon la loi de Fourier on a

$$(17) \quad \begin{aligned} dQ_1 &= -\lambda_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} (0, t) S dt, \\ dQ_2 &= \lambda_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} (0, t) S dt, \end{aligned}$$

où $S = \pi r_0^2$ et λ_1, λ_2 sont les coefficients de la conductivité thermique. Evidemment

$$(18) \quad dQ_1 + dQ_2 = dQ.$$

On remplace (17) et (16) en (18) et on trouve la condition limitée

$$(19) \quad \lambda_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} (0, t) - \lambda_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} (0, t) = \frac{2}{3} J f p \omega r_0.$$

Le problème de la détermination des champs thermiques des deux corps se réduit à la solution des équations (7) et (8) par les conditions (9) — (12) et (19). On utilise la méthode symbolique de Heaviside [4]. Pour ce but on applique l'opération de Laplace vers (7) et on obtient selon (9)

$$(20) \quad \frac{\partial^2 \theta_{L_1}}{\partial x^2} - \frac{s}{a_1} \theta_{L_1} = -\frac{T_0}{a_1},$$

ou

$$(21) \quad \theta_{L_1}(x, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \theta_1(x, t) dt.$$

La solution générale de (20) a la forme

$$(22) \quad \theta_{L_1}(x, s) = \frac{T_0}{s} + B_1(s) e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}} x} + B_2(s) e^{\sqrt{\frac{s}{a_1}} x}, \quad x \geq 0,$$

où $B_1(s)$ et $B_2(s)$ sont des coefficients inconnus. Analogiquement de (8) on trouve

$$(23) \quad \theta_{L_2}(x, s) = \frac{T_0}{s} + B_3(s) e^{\sqrt{\frac{s}{a_2}} x} + B_4(s) e^{-\sqrt{\frac{s}{a_2}} x}, \quad x \leq 0.$$

Les conditions limitées (10) et (11) selon (22) et (23) s'expriment par les dépendances

$$(24) \quad B_2(s) = B_4(s) = 0.$$

On applique l'opération inverse de Laplace vers (22) et (23) et on obtient selon

$$(24) \quad \begin{aligned} \theta_1(x, t) &= T_0 + L^{-1} \left[B_1(s) e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}} x} \right], \quad x \geq 0, \\ \theta_2(x, t) &= T_0 + L^{-1} \left[B_3(s) e^{\sqrt{\frac{s}{a_2}} x} \right], \quad x \leq 0. \end{aligned}$$

De la condition (12) on trouve

$$(26) \quad B_1(s) = B_3(s).$$

La condition (19) selon (25) et (26) se réduit jusqu'à la dépendance

$$(27) \quad \frac{\lambda_2}{\sqrt{a_2}} L^{-1} [\sqrt{s} B_1(s)] + \frac{\lambda_1}{\sqrt{a_1}} L^{-1} [\sqrt{s} B_1(s)] = \frac{2}{3} J f p \omega r_0.$$

On applique l'opération de Laplace vers (27) et on obtient

$$(28) \quad B_1(s) = B_3(s) = \frac{2}{3} J f p \omega r_0 \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{s^{\frac{3}{2}} (\lambda_2 \sqrt{a_1} + \lambda_1 \sqrt{a_2})}.$$

On remplace (28) en (25) et on trouve les formules suivantes pour les champs thermiques:

$$(29) \quad \theta_1(x, t) = T_0 + \frac{2}{3} J f p \omega r_0 \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{\lambda_2 \sqrt{a_1} + \lambda_1 \sqrt{a_2}} L^{-1} \left[\frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}} x}}{s^{\frac{3}{2}}} \right], \quad x \geq 0,$$

$$(30) \quad \theta_2(x, t) = T_0 + \frac{2}{3} J f p \omega r_0 \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{\lambda_2 \sqrt{a_1} + \lambda_1 \sqrt{a_2}} L^{-1} \left[\frac{e^{\sqrt{\frac{s}{a_1}} x}}{s^{\frac{3}{2}}} \right], \quad x \leq 0.$$

Pour calculer l'opérateur inverse de Laplace on prend une formule connue de la théorie de la conductivité thermique [4]:

$$(31) \quad L^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-k \sqrt{s}} \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{k^2}{4t}} \quad (k > 0).$$

On peut prouver la formule

$$(32) \quad \int_{k_1}^{k_2} L^{-1} [\Phi(k, s)] dk = L^{-1} \left[\int_{k_1}^{k_2} \Phi(k, s) dk \right],$$

où $\Phi(k, s)$ est une fonction intégrable arbitraire. On applique deux fois la formule (32) vers (31) et après des calculs respectifs on obtient la dépendance

$$(33) \quad L^{-1} \left[\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} e^{-k \sqrt{s}} \right] = \frac{k}{\sqrt{\pi t}} \int_0^k e^{-\frac{u^2}{4t}} du + 2 \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{k^2}{4t}} - k,$$

où k est un paramètre positif arbitraire. Selon (33) on obtient par $k = \frac{x}{\sqrt{a_1}}$

$$(34) \quad L^{-1} \left[\frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}} x}}{s^{\frac{3}{2}}} \right] = \frac{x}{\sqrt{a_1} \sqrt{\pi t}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{a_1}}} e^{-\frac{u^2}{4t}} du + 2 \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a_1 t}} - \frac{x}{\sqrt{a_1}}, \quad x > 0.$$

L'expression (34) peut être inscrite encore de la manière suivante:

$$(35) \quad L^{-1} \left[\frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}} x}}{s^{\frac{3}{2}}} \right] = \frac{1}{\sqrt{a_1}} \left[\frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha + 2 \sqrt{\frac{a_1 t}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a_1 t}} - x \right], \quad x > 0.$$

Analogiquement on trouve

$$(36) \quad L^{-1} \left[\frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{a_2}} x}}{s^{\frac{3}{2}}} \right] = \frac{1}{\sqrt{a_2}} \left[-\frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha + 2 \sqrt{\frac{a_2 t}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a_2 t}} + x \right], \quad x < 0.$$

On remplace (35) et (36) en (29) et (30) et on obtient les champs thermiques de deux vilebrequins

$$(37) \quad \begin{aligned} \theta_1(x, t) = & T_0 + \frac{2}{3} J f p \omega r_0 \frac{\sqrt{a_2}}{\lambda_2 \sqrt{a_1} + \lambda_1 \sqrt{a_2}} \\ & \times \left[\frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha + 2 \sqrt{\frac{a_1 t}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a_1 t}} - x \right], \quad x \geq 0, \\ \theta_2(x, t) = & T_0 + \frac{2}{3} J f p \omega r_0 \frac{\sqrt{a_1}}{\lambda_2 \sqrt{a_1} + \lambda_1 \sqrt{a_2}} \\ & \times \left[-\frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha + 2 \sqrt{\frac{a_2 t}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a_2 t}} + x \right], \quad x \leq 0. \end{aligned}$$

La température du frottement se détermine de (37) par $x = 0$, c'est-à-dire on a

$$(38) \quad \theta_1(0, t) = \theta_2(0, t) = T_0 + \frac{4}{3} J f p \omega r_0 \frac{\sqrt{a_1 a_2} \sqrt{t}}{\sqrt{\pi} (\lambda_2 \sqrt{a_1} + \lambda_1 \sqrt{a_2})}.$$

On voit de (38) que la température du frottement grandit sans restriction avec le temps.

De (17) et (37) on peut déterminer la distribution des flux thermiques. On a

$$(39) \quad \begin{aligned} dQ_1 = & \frac{2}{3} J f p \omega r_0 \frac{\lambda_1 \sqrt{a_2}}{\lambda_2 \sqrt{a_1} + \lambda_1 \sqrt{a_2}} S dt, \\ dQ_2 = & \frac{2}{3} J f p \omega r_0 \frac{\lambda_2 \sqrt{a_1}}{\lambda_2 \sqrt{a_1} + \lambda_1 \sqrt{a_2}} S dt. \end{aligned}$$

De (39) on trouve le rapport

$$\frac{dQ_2}{dQ_1} = \frac{\lambda_2 \sqrt{a_1}}{\lambda_1 \sqrt{a_2}},$$

où selon (6) on trouve la dépendance

$$(40) \quad \frac{dQ_2}{dQ_1} = \frac{\sqrt{\lambda_2 c_2 \rho_2}}{\sqrt{\lambda_1 c_1 \rho_1}}.$$

Le rapport (40) est connu dans la littérature comme la formule de Charon [6]. Cette formule n'est pas valide pour des autres systèmes tribologiques.

2. CAS DE VILEBREQUINS AVEC UNE LONGUEUR FINIE ET COEFFICIENTS THERMIQUES DIFFÉRENTS

Le système tribologique est représenté aussi à Fig. 1 mais les deux vilebrequins ont une longueur finie respectivement l_1 et l_2 . Pour une simplicité dans les considérations on suppose que les longueurs sont liées avec la dépendance

$$(41) \quad \frac{l_2}{l_1} = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}.$$

Il faut résoudre aussi les équations (7) et (8) mais par les conditions suivantes:

$$(42) \quad \theta_1(x, 0) = \theta_2(x, 0) = T_0,$$

$$(43) \quad \theta_1(l_1, t) = T_0,$$

$$(44) \quad \theta_2(-l_2, t) = T_0$$

et la condition (12). La condition (19) est la même.

De nouveau on applique la méthode de Heaviside vers les équations (7) et (8), c'est-à-dire on trouve

$$(45) \quad \theta_{L_1}(x, s) = \frac{T_0}{s} + B_1(s) e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}} x} + B_2(s) e^{\sqrt{\frac{s}{a_1}} x}, \quad x \geq 0,$$

$$(46) \quad \theta_{L_2}(x, s) = \frac{T_0}{s} + B_3(s) e^{\sqrt{\frac{s}{a_2}} x} + B_4(s) e^{-\sqrt{\frac{s}{a_2}} x}, \quad x \leq 0,$$

où θ_{L_i} se détermine de la dépendance

$$(47) \quad \theta_{L_i}(x, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \theta_i(x, t) dt \quad (i = 1, 2).$$

On applique les conditions (43) et (44) vers (45) et (46) et on obtient selon (47)

$$(48) \quad \begin{aligned} B_1(s) e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1} + B_2(s) e^{\sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1} &= 0, \\ B_3(s) e^{-\sqrt{\frac{s}{a_2}} l_2} + B_4(s) e^{\sqrt{\frac{s}{a_2}} l_2} &= 0. \end{aligned}$$

La condition (12) s'exprime par la dépendance

$$(49) \quad B_1(s) + B_2(s) = B_3(s) + B_4(s).$$

De (45) et (46) on obtient les fonctions originales

$$(50) \quad \theta_1(x, t) = T_0 + L^{-1} \left[B_1(s) e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}} x} + B_2(s) e^{\sqrt{\frac{s}{a_1}} x} \right], \quad x \geq 0,$$

$$(51) \quad \theta_2(x, t) = T_0 + L^{-1} \left[B_3(s) e^{\sqrt{\frac{s}{a_2}} x} + B_4(s) e^{-\sqrt{\frac{s}{a_2}} x} \right], \quad x \leq 0.$$

On applique la condition (19) vers (50) et (51) et après quelques calculs on trouve

$$(52) \quad \lambda_2 \sqrt{a_1} (B_3 - B_4) + \lambda_1 \sqrt{a_2} (B_1 - B_2) = \frac{2}{3} \frac{J f p \omega r_0 \sqrt{a_1 a_2}}{s^{\frac{3}{2}}}.$$

Les équations (48), (49) et (52) forment un système de quatre équations relatives à $B_1(s)$, $B_2(s)$, $B_3(s)$, $B_4(s)$. La solution de ce système se détermine par les formules

$$(53) \quad B_1(s) =$$

$$\frac{\frac{2}{3} J f p \omega r_0 \sqrt{a_1 a_2} (1 - e^{-2\sqrt{\frac{s}{a_2}} l_2})}{s^{\frac{3}{2}} [\lambda_2 \sqrt{a_1} (1 + e^{-2\sqrt{\frac{s}{a_2}} l_2}) (1 - e^{-2\sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1}) + \lambda_1 \sqrt{a_2} (1 + e^{-2\sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1}) (1 - e^{-2\sqrt{\frac{s}{a_2}} l_2})]},$$

$$B_2(s) =$$

$$\frac{-\frac{2}{3} J f p \omega r_0 \sqrt{a_1 a_2} e^{-2\sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1} (1 - e^{-2\sqrt{\frac{s}{a_2}} l_2})}{s^{\frac{3}{2}} [\lambda_2 \sqrt{a_1} (1 + e^{-2\sqrt{\frac{s}{a_2}} l_2}) (1 - e^{-2\sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1}) + \lambda_1 \sqrt{a_2} (1 + e^{-2\sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1}) (1 - e^{-2\sqrt{\frac{s}{a_2}} l_2})]},$$

$$B_3(s) =$$

$$\frac{\frac{2}{3} J f p \omega r_0 \sqrt{a_1 a_2} (1 - e^{-2\sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1})}{s^{\frac{3}{2}} [\lambda_2 \sqrt{a_1} (1 + e^{-2\sqrt{\frac{s}{a_2}} l_2}) (1 - e^{-2\sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1}) + \lambda_1 \sqrt{a_2} (1 + e^{-2\sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1}) (1 - e^{-2\sqrt{\frac{s}{a_2}} l_2})]},$$

$$B_4(s) =$$

$$\frac{-\frac{2}{3} J f p \omega r_0 \sqrt{a_1 a_2} e^{-2\sqrt{\frac{s}{a_2}} l_2} (1 - e^{-2\sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1})}{s^{\frac{3}{2}} [\lambda_2 \sqrt{a_1} (1 + e^{-2\sqrt{\frac{s}{a_2}} l_2}) (1 - e^{-2\sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1}) + \lambda_1 \sqrt{a_2} (1 + e^{-2\sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1}) (1 - e^{-2\sqrt{\frac{s}{a_2}} l_2})]},$$

Selon la dépendance (41) de (53) on trouve

$$\begin{aligned}
 B_1(s) &= \frac{\frac{2}{3} J f p \omega r_0 \sqrt{a_1 a_2}}{s^{\frac{3}{2}} (\lambda_2 \sqrt{a_1} + \lambda_1 \sqrt{a_2}) (1 + e^{-2 \sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1})}, \\
 B_2(s) &= -\frac{\frac{2}{3} J f p \omega r_0 \sqrt{a_1 a_2} e^{-2 \sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1}}{s^{\frac{3}{2}} (\lambda_2 \sqrt{a_1} + \lambda_1 \sqrt{a_2}) (1 + e^{-2 \sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1})}, \\
 B_3(s) &= \frac{\frac{2}{3} J f p \omega r_0 \sqrt{a_1 a_2}}{s^{\frac{3}{2}} (\lambda_2 \sqrt{a_1} + \lambda_1 \sqrt{a_2}) (1 + e^{-2 \sqrt{\frac{s}{a_2}} l_2})}, \\
 B_4(s) &= -\frac{\frac{2}{3} J f p \omega r_0 \sqrt{a_1 a_2} e^{-2 \sqrt{\frac{s}{a_2}} l_2}}{s^{\frac{3}{2}} (\lambda_2 \sqrt{a_1} + \lambda_1 \sqrt{a_2}) (1 + e^{-2 \sqrt{\frac{s}{a_2}} l_2})}.
 \end{aligned}
 \tag{54}$$

On remplace les coefficients (54) en (50) et (51) et on obtient

$$\theta_1(x, t) = T_0 + \frac{\frac{2}{3} J f p \omega r_0 \sqrt{a_1 a_2}}{\lambda_2 \sqrt{a_1} + \lambda_1 \sqrt{a_2}} L^{-1} \left[\frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}} x} - e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}} (2l_1 - x)}}{s^{\frac{3}{2}} (1 + e^{-2 \sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1})} \right], \quad x \geq 0,
 \tag{55}$$

$$\theta_2(x, t) = T_0 + \frac{\frac{2}{3} J f p \omega r_0 \sqrt{a_1 a_2}}{\lambda_2 \sqrt{a_1} + \lambda_1 \sqrt{a_2}} L^{-1} \left[\frac{e^{\sqrt{\frac{s}{a_2}} x} - e^{-\sqrt{\frac{s}{a_2}} (l_2 - x)}}{s^{\frac{3}{2}} (1 + e^{-2 \sqrt{\frac{s}{a_2}} l_2})} \right], \quad x \leq 0.
 \tag{56}$$

Pour le calcul de l'opérateurs inverses de Laplace on utilise le théorème du retournement [7], c'est-à-dire on a

$$L^{-1} \left[\frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}} x} - e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}} (2l_1 - x)}}{s^{\frac{3}{2}} (1 + e^{-2 \sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1})} \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega - i\infty}^{\gamma + i\omega} e^{st} \frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}} x} - e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}} (2l_1 - x)}}{s^{\frac{3}{2}} (1 + e^{-2 \sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1})} ds,
 \tag{57}$$

où γ et ω sont des nombres réels et positifs. Pour le calcul de l'intégrale en (57) on construit un contour représentant le droit $x = \gamma$ et la circonférence (C) avec un centre O et un rayon R . On fait une intégration dans un domaine complexe de la fonction sous l'intégrale sur le contour donné. On applique le théorème des résidus [10] sur ce contour et on obtient

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\omega}^{\gamma + i\omega} e^{st} \frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}} x} - e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}} (2l_1 - x)}}{s^{\frac{3}{2}} (1 + e^{-2 \sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1})} ds \\
 &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} e^{st} \frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}} x} - e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}} (2l_1 - x)}}{s^{\frac{3}{2}} (1 + e^{-2 \sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1})} ds = \text{Res}(0) + \sum_m \text{Res}(s_m).
 \end{aligned}
 \tag{58}$$

On peut prouver que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} e^{st} \frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}} x} - e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}} (2l_1 - x)}}{s^{\frac{3}{2}} (1 + e^{-2 \sqrt{\frac{s}{a_1}} l_1})} ds = 0.
 \tag{59}$$

Les résidus de l'intégrale en (58) sont pour les grandeurs $s = 0$ et $s = s_m$ qui sont les racines de l'équation

$$(60) \quad 1 + e^{-2\sqrt{\frac{s}{a_1}}l_1} = 0.$$

Dans le domaine complexe pour (60) on a des racines qui se déterminent par l'expression

$$(61) \quad \sqrt{s_m} = -i \frac{\pi \sqrt{a_1}}{2l_1} (2m+1) \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

ou par les grandeurs

$$(61') \quad s_m = -\frac{\pi^2 a_1}{4l_1^2} (2m+1)^2 \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Pour calculer $\text{Res}(0)$ on représente la fonction sous l'intégrale de la manière suivante:

$$(62) \quad e^{st} \frac{2\sqrt{\frac{s}{a_1}}(l_1 - x) + s\Phi(s, x)}{s\sqrt{s}(1 + e^{-2\sqrt{\frac{s}{a_1}}l_1})}.$$

De (62) on suit que

$$(63) \quad \text{Res}(0) = \frac{l_1 - x}{\sqrt{a_1}}.$$

On prend les résidus pour les pôles (61') et on trouve

$$(64) \quad \text{Res}(s_m) = -e^{-\frac{\pi^2 a_1}{4l_1^2} (2m+1)^2 t} \frac{8l_1 \cos \frac{\pi x}{2l_1} (2m+1)}{\pi^2 \sqrt{a_1} (2m+1)^2}.$$

Selon (57) — (59), (63) et (64) on obtient la valeur suivante pour l'opérateur inverse de Laplace:

$$(65) \quad L^{-1} \left[\frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}}x} - e^{-\sqrt{\frac{s}{a_1}}(2l_1-x)}}{s^{\frac{3}{2}}(1 + e^{-2\sqrt{\frac{s}{a_1}}l_1})} \right] \\ = \frac{l_1 - x}{\sqrt{a_1}} - \frac{8l_1}{\sqrt{a_1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi x}{2l_1} (2m+1)}{(2m+1)^2} e^{-\frac{\pi^2 a_1}{4l_1^2} (2m+1)^2 t}$$

La série infinie en (65) est absolument et uniformément convergente à cause de la convergence de la série $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}$.

On remplace (65) en (55) et on trouve

$$(66) \quad \theta_1(x, t) = T_0 + \frac{\frac{2}{3} J f p \omega r_0 \sqrt{a_2}}{\lambda_2 \sqrt{a_1} + \lambda_1 \sqrt{a_2}} \\ \times \left[l_1 - x - \frac{8l_1}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi x}{2l_1} (2m+1)}{(2m+1)^2} e^{-\frac{\pi^2 a_1}{4l_1^2} (2m+1)^2 t} \right].$$

La formule (66) a une structure compliquée. On peut vérifier que $\theta_1(x, t)$ satisfait l'équation (7) et la condition (43). La condition (42) est vérifiée par l'existence de l'identité

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi x}{2l_1} (2m+1)}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} (l_1 - x).$$

Cette identité se constate facilement par les séries de Fourier [9].

Analogiquement pour le champ thermique de vilebrequin immobile on obtient

$$(67) \quad \theta_2(x, t) = T_0 + \frac{\frac{2}{3} J f \rho \omega r_0 \sqrt{a_1}}{\lambda_2 \sqrt{a_1} + \lambda_1 \sqrt{a_2}} \times \left[l_2 + x - \frac{8l_2}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi x}{2l_2} (2m+1)}{(2m+1)^2} e^{-\frac{\pi^2 a_2}{4l_2^2} (2m+1)^2 t} \right].$$

La température du frottement pour les deux vilebrequins est donnée de la formule

$$(68) \quad \theta_1(0, t) = \theta_2(0, t) = T_0 + \frac{\frac{2}{3} J f \rho \omega r_0 l_1 \sqrt{a_2}}{\lambda_2 \sqrt{a_1} + \lambda_1 \sqrt{a_2}} \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi^2 a_1}{4l_1^2} (2m+1)^2 t}}{(2m+1)^2} \right].$$

L'égalité de $\theta_1(0, t)$ et $\theta_2(0, t)$ suit de (41). Après un temps infini on obtient de (68) la formule stationnaire pour la température

$$(69) \quad \theta_1 = \theta_2 = T_0 + \frac{\frac{2}{3} J f \rho \omega r_0 l_1 \sqrt{a_2}}{\lambda_2 \sqrt{a_1} + \lambda_1 \sqrt{a_2}}.$$

La distribution des flux thermiques on trouve de (17), (66), (67). On a

$$(70) \quad \begin{aligned} dQ_1 &= \frac{\frac{2}{3} J f \rho \omega r_0 \lambda_1 \sqrt{a_2}}{\lambda_2 \sqrt{a_1} + \lambda_1 \sqrt{a_2}} S dt, \\ dQ_2 &= \frac{\frac{2}{3} J f \rho \omega r_0 \lambda_2 \sqrt{a_1}}{\lambda_2 \sqrt{a_1} + \lambda_1 \sqrt{a_2}} S dt. \end{aligned}$$

Selon (6) de (70) on obtient

$$(71) \quad \frac{dQ_2}{dQ_1} = \frac{\sqrt{\lambda_2 c_2 \rho_2}}{\sqrt{\lambda_1 c_1 \rho_1}},$$

c'est-à-dire de nouveau la dépendance de Charon [6].

Comme un cas particulier considérons des vilebrequins avec une longueur identique et des coefficients thermiques identiques. Alors le rapport (41) est vrai. De (71) on trouve

$$\frac{dQ_2}{dQ_1} = 1,$$

c'est-à-dire la quantité de la chaleur du frottement se distribue en parties égales en deux vilebrequins.

Le champ thermique a la forme

$$(72) \quad \theta(x, t) = T_0 + \frac{J f p \omega r_0}{3\lambda} \left[l - x - \frac{8l}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi x}{2l} (2m+1)}{(2m+1)^2} e^{-\frac{\pi^2 a}{4l^2} (2m+1)^2 t} \right],$$

où l est la longueur du vilebrequin. La température du frottement s'obtient de (72) par $x = 0$, c'est-à-dire on a

$$(73) \quad \theta(0, t) = T_0 + \frac{J f p \omega r_0 l}{3\lambda} \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} e^{-\frac{\pi^2 a}{4l^2} (2m+1)^2 t} \right].$$

Après un temps infini de (73) s'obtient la température stationnaire

$$(74) \quad \theta_{st} = T_0 + \frac{J f p \omega r_0 l}{3\lambda}.$$

La formule (74) exprime la température maximale du système des corps.

On prend un exemple numérique pour (74). On a les données numériques suivantes: $T_0 = 0$, $N = 100$ kg, $\omega = 100\text{s}^{-1}$, $f = 0.1$, $r_0 = 5$ cm, $l = 100$ cm, $\lambda = 1.08 \times 10^{-4} \frac{\text{cal}}{\text{cm s grad}}$, $J = \frac{10^{-4}}{4.27}$. On trouve $p = 1.24 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. De (74) on obtient

$$(75) \quad \theta_{\max} = 448^\circ\text{C}.$$

On note que nos considérations supposent que toute la surface nominale participe au frottement. Si on considère un frottement des surfaces rugueux on obtient une température plus petite de (75).

3. CAS DE VILEBREQUINS INFINI ET FINI AVEC COEFFICIENTS THERMIQUES IDENTIQUES

On considère le problème thermique quand le vilebrequin tournant a une longueur finie l mais le vilebrequin immobile a une longueur infinie. Les deux corps ont des coefficients thermiques identiques, c'est-à-dire

$$\lambda_1 = \lambda_2, \quad c_1 = c_2, \quad \rho_1 = \rho_2.$$

Les équations de la conductivité thermique sont

$$(76) \quad \frac{1}{a} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2}, \quad x \geq 0,$$

$$(77) \quad \frac{1}{a} \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2}, \quad x \leq 0.$$

Les conditions initiales et limitées sont

$$(78) \quad \theta_1(x, 0) = \theta_2(x, 0) = T_0,$$

$$(79) \quad \theta_1(l, t) = T_0,$$

$$(80) \quad \theta_2(-\infty, t) = T_0,$$

$$(81) \quad \theta_1(0, t) = \theta_2(0, t),$$

$$(82) \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial x}(0, t) - \frac{\partial \theta_1}{\partial x}(0, t) = \frac{2}{3} \frac{J f p \omega r_0}{\lambda}.$$

Selon la méthode de Heaviside on a

$$(83) \quad \theta_{L_1}(x, s) = \frac{T_0}{s} + B_1(s) e^{-\sqrt{\frac{s}{a}} x} + B_2(s) e^{\sqrt{\frac{s}{a}} x}, \quad x \geq 0,$$

$$(84) \quad \theta_{L_2}(x, s) = \frac{T_0}{s} + B_3(s) e^{\sqrt{\frac{s}{a}} x} + B_4(s) e^{-\sqrt{\frac{s}{a}} x}, \quad x \leq 0,$$

où $\theta_{L_i}(x, s)$ se détermine de (47). On applique les conditions (79) — (82) et on obtient

$$(85) \quad \begin{aligned} B_1(s) e^{-\sqrt{\frac{s}{a}} l} + B_2(s) e^{\sqrt{\frac{s}{a}} l} &= 0, \\ B_4(s) &= 0, \\ B_1(s) + B_2(s) &= B_3(s), \\ B_1(s) - B_2(s) + B_3(s) &= \frac{2}{3} \frac{J f p \omega r_0 \sqrt{a}}{s^{\frac{3}{2}} \lambda}. \end{aligned}$$

Le système (85) a la solution suivante:

$$(86) \quad \begin{aligned} B_1(s) &= \frac{J f p \omega r_0 \sqrt{a}}{3 \lambda s^{\frac{3}{2}}}, \\ B_2(s) &= -\frac{J f p \omega r_0 \sqrt{a}}{3 \lambda s^{\frac{3}{2}}} e^{-2 \sqrt{\frac{s}{a}} l}, \\ B_3(s) &= \frac{J f p \omega r_0 \sqrt{a}}{3 \lambda s^{\frac{3}{2}}} (1 - e^{-2 \sqrt{\frac{s}{a}} l}), \\ B_4(s) &= 0. \end{aligned}$$

On prend l'opérateur inverse de Laplace de (83) et (84) et selon (86) on obtient

$$(87) \quad \theta_1(x, t) = T_0 + \frac{J f p \omega r_0 \sqrt{a}}{3 \lambda} L^{-1} \left[\frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{a}} x}}{s^{\frac{3}{2}}} - \frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{a}} (2l-x)}}{s^{\frac{3}{2}}} \right], \quad x \geq 0,$$

$$(88) \quad \theta_2(x, t) = T_0 + \frac{J f p \omega r_0 \sqrt{a}}{3 \lambda} L^{-1} \left[\frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{a}} |x|}}{s^{\frac{3}{2}}} - \frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{a}} (2l+|x|)}}{s^{\frac{3}{2}}} \right], \quad x \leq 0.$$

On applique la formule (33) à (87) et (88) et après des calculs respectifs on trouve

$$(89) \quad \begin{aligned} \theta_1(x, t) = T_0 + \frac{2 J f p \omega r_0}{3 \lambda} & \left[\frac{x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2 \sqrt{at}}} e^{-\alpha^2} d\alpha - \frac{2l-x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{2l-x}{2 \sqrt{at}}} e^{-\alpha^2} d\alpha \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{at}{\pi}} \left(e^{-\frac{x^2}{4at}} - e^{-\frac{(2l-x)^2}{4at}} \right) + l - x \right], \quad x \geq 0, \end{aligned}$$

$$(90) \quad \theta_2(x, t) = T_0 + \frac{2Jfp\omega r_0}{3\lambda} \left[-\frac{x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-\frac{x}{2\sqrt{at}}} e^{-\alpha^2} d\alpha - \frac{2l-x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{2l-x}{2\sqrt{at}}} e^{-\alpha^2} d\alpha \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{at}{\pi}} \left(e^{-\frac{x^2}{rat}} - e^{-\frac{(2l-x)^2}{rat}} \right) + l \right], \quad x \leq 0.$$

La température du frottement s'obtient par $x = 0$, c'est-à-dire on a

$$(91) \quad \theta_1(0, t) = \theta_2(0, t) \\ = T_0 + \frac{2Jfp\omega r_0}{3\lambda} \left[l + \sqrt{\frac{at}{\pi}} (1 - e^{-\frac{l^2}{at}}) - \frac{2l}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{l}{\sqrt{at}}} e^{-\alpha^2} d\alpha \right].$$

Après un temps infini ($t \rightarrow \infty$) on obtient de (91) la température stationnaire

$$(92) \quad \theta_{st} = T_0 + \frac{2Jfp\omega r_0 l}{3\lambda}.$$

La formule (92) est pareille à (74) quand les deux corps ont une longueur finie. On trouve la distribution des flux thermiques de (17), (89) et (90). On a

$$(93) \quad dQ_1 = \frac{2Jfp\omega r_0}{3} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{l/\sqrt{at}} e^{-\alpha^2} d\alpha \right] S dt, \\ dQ_2 = \frac{2Jfp\omega r_0}{3\sqrt{\pi}} \int_0^{l/\sqrt{at}} e^{-\alpha^2} d\alpha \cdot S dt.$$

On obtient de (93) le rapport

$$(94) \quad \frac{dQ_2}{dQ_1} = \frac{\int_0^{l/\sqrt{at}} e^{-\alpha^2} d\alpha}{\sqrt{\pi} - \int_0^{l/\sqrt{at}} e^{-\alpha^2} d\alpha}.$$

La formule (94) montre que le rapport des flux thermiques n'est pas une constante mais qu'il est une fonction du temps. Au moment initial on a

$$\frac{dQ_2}{dQ_1} = 1,$$

c.-à.-d. les flux thermiques sont égales. Après un temps infini on a de (93)

$$(95) \quad dQ_1 \rightarrow \frac{2Jfp\omega r_0}{3} S dt, \\ dQ_2 \rightarrow 0.$$

Le résultat (95) montre que par des conditions stationnaires le flux thermique dans le vilebrequin avec une longueur infinie diminue et converge vers zéro. Le flux thermique du vilebrequin avec une longueur finie grandit et obtient toute la chaleur du frottement avec le temps.

4. SYSTÈME TRIBOMÉCANIQUE EN ASPECT THERMODYNAMIQUE

Ici nous considérons les systèmes tribomécaniques étudiés en un aspect thermodynamique. On détermine l'entropie du même système en zone du frottement selon le second principe de la thermodynamique. Il est notoire [11] que la méthode de l'entropie a une grande signification pour la valeur de l'usure d'un système tribomécanique.

La quantité de la chaleur qui se forme pour le temps dt dans la zone du frottement à la système considéré se détermine ainsi

$$(96) \quad dQ = \frac{2\pi}{3} J f p \omega r_0^3 dt.$$

Quand les vilebrequins ont une longueur infinie nous avons obtenu pour le champ thermique la formule suivante:

$$(97) \quad \theta(x, t) = T_0 + \frac{2}{3} J f p \omega r_0 \frac{\sqrt{a_2}}{\lambda_1 \sqrt{a_2} + \lambda_2 \sqrt{a_1}} \times \left[\frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha + 2 \sqrt{\frac{a_1 t}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a_1 t}} - x \right], \quad x \geq 0.$$

La température du frottement se détermine par $x = 0$, c.-à.-d. on a

$$(98) \quad \theta(0, t) = T_0 + \frac{4}{3} J f p \omega r_0 \frac{\sqrt{a_1 a_2 t}}{\sqrt{\pi} [\lambda_1 \sqrt{a_2} + \lambda_2 \sqrt{a_1}]}.$$

Selon le second principe de la thermodynamique on a

$$(99) \quad dU = T dS - p dV,$$

où U est l'énergie intérieure, S — l'entropie, et V — le volume du système. Dans le cas considéré $dV = 0$ et $U = Q$, où Q est la quantité de la chaleur, c.-à.-d. de (99) on obtient

$$dQ = T dS.$$

D'ici pour l'entropie on trouve

$$(100) \quad dS = \frac{dQ}{T}.$$

Pour le système donné selon (96), (98) on obtient de (100)

$$(101) \quad dS = \frac{\frac{2\pi}{3} J f p \omega r_0^3 dt}{T_0 + \frac{4}{3} J f p \omega r_0 \frac{\sqrt{a_1 a_2 t}}{\sqrt{\pi} (\lambda_1 \sqrt{a_2} + \lambda_2 \sqrt{a_1})}},$$

ou on trouve pour l'entropie

$$(102) \quad S = S_0 + \frac{2\pi}{3} J f p \omega r_0^3 \int_0^t \frac{dt}{T_0 + \frac{4}{3} J f p \omega r_0 \frac{\sqrt{a_1 a_2} \sqrt{t}}{\sqrt{\pi(\lambda_1 \sqrt{a_2} + \lambda_2 \sqrt{a_1})}}},$$

où S_0 est l'entropie initiale. Après l'intégration on obtient

$$(103) \quad S = S_0 + \pi r_0^2 \frac{\lambda_1 \sqrt{a_2} + \lambda_2 \sqrt{a_1}}{\sqrt{a_1 a_2}} \sqrt{t} - \frac{3\pi r_0 (\lambda_1 \sqrt{a_2} + \lambda_2 \sqrt{a_1})^2 T_0}{4 f p J \omega a_1 a_2} \times \ln \left(1 + \frac{4 J f p \omega r_0 \sqrt{a_1 a_2} t}{3 T_0 (\lambda_1 \sqrt{a_2} + \lambda_2 \sqrt{a_1})} \right).$$

La formule (103) nous donne le développement de l'entropie dans la zone du frottement pour le système tribomécanique donné.

Maintenant on considère une autre variante du même système, c.-à.-d. quand les vilebrequins ont une longueur finie. Pour la température du frottement on a

$$(104) \quad \theta(t) = T_0 + \frac{\frac{2}{3} J f p \omega r_0 l_1 \sqrt{a_2}}{\lambda_1 \sqrt{a_2} + \lambda_2 \sqrt{a_1}} \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi^2 a_1}{4 l_1^2} (2m+1)^2 t}}{(2m+1)^2} \right], \quad t \geq 0.$$

La grandeur dQ se conserve comme en (96). Pour l'entropie on trouve de (100) et (104)

$$dS = \frac{\frac{2\pi}{3} J f p \omega r_0^3 dt}{T_0 + \frac{\frac{2}{3} J f p \omega r_0 l_1 \sqrt{a_2}}{\lambda_2 \sqrt{a_1} + \lambda_1 \sqrt{a_2}} \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi^2 a_1}{4 l_1^2} (2m+1)^2 t}}{(2m+1)^2} \right)}$$

D'ici pour le développement de l'entropie on obtient

$$(105) \quad S(t) = S_0 + \frac{2\pi}{3} J f p \omega r_0^3 \int_0^t \frac{dt}{T_0 + \frac{\frac{2}{3} J f p \omega l_1 \sqrt{a_2}}{\lambda_2 \sqrt{a_1} + \lambda_1 \sqrt{a_2}} \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi^2 a_1}{4 l_1^2} (2m+1)^2 t}}{(2m+1)^2} \right)}$$

On applique le théorème des valeurs moyennes vers (105) et on trouve

$$(106) \quad S(t) = S_0 + \frac{2\pi J f p \omega r_0^3}{3} \frac{t}{T_0 + \frac{\frac{2}{3} J f p \omega r_0 l_1 \sqrt{a_2}}{\lambda_1 \sqrt{a_2} + \lambda_2 \sqrt{a_1}} \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi^2 a_1}{4 l_1^2} (2m+1)^2 t^*}}{(2m+1)^2} \right)},$$

où $0 < t^* < t$. Si on considère le processus du développement dans une grande intervalle du temps t^* est une grandeur grande et le facteur exponentiel peut s'éliminer. Ainsi on trouve pour l'entropie

$$S(t) = S_0 + \frac{2\pi J f p \omega r_0^3 t}{3 T_0 + \frac{2 J f p \omega r_0 l_1 \sqrt{a_2}}{\lambda_1 \sqrt{a_2} + \lambda_2 \sqrt{a_1}}}$$

Evidemment elle grandit sans restriction avec le temps.

RÉFÉRENCES

1. Тихонов, А. Н., А. А. Самарский. Уравнения математической физики. М., 1966.
2. Коровчинский, М. В. Основы теории термического контакта при локальном трении. В: Новое в теории трения. М., 1966.
3. Клементьев, Н. М. Исследование коэффициента трения в зависимости от температуры контакта. — Труды Хаб. и-та инж. ж-д. транспорта, вып. 16, 1964, 250–262.
4. Лыков, А. В. Теория теплопроводности. Высшая школа, М., 1967.
5. Деч, Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М., 1971.
6. Крагельский, И. В. Трение и износ. М., 1968.
7. Карлслоу, Г., Д. Егер. Операционные методы прикладной математики.
8. Чичинадзе, А. В. Расчет и исследование внешнего трения при торможении. М., 1972.
9. Смирнов, В. И. Курс высшей математики, т. II. М., 1950.
10. Чакалов, Л. Увод в теория на аналитичните функции. С., 1955.
11. Рыжник, А. А., А. И. Филипчук, К. Г. Шучев. Термодинамический метод оценки интенсивности изнашивания трущихся материалов. Трение и износ, т. III, № 5, 1982, с. 867.

Reçu le 01.10.1994