ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 1 — Математика
Том 85, 1991

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI"

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 1 — Mathématiques
Tome 85, 1991

О (3,4)–ГРАФАХ РАМСЕЯ БЕЗ 9–КЛИК

НЕДЯЛКО НЕНОВ

Недялко Ненов. О $(3,4)$-ГРАФАХ РАМСЕЯ БЕЗ 9-КЛИК

Множество из p вершин графа называется p-кликой, если любые две из них смежны. Граф называется $(3,4)$-графом Рамсея, если в любой 2-раскраске его ребер есть одноцветная 3-клика 1-ого цвета, либо одноцветная 4-клика 2-ого цвета; β обозначает наименьшее натуральное число n для которого существует $(3,4)$-граф Рамсея с n вершинами и без 9-клик. В этой работе доказывается, что $\beta = 14$.

Nedjalko Nenov. ON THE $(3,4)$-RAMSEY GRAPHS WITHOUT 9-CLIQUES

A set of p verticles of a graph is called p-clique if any two of them are adjacent. The graph is called $(3,4)$-Ramsey graph if for every 2-colouring of the edges there exists a monochromatic 3-clique of the 1-th colour, or a monochromatic 4-clique of the 2-th colour; β denotes the minimal natural number n such that there is a $(3,4)$-Ramsey graph with n verticles and without 9-cliques. In this paper it is proved that $\beta = 14$.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Под графом будем понимать упорядоченную пару $G = (V(G), E(G))$, где $V(G)$ — конечное множество, а $E(G)$ — некоторая совкупность 2-элементных подмножеств множества $V(G)$. Элементы множества $V(G)$ называются вершинами графа G, а элементы множества $E(G)$ — ребрами графа G. Если $v_1, v_2 \in V(G)$ и $[v_1, v_2] \in E(G)$ будем говорить, что вершины v_1 и v_2 смежны. Множество вершин $v_1, \dots, v_p \in V(G)$ называется p-кликой графа G, если любые две из них смежны. Наибольшее число p, для которого граф G имеет p-клику, называется кликовым числом графа G и обозначается $\mathrm{cl}(G)$. Дополнение графа G обозначается $\overline{G}$. Напомним, что $V(\overline{G}) = V(G)$ и $[v_i, v_j] \in E(\overline{G}) \iff [v_i, v_j] \notin E(G)$. Множество вершин $V' \subset V(G)$ называется независимым множеством вершин графа G, если любые две его вершины несмежны. Наибольшее число n, для которого граф G имеет n вершин, составляющих независимое множество вершин, называется числом независимости графа G и обозначается $\alpha(G)$. Ясно, что $\alpha(G) = \mathrm{cl}(\overline{G})$. Разложение

$$V(G) = V_1 \cup \ldots \cup V_r$$

называется r-хроматическим разложением графа G, если $V_i \cap V_j = \varnothing$, $i \neq j$ и любое из множеств $V_i, 1 \leqq i \leqq r$, является независимым множеством вершин графа G. Наименьшее натуральное число r для которого граф G обладает r-хроматическим разложением называется хроматическим числом графа G и обозначается $\chi(G)$.

Граф $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$ называется подграфом графа G, если $V(G_1) \subseteq V(G)$ и $E(G_1) \subseteq E(G)$. Пусть $v_1, \ldots, v_s \in V(G)$. Через $\langle v_1, \ldots, v_s \rangle$ обозначим подграф графа G, порожденный множеством вершин $v_1, \ldots, v_s$, т. е. такой подграф G_1 для которого $V(G_1) = \{v_1, \ldots, v_s\}$ и $[v_i, v_j] \in E(G_1) \iff [v_i, v_j] \in E(G)$.

Простым циклом длины n графа G называется упорядоченное множество его вершин $v_1, \ldots, v_n \in V(G)$ такое, что $[v_1, v_2]$, $[v_2, v_3]$, $\ldots$, $[v_{n-1}, v_n]$, $[v_n, v_1] \in E(G)$ и обозначается C_n. Если $|V(G)| = n$ и любые две вершины графа G смежны, тогда G называется полным графом с n вершинами и обозначается K_n. Через $G - v$, $v \in V(G)$, обозначается подграф, получающийся от G после удаления его вершины v. Для любого подмножества $V' \subseteq V(G)$ через $\mathrm{Ad}(V')$ будем обозначать множество всех вершин графа G, которые смежны всем вершинам подмножества V'.

Пусть G_1 и G_2 — два графа без общих вершин. Через $G_1 + G_2$ обозначим граф G, для которого $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ и $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup E'$, где $E' = \{[v_1, v_2] \mid v_1 \in V(G_1),\ v_2 \in V(G_2)\}$.

2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Определение. Любое разложение $E(G) = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, называется *2-раскраской ребер графа G*.

Определение. Граф G называется *(3,4)-графом Рамсея*, если в любой 2-раскраске $E(G) = E_1 \cup E_2$ его ребер либо существует 3-клика все ребра которой принадлежат E_1, либо существует 4-клика все ребра которой принадлежат E_2.

Самым простым примером $(3,4)$-графа Рамсея является граф K_9, [4]. Из этого следует, что если $\mathrm{cl}(G) \geq 9$, тогда граф G является $(3,4)$-графом Рамсея. Существуют $(3,4)$-графы Рамсея с кликовым числом меньше 9. Таким является граф $K_4 + C_5 + C_5$, [1], [2]. В [1] и [3] доказано, что если G является $(3,4)$-графом Рамсея и $\mathrm{cl}(G) < 9$, тогда $|V(G)| \geqq 13$.

Через β обозначим наименьшее естественное число n, для которого существует $(3,4)$-граф Рамсея G с n вершинами и $\mathrm{cl}(G) < 9$. Из сказанного вытекает, что $13 \leqq \beta \leqq 14$. В настоящей работе докажем:

Теорема. *Пусть G — граф, $|V(G)| = 13$ и $\mathrm{cl}(G) < 9$. Тогда граф G не является $(3,4)$-графом Рамсея.*

Из этой теоремы следует, что окончательно $\beta = 14$.

3. НЕОБХОДИМЫЕ ЛЕММЫ

Лемма 1 ([5]). *Если $\chi(G) \leqq 8$, тогда G не является $(3,4)$-графом Рамсея.*

Лемма 2 ([1], [3]). *Пусть*

$$V(G) = V_1 \cup \ldots \cup V_9$$

является 9-хроматическим разложением графа G, такое что среди подмножеств V_i, $1 \leqq i \leqq 9$, можно выбрать три, обеединение которых порождает подграф без 3-клик. Тогда G не является $(3,4)$-графом Рамсея.

Лемма 3 ([1], [3]). *Пусть*

$$V(G) = V_1 \cup \ldots \cup V_9$$

является 9-хроматическим разложением, такое что среди подмножеств V_i, $1 \leqq i \leqq 9$, можно выбрать четыре, обеединение которых порождает подграф без 4-клик. Тогда G не является $(3,4)$-графом Рамсея.

Очевидно лемма 1 и лемма 2 следуют из леммы 3.

Лемма 4 ([1], [3]). *Пусть $|V(G)| \leqq 12$ и $\mathrm{cl}(G) < 9$. Тогда G не является $(3,4)$-графом Рамсея.*

Лемма 5. *Пусть $|V(G)| = 13$ и $\mathrm{cl}(G) < 9$. Если граф G имеет несмежные вершины u и v такие, что $\mathrm{Ad}(u) \subseteq \mathrm{Ad}(v)$, тогда G не является $(3,4)$-графом Рамсея.*

Доказательство. Рассмотрим подграф $G-u$. Согласно лемме 4 этот подграф не является $(3,4)$-графом Рамсея, т. е. существует 2-раскраска $E'_1 \cup E'_2$ его ребер такая, что нет 3-клик подграфа $G-u$ все ребра которой принадлежат E'_1 и нет 4-клики все ребра которой принадлежат E'_2. Дополним эту 2-раскраску до 2-раскраски $E_1 \cup E_2$ ребер графа G следующим образом: если $[u,w] \in E(G)$, тогда $[u,w] \in E_i \iff [v,w] \in E'_i$, $i = 1,2$, а остальные ребра раскрашены как в подграфе $G-u$. Из $[u,v] \notin E(G)$ и $\mathrm{Ad}(u) \subseteq \mathrm{Ad}(v)$ вытекает, что в $E_1 \cup E_2$ нет 3-клики все ребра которой принадлежат E_1 и нет 4-клики все ребра которой принадлежат E_2. Это означает, что G не является $(3,4)$-графом Рамсея.

Лемма 6. *Пусть $|V(G)| = 10$, $\mathrm{cl}(G) < 9$ и $\alpha(G) = 2$. Тогда дополнение $\overline{G}$ графа G имеет два ребра без общих вершин.*

Доказательство. Из $\mathrm{cl}(G) < 9$ следует, что в G есть две несмежные вершины v_1 и v_2. Если среди остальных вершин $v_3, \ldots, v_{10}$ есть две несмежные, тогда утверждение доказано. Поэтому предположим, что $\langle v_3, \ldots, v_{10}\rangle = K_8$. Из $\mathrm{cl}(G) < 9$ следует, что v_1 несмежна некоторой из вершин $v_3, \ldots, v_{10}$. Тоже самое верно и для v_2. Из $\alpha(G) = 2$ следует, что v_1 и v_2 не смежны разным вершинам множества $\{v_3, \ldots, v_{10}\}$. Этим лемма доказана.

Лемма 7. *Если* $|V(G)| = 13$, $\mathrm{cl}(G) < 9$ *и* $\alpha(G) = 2$, *тогда дополнение* $\overline{G}$ *графа* G *имеет четыре ребра любые два из которых не имеют общих вершин.*

Доказательство. Согласно лемме 6 существуют вершины $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V(G)$ такие, что $[v_1, v_2] \notin E(G)$ и $[v_3, v_4] \notin E(G)$. Остальные вершины графа G обозначим через $v_5, \ldots, v_{13}$. Из $\mathrm{cl}(G) < 9$ следует, что две из этих вершин несмежны. Пусть например $[v_5, v_6] \notin E(G)$. Положим $T = \{v_7, \ldots, v_{13}\}$. Если в T есть несмежные вершины, тогда утверждение доказано. Теперь предположим, что $\langle T \rangle = K_7$. Если $v_1 \notin \mathrm{Ad}(T)$ и $v_2 \notin \mathrm{Ad}(T)$, тогда из $\alpha(G) = 2$ следует, что v_1 и v_2 несмежны разным вершинам множества T, что доказывает утверждение леммы. Следовательно, хотя бы одна из вершин v_1, v_2 принадлежит $\mathrm{Ad}(T)$. Пусть например $v_1 \in \mathrm{Ad}(T)$. Из аналогичных соображений можно предположить еще, что $v_3 \in \mathrm{Ad}(T)$ и $v_5 \in \mathrm{Ad}(T)$. Так как $\langle T \rangle = K_7$ и $\mathrm{cl}(G) < 9$, то $\{v_1, v_3, v_5\}$ независимое множество. Это противоречит условию $\alpha(G) = 2$.

Лемма 8. *Если* $|V(G)| = 13$, $\mathrm{cl}(G) < 9$ *и* $\alpha(G) \geqq 3$, *тогда* G *не является* $(3,4)$*-графом Рамсея.*

Доказательство. Пусть $\{v_1, v_2, v_3\}$ независимое множество вершин графа G, а $v_4, \ldots, v_{13}$ остальные вершины этого же графа. Из $\mathrm{cl}(G) < 9$ следует $\alpha(\langle v_4, \ldots, v_{13} \rangle) \geqq 2$. Рассмотрим следующие два случая:

Случай 1. $\alpha(\langle v_4, \ldots, v_{13} \rangle) \geqq 3$. В этой ситуации можно предположить, что $\{v_4, v_5, v_6\}$ независимое множество. Тогда

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3\} \cup \{v_4, v_5, v_6\} \cup \{v_7\} \cup \ldots \cup \{v_{13}\} \tag{1}$$

является 9-хроматическим разложением графа G. Положим $T = \{v_7, \ldots, v_{13}\}$. Если в T есть несмежные вершины, тогда группируя несмежные его вершины из (1) получаем 8-хроматическое разложение графа G. Согласно лемме 1 G не является $(3,4)$-графом Рамсея. Предположим теперь, что в T любые две вершины смежные, т. е. $\langle T \rangle = K_7$. Одна из вершин v_1, v_2, v_3 смежна всем вершинам множества T (иначе группируя эти вершины с несмежными им вершинами множества T из (1) получаем 8-хроматическое разложение графа G и согласно лемме 1 G не является $(3,4)$-графом Рамсея. Аналогично следует, что одна из вершин v_4, v_5, v_6 тоже смежна всем вершинам множества T. Сделанные рассуждения дают нам право предположить, что $v_1 \in \mathrm{Ad}(T)$ и $v_4 \in \mathrm{Ad}(T)$. Так как $\langle T \rangle = K_7$ и $\mathrm{cl}(G) < 9$, то $[v_1, v_4] \notin E(G)$. Если $[v_1, v_5] \notin E(G)$ и $[v_1, v_6] \notin E(G)$, тогда $\mathrm{Ad}(v_1) \subseteq \mathrm{Ad}(v_4)$. Если $[v_2, v_4] \notin E(G)$ и $[v_3, v_4] \notin E(G)$, тогда $\mathrm{Ad}(v_4) \subseteq \mathrm{Ad}(v_1)$. В этом и в другом случае, согласно лемме 5, G не является $(3,4)$-графом Рамсея. И так, имеем право предположить, что $[v_1, v_5] \in E(G)$ и $[v_2, v_4] \in E(G)$. Из $\mathrm{cl}(G) < 9$ и $\langle T \rangle = K_7$ следует $v_2 \notin \mathrm{Ad}(T)$ и $v_5 \notin \mathrm{Ad}(T)$. Для вершин v_2 и v_5 представляются следующие две возможности:

Подслучай 1.a. В T нет вершины несмежной одновременно v_2 и v_5. Без ограничения общности можно предположить $[v_2, v_7] \notin E(G)$,

$[v_5,v_7] \in E(G)$ и $[v_5,v_8] \notin E(G)$, $[v_2,v_8] \in E(G)$. Если $[v_6,v_7] \in E(G)$ тогда $\mathrm{Ad}(v_2) \subseteq \mathrm{Ad}(v_7)$, а если $[v_3,v_8] \in E(G)$, то $\mathrm{Ad}(v_5) \subseteq \mathrm{Ad}(v_8)$. В том и в другом случае, согласно лемме 5, G не является $(3,4)$-графом Рамсея. Следовательно, можно предположить, что $[v_6,v_7] \notin E(G)$ и $[v_3,v_8] \notin E(G)$. Но из этого вытекает, что первые четыре подмножества 9-хроматического разложения (1) порождают подграф без 4-клик. Согласно лемме 3 G не является $(3,4)$-графом Рамсея.

Подслучай 1.б. В T есть вершина несмежная v_2 и v_5. Пусть например $[v_2,v_7] \notin E(G)$ и $[v_5,v_7] \notin E(G)$. Для пар $[v_3,v_7]$ и $[v_6,v_7]$ представляются следующие возможности:

I. $[v_3,v_7] \notin E(G)$ и $[v_6,v_7] \notin E(G)$. В этой ситуации первые три подмножества разложения (1) порождают подграф без 3-клик. Согласно лемме 2 G не является $(3,4)$-графом Рамсея.

II. Одна из вершин v_3, v_6 смежна вершине v_7, а другая — нет. Пусть например $[v_6,v_7] \in E(G)$ и $[v_3,v_7] \notin E(G)$. Если v_6 несмежна некоторой из вершин $v_8, \ldots, v_{13}$, например $[v_6,v_8] \notin E(G)$, тогда первые четыре подмножества 9-хроматического разложения (1) порождают подграф без 4-клик и согласно лемме 3 G не является $(3,4)$-графом Рамсея. В противном случае $v_6 \in \mathrm{Ad}(T)$. Из $\langle T\rangle = K_7$ и $\mathrm{cl}(G) < 9$ вытекает $[v_1,v_6] \notin E(G)$. Но тогда первые три подмножества 9-хроматического разложения (1) порождают подграф без 3-клик. Согласно лемме 2 граф G не является $(3,4)$-графом Рамсея.

III. $[v_3,v_7] \in E(G)$ и $[v_6,v_7] \in E(G)$. Если v_3 и v_6 несмежны одновременно некоторой из вершин $v_8, \ldots, v_{13}$, например v_8, тогда первые четыре подмножества 9-хроматического разложения (1) порождают подграф без 4-клик. Согласно лемме 3 G не является $(3,4)$-графом Рамсея. Если v_3 и v_6 несмежны разным вершинам множества $v_8, \ldots, v_{13}$, например $[v_3,v_8] \notin E(G)$ и $[v_6,v_9] \notin E(G)$ тогда из разложение (1) получаем новое 9-хроматическое разложение

$$\{v_1,v_2\} \cup \{v_4,v_5\} \cup \{v_7\} \cup \{v_3,v_8\} \cup \{v_6,v_9\} \cup \ldots$$

в котором первые три подмножества порождают подграф без 3-клик. Согласно лемме 2 G не является $(3,4)$-графом Рамсея. Если одна из вершин v_3, v_6 принадлежит $\mathrm{Ad}(T)$, а другая — нет, например $v_6 \in \mathrm{Ad}(T)$ и $[v_3,v_8] \notin E(G)$, тогда из разложения (1) получаем новое 9-хроматическое разложение

$$\{v_1,v_2\} \cup \{v_4,v_5,v_6\} \cup \{v_7\} \cup \{v_3,v_8\} \cup \ldots$$

Из $v_6 \in \mathrm{Ad}(T)$ и $\mathrm{cl}(G) < 9$ вытекает $[v_1,v_6] \notin E(G)$ и значит первые три подмножества этого 9-хроматического разложения порождают подграф без 3-клик. Согласно лемме 2 G не является $(3,4)$-графом Рамсея. Остается рассмотреть ситуацию когда $v_3, v_6 \in \mathrm{Ad}(T)$. Из $\mathrm{cl}(G) < 9$ и $\langle T\rangle = K_7$ следует, что $\{v_1,v_3,v_4,v_6\}$ — независимое множество. Но тогда, первые три подмножества разложения (1) порождают подграф без 3-клик. Согласно лемме 2 G не является $(3,4)$-графом Рамсея.

С л у ч а й 2. $\alpha(\langle v_4, \ldots, v_{13}\rangle) = 2$. Согласно лемме 6, можно предположить, что $[v_4, v_5] \notin E(G)$ и $[v_6, v_7] \notin E(G)$. Тогда

$$(2) \qquad V(G) = \{v_1, v_2, v_3\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_6, v_7\} \cup \{v_8\} \ldots \cup \{v_{13}\}$$

является 9-хроматическим разложением графа G. Положим $T = \{v_8, \ldots, v_{13}\}$. Если в T есть две несмежные вершины, тода группируя эти две вершины, из (2) получаем 8-хроматическое разложение. Согласно лемме 1 G не является $(3,4)$-графом Рамсея. Поэтому предположим, что $\langle T\rangle = K_6$. Хотя бы одна из вершин v_1, v_2, v_3 смежна всем вершинам множества T (иначе группируя v_1, v_2, v_3 с несмежными им вершинами множества T получим 8-хроматическое разложение графа G). Из аналогичных рассуждений вытекает, что хотя бы одна из вершин v_4, v_5 принадлежит $\mathrm{Ad}(T)$ и что хотя бы одна из вершин v_6, v_7 принадлежит $\mathrm{Ad}(T)$. Эти рассуждения дают нам право предположить, что $v_1 \in \mathrm{Ad}(T)$, $v_4 \in \mathrm{Ad}(T)$, $v_6 \in \mathrm{Ad}(T)$. Из $\mathrm{cl}(G) < 9$ и $\langle T\rangle = K_6$ следует, что $\langle v_1, v_4, v_6\rangle$ не является 3-кликой.

П о д с л у ч а й 2.а. В T есть вершина, например v_8, которая несмежна вершинам v_5 и v_7. *Для* вершин v_2 и v_3 есть следующие возможности:

I. $[v_2, v_8] \notin E(G)$ и $[v_3, v_8] \notin E(G)$. Так как $\langle v_1, v_4, v_6\rangle$ не является 3-кликой, то в этой ситуации первые четыре подмножества 9-хроматического разложения (2) порождают подграф без 4-клик. Согласно лемме 3 G не является $(3,4)$-графом Рамсея.

II. Одна из вершин v_2, v_3 смежна вершине v_8 а другая — нет. Пусть например $[v_2, v_8] \notin E(G)$ и $[v_3, v_8] \in E(G)$. Если вершина v_3 несмежна некоторой из вершин v_9, $\ldots$, v_{13}, например $[v_3, v_9] \notin E(G)$, тогда из (2) получаем новое 9-хроматическое разложение

$$\{v_1, v_2\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_6, v_7\} \cup \{v_8\} \cup \{v_3, v_9\} \ldots$$

в котором первые четыре подмножества порождают подграф без 4-клик. Согласно лемме 3 G не является $(3,4)$-графом Рамсея. Если $v_3 \in \mathrm{Ad}(T)$ тогда из $\mathrm{cl}(G) < 9$ и $\langle T\rangle = K_6$ вытекает, что $\{v_1, v_3, v_4, v_6\}$ не содержит 3-клик. Это означает, что первые четыре подмножества разложения (2) порождают подграф без 4-клик. Согласно лемме 3 G не является $(3,4)$-графом Рамсея.

III. Вершина v_8 смежна вершинам v_2 и v_3. Если $v_2 \in \mathrm{Ad}(T)$ и $v_3 \in \mathrm{Ad}(T)$, тогда из $\langle T\rangle = K_6$ и $\mathrm{cl}(G) < 9$ следует, что $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\rangle$ не содержит 3-клик и значит, первые четыре подмножества разложения (2) порождают подграф без 4-клик. Согласно лемме 3 G не является $(3,4)$-графом Рамсея. Если $v_2 \in \mathrm{Ad}(T)$, $v_3 \notin \mathrm{Ad}(T)$ и например $[v_3, v_9] \notin E(G)$, тогда из разложения (2) получаем новое 9-хроматическое разложение

$$\{v_1, v_2\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_6, v_7\} \cup \{v_8\} \cup \{v_3, v_9\} \ldots$$

в котором первые четыре подмножества порождают подграф без 4-клик, так как из $\mathrm{cl}(G) < 9$ и $\langle T\rangle = K_6$ следует, что $\{v_1, v_2, v_4, v_6\}$ не содержит 3-клик. Если $v_2 \notin \mathrm{Ad}(T)$ и $v_3 \notin \mathrm{Ad}(T)$, тогда группируя эти вершины с несмежными им вершинам множества $\{v_9, \dots, v_{13}\}$ из (2) получаем новое 9-хроматическое разложение

$$\{v_1\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_6, v_7\} \cup \{v_8\} \cup \dots$$

в котором первые четыре подмножества порождают подграф без 4-клик. Согласно лемме 3 G не является $(3,4)$-графом Рамсея.

П о д с л у ч а й 2.б. Вершины v_5 и v_7 несмежны разным вершинам множества T. Пусть например $[v_5, v_8] \notin E(G)$ и $[v_7, v_9] \notin E(G)$. Можно предположить, что $[v_5, v_9] \in E(G)$ и $[v_7, v_8] \in E(G)$ (иначе попадаем в условиях подслучая 2.а.). Если $[v_4, v_6] \notin E(G)$, тогда $\{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$ не содержит 4-клик, т. е. 9-хроматическое разложение (2) удовлетворяет условиям леммы 3 и значит G не является $(3,4)$-графом Рамсея. Предположим, что $[v_4, v_6] \in E(G)$. Заметим, что либо $[v_1, v_6] \notin E(G)$, либо $[v_1, v_4] \notin E(G)$ (иначе $\mathrm{cl}(G) \geqq 9$). Без ограничения общности можно предположить, что $[v_1, v_4] \notin E(G)$. Для вершин v_2 и v_3 представляются следующие возможности:

I. $[v_2, v_8] \notin E(G)$ и $[v_3, v_8] \notin E(G)$. Вершина v_8 вместе с первыми двумя подмножествами 9-хроматического разложения (2) порождает подграф без 3-клик. Согласно лемме 2 G не является $(3,4)$-графом Рамсея.

II. Одна из вершин v_2, v_3 смежна вершине v_8, а другая — нет. Пусть например $[v_2, v_8] \notin E(G)$ и $[v_3, v_8] \in E(G)$. Если v_3 несмежна некоторой вершине множества $\{v_9, \dots, v_{13}\}$, тогда группируя v_3 с несмежной ей вершине этого множества из (2) получаем новое 9-хроматическое разложение

$$\{v_1, v_2\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_6, v_7\} \cup \{v_8\} \cup \dots$$

в котором $\langle v_1, v_2, v_4, v_5, v_8\rangle$ не содержит 3-клик и согласно лемме 2 G не является $(3,4)$-графом Рамсея. Если $v_3 \in \mathrm{Ad}(T)$, тогда либо $[v_3, v_4] \notin E(G)$, либо $[v_3, v_6] \notin E(G)$ (иначе $\mathrm{cl}(G) \geqq 9$). Предположим, что $[v_3, v_4] \notin E(G)$. В этой ситуации вершина v_8 с первыми двумя подмножествами разложения (2) порождает подграф без 3-клик. Согласно лемме 2 G не является $(3,4)$-графом Рамсея. Если $[v_3, v_6] \notin E(G)$, тогда из разложения (2) получаем новое 9-хроматическое разложение

$$\{v_1, v_2\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_8\} \cup \{v_3, v_6\} \cup \{v_7, v_9\} \cup \dots$$

в котором первые три подмножества порождают подграф без 3-клик. Согласно лемме 2 G не является $(3,4)$-графом Рамсея.

III. $[v_2, v_8] \in E(G)$ и $[v_3, v_8] \in E(G)$. Очевидно в этом случае $\mathrm{Ad}(v_5) \subseteq \mathrm{Ad}(v_8)$ и согласно лемме 5 G не является $(3,4)$-графом Рамсея.

П о д с л у ч а й 2.в. Одна из вершин v_5, v_7 принадлежит $\mathrm{Ad}(T)$, а другая — нет. Пусть например $v_7 \in \mathrm{Ad}(T)$ и $[v_5, v_8] \notin E(G)$. Из $\mathrm{cl}(G) < 9$ и $\langle T\rangle = K_6$ следует, что $\langle v_1, v_4, v_6, v_7\rangle$ не содержит 3-клик. Если $[v_2, v_8] \in E(G)$ и $[v_3, v_8] \in E(G)$, тогда $\mathrm{Ad}(v_5) \subseteq \mathrm{Ad}(v_8)$ и соглесно лемме 5 G не является $(3,4)$-графом Рамсея. Поэтому предположим, что $[v_2, v_8] \notin E(G)$. Если еще $[v_3, v_8] \notin E(G)$, тогда первые четыре подмножества разложения (2) порождают подграф без 4-клик (иначе $\langle v_1, v_4, v_6, v_7\rangle$ содержит 3-клику и следует $\mathrm{cl}(G) \geqq 9$). Согласно лемме 3 G не является $(3,4)$-графом Рамсея. Если $[v_3, v_8] \in E(G)$ и $v_3 \notin \mathrm{Ad}(T)$, например $[v_3, v_9] \notin E(G)$, тогда из (2) получаем новое 9-хроматическое разложение

$$\{v_1, v_2\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_6, v_7\} \cup \{v_8\} \cup \{v_3, v_9\} \cup \dots$$

в котором первые четыре подмножества порождают подграф без 4-клик. Согласно лемме 3 G не является $(3,4)$-графом Рамсея. Если $v_3 \in \mathrm{Ad}(T)$ тогда из $\mathrm{cl}(G) < 9$ и $\langle T \rangle = K_6$ следует, что $\{v_1, v_3, v_4, v_6, v_7\}$ не содержит 3-клик. Это означает, что первые четыре подмножества разложения (2) порождают подграф без 4-клик. Согласно лемме 3 G не является $(3,4)$-графом Рамсея.

П о д с л у ч а й 2.г. $v_5 \in \mathrm{Ad}(T)$ и $v_7 \in \mathrm{Ad}(T)$. Если $v_2 \notin \mathrm{Ad}(T)$ и например $[v_2, v_8] \notin E(G)$, тогда $\mathrm{Ad}(v_2) \subseteq \mathrm{Ad}(v_8)$ и согласно лемме 5 G не является $(3,4)$-графом Рамсея. Следовательно можно предположить, что $v_2 \in \mathrm{Ad}(T)$. Из аналогичных соображений можно предположить еще что $v_3 \in \mathrm{Ad}(T)$. Из $cl(G) < 9$ и $\langle T \rangle = K_6$ следует, что подграф $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7 \rangle$ не содержит 3-клик. Это означает, что разложение (2) удовлетворяет условиям леммы 2 и значит G не является $(3,4)$-графом Рамсея.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Согласно лемме 8 имеем $\alpha(G) = 2$. Пусть $V(G) = \{v_1, \dots, v_{13}\}$. Согласно лемме 7 можно предположить, что $[v_1, v_2] \notin E(G)$, $[v_3, v_4] \notin E(G)$, $[v_5, v_6] \notin E(G)$, $[v_7, v_8] \notin E(G)$. Тогда

$$(3) \qquad \{v_1, v_2\} \cup \{v_3, v_4\} \cup \{v_5, v_6\} \cup \{v_7, v_8\} \cup \{v_9\} \cup \dots \cup \{v_{13}\}$$

является 9-хроматическим разложением графа G. Положим $T = \{v_9, \dots, v_{13}\}$. Если $\langle T \rangle \neq K_5$, тогда группируя две несмежные вершины множества T из (3) получаем 8-хроматическое разложение графа G. Согласно лемме 1 G не является $(3,4)$-графом Рамсея. Поэтому предположим, что $\langle T \rangle = K_5$. Если $v_1 \notin \mathrm{Ad}(T)$ и $v_2 \notin \mathrm{Ad}(T)$, тогда группируя вершины v_1 и v_2 с несмежными им вершинами мнажества T из (3) получаем 8-хроматическое разложение графа G и согласно лемме 1 он не является $(3,4)$-графом Рамсея. Поэтому предположим, что $v_1 \in \mathrm{Ad}(T)$. Из аналогичных соображений можно предположить еще $v_3 \in \mathrm{Ad}(T)$, $v_5 \in \mathrm{Ad}(T)$, $v_7 \in \mathrm{Ad}(T)$. Для вершин v_2, v_4, v_6, v_8 возникают следующие возможности:

С л у ч а й 1. $v_2, v_4, v_6, v_8 \in \mathrm{Ad}(T)$. В этом случае из $\mathrm{cl}(G) < 9$ и $\langle T \rangle = K_5$ вытекает, что $\langle v_1, v_2, \dots, v_8 \rangle$ не содержит 4-клик. Это означает, что разложение (3) удовлетворяет условиям леммы 3 и значит G не является $(3,4)$-графом Рамсея.

С л у ч а й 2. Три из вершин v_2, v_4, v_6, v_8 принадлежат $\mathrm{Ad}(T)$, а четвертая — нет. Пусть например $v_4, v_6, v_8 \in \mathrm{Ad}(T)$ и $[v_2, v_9] \notin E(G)$. В этом случае $\mathrm{Ad}(v_2) \subseteq \mathrm{Ad}(v_9)$ и согласно лемме 5 G не является $(3,4)$-графом Рамсея.

С л у ч а й 3. Любая из вершин v_2, v_4, v_6, v_8 не принадлежит $\mathrm{Ad}(T)$. Из $\mathrm{cl}(G) < 9$ и $\langle T\rangle = K_5$ следует, что $\{v_1, v_3, v_5, v_7\}$ не является 4-кликой. Без ограничения общности можно предположить, что $[v_1, v_3] \notin E(G)$. Если вершины v_2 и v_4 несмежны одной и той же вершине множества T, например вершине v_9, тогда подграф $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_9\rangle$ не содержит 3-клик и разложение (3) удовлетворяет условиям леммы 2. Следовательно G не является (3, 4)-графом Рамсея. Если вершины v_2 и v_4 несмежны разным вершинам множества T, например $[v_2, v_9] \notin E(G)$ и $[v_4, v_{10}] \notin E(G)$, тогда подграф $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_9, v_{10}\rangle$ не содержит 4-клик и значит разложение (3) удовлетворяет условиям леммы 3. Следовательно G не является $(3,4)$-графом Рамсея.

С л у ч а й 4. Ровно три из вершин v_2, v_4, v_6, v_8 не принадлежат $\mathrm{Ad}(T)$. Пусть например $v_8 \in \mathrm{Ad}(T)$ и $v_2, v_4, v_6 \notin \mathrm{Ad}(T)$. Предположим, что $[v_1, v_3] \notin E(G)$. Если v_2 и v_4 несмежны одной и той же вершине множества T, например $[v_2, v_9] \notin E(G)$ и $[v_4, v_9] \notin E(G)$ тогда $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_9\rangle$ не содержит 3-клик. Разложение (3) удовлетворяет условиям леммы 2 и значит G не является $(3,4)$-графом Рамсея. Если v_2 и v_4 несмежны разным вершинам множества T, например $[v_2, v_9] \notin E(G)$ и $[v_4, v_{10}] \notin E(G)$, тогда $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_9, v_{10}\rangle$ не содержит 4-клик, т. е. разложение (3) удовлетворяет леммы 3. Следовательно G не является $(3,4)$-графом Рамсея. И так, мы доказали, что $[v_1, v_3] \in E(G)$. Аналогичным образом доказывается, что $[v_1, v_5] \in E(G)$ и $[v_3, v_5] \in E(G)$. Из $\mathrm{cl}(G) < 9$ и $\langle T\rangle = K_5$ вытекает, что $v_7 \notin \mathrm{Ad}(v_1, v_3, v_5)$ и $v_8 \notin \mathrm{Ad}(v_1, v_3, v_5)$. Вершины v_7 и v_8 несмежны разным вершинам 3-клики $\{v_1, v_3, v_5\}$, так как иначе $\alpha(G) \geqq 3$. Без ограничения общности можно предположить, что $[v_1, v_7] \notin E(G)$ и $[v_3, v_8] \notin E(G)$. Если v_2 и v_4 несмежны одной и той же вершине множества T, например $[v_2, v_9] \notin E(G)$ и $[v_4, v_9] \notin E(G)$ тогда $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_7, v_8, v_9\rangle$ не содержит 4-клик и разложение (3) удовлетворяет условиям леммы 3. Следовательно G не является $(3,4)$-графом Рамсея. Если v_2 и v_4 несмежны разным вершинам множества T, например $[v_2, v_9] \notin E(G)$ и $[v_4, v_{10}] \notin E(G)$, тогда из (3) получаем следующее 8-хроматическое разложение

$$\{v_1, v_7\} \cup \{v_3, v_8\} \cup \{v_2, v_9\} \cup \{v_4, v_{10}\} \cup \{v_5, v_6\} \cup \{v_{11}\} \cup \{v_{12}\} \cup \{v_{13}\}$$

Согласно лемме 1 G не является $(3,4)$-графом Рамсея.

С л у ч а й 5. Две из вершин v_2, v_4, v_6, v_8 принадлежат $\mathrm{Ad}(T)$, а другие две — нет. Пусть например $v_6 \in \mathrm{Ad}(T)$, $v_8 \in \mathrm{Ad}(T)$ и $v_2 \notin \mathrm{Ad}(T)$, $v_4 \notin \mathrm{Ad}(T)$. В этой ситуации из $\mathrm{cl}(G) < 9$ и $\langle T\rangle = K_5$ следует, что $\langle v_1, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8\rangle$ не содержит 4-клик. Покажем, что из этого следует, что вершины v_2 и v_4 несмежны одной и той же вершине множества T. Допустим, что это неверно и пусть например $[v_2, v_9] \notin E(G)$ и $[v_4, v_{10}] \notin E(G)$. Тогда из (3) получаем новое 9-хроматическое разложение

$$\{v_1\} \cup \{v_3\} \cup \{v_5, v_6\} \cup \{v_7, v_8\} \cup \{v_2, v_9\} \cup \{v_4, v_{10}\} \cup \dots$$

в котором первые четыре подмножества порождают подграф без 4-клик. Согласно лемме 3 G не является $(3,4)$-графом Рамсея. Итак, можно предположить, что $[v_2, v_9] \notin E(G)$ и $[v_4, v_9] \notin E(G)$. Из этого следует, что $\mathrm{cl}(\langle v_1, v_3, v_5, v_6, v_9\rangle) = 4$ (иначе разложение (3) удовлетворяет условиям леммы 3). Это означает, что либо $\{v_1, v_3, v_5\}$, либо $\{v_1, v_3, v_6\}$ является 3-кликой. Без ограничения общности можно предположить, что $\{v_1, v_3, v_5\}$ является 3-кликой. Из аналогичных соображений можно предположить, что $\{v_1, v_3, v_7\}$ тоже является 3-кликой графа G. Но тогда $[v_5, v_7] \notin E(G)$, так как иначе вершины v_1, v_3, v_5, v_7 вместе с T составляют 9-клику графа G, что противоречит условию $\mathrm{cl}(G) < 9$. Из $\alpha(G) = 2$ следует $[v_5, v_8] \in E(G)$ и $[v_6, v_7] \in E(G)$. Так как $\{v_1, v_3, v_6, v_7\}$ не является 4-кликой (иначе $\mathrm{cl}(G) \geqq 9$), то либо $[v_1, v_6] \notin E(G)$, либо $[v_3, v_6] \notin E(G)$. Без ограничения общности можно предположить, что $[v_1, v_6] \notin E(G)$. Множество $\{v_1, v_3, v_5, v_8\}$ тоже не является 4-кликой (иначе $\mathrm{cl}(G) \geqq 9$). Из этого следует, что $[v_1, v_8] \notin E(G)$, либо $[v_3, v_8] \notin E(G)$. Если $[v_1, v_8] \notin E(G)$, тогда подграф $\langle v_1, v_2, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\rangle$ не содержит 4-клик и значит 9-хроматическое разложение (3) удовлетворяет условиям леммы 3. И так, можно предположить, что $[v_3, v_8] \notin E(G)$. Из сделанных разсуждений вытекает, что v_1, v_2, v_9, v_4, v_3, v_8, v_7, v_5, v_6, v_1 является простым циклом в дополнении $\overline{G}$ графа G. Этим доказано, что $G \subseteq K_4 + \overline{C}_9$. Осталось показать, что $K_4 + \overline{C}_9$ не является $(3,4)$-графом Рамсея.

Положим $V(\overline{C}_9) = \{v_1, v_2, \ldots, v_9\}$ и $V(K_4) = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Рассмотрим следующую 2-раскраску ребер графа $K_4 + \overline{C}_9$: ребро $[v_i, v_j] \in E_1$, если на рис. 1 оно пунктирное и $[v_i, v_j] \in E_2$ — если оно плотное; ребро $[w_i, w_j] \in E_1$, если на рис. 2 оно пунктирное и $[w_i, w_j] \in E_2$ — если оно плотное; раскрашивание ребер $[v_i, w_j]$, $i = 1, 2, \ldots, 9$, $j = 1, 2, 3, 4$ задается

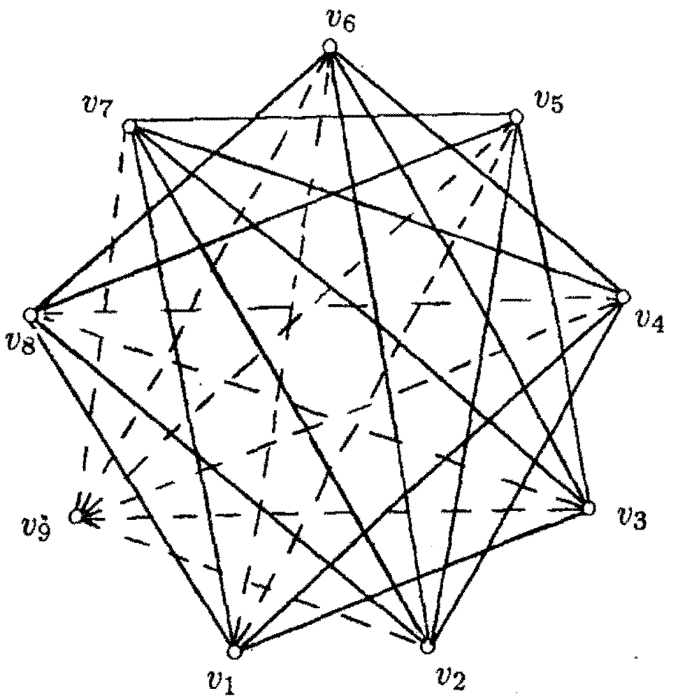

Рис. 1

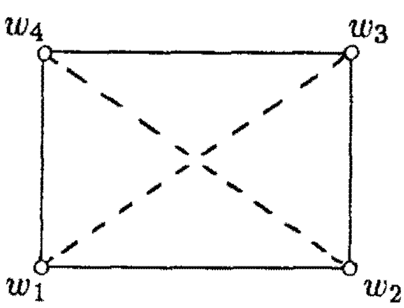

Рис. 2

при помощи следующей матрицы $A = (a_{ij})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

если $a_{ij} = 1$, тогда $[v_i, w_j] \in E_1$, а если $a_{ij} = 2$, тогда $[v_i, w_j] \in E_2$. В полученной 2-раскраске $E_1 \cup E_2$ ребер графа $K_4 + \overline{C}_9$ нет 3-клики все ребра которой принадлежат E_1 и нет 4-клики все ребра которой принадлежат E_2. Этим доказано, что граф $K_4 + \overline{C}_9$ не является $(3,4)$-графом Рамсея.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ненов, Н. Графи на Рамзи и някои константи свързани с тях. Дисертация, Соф. унив. , 1980.
2. Ненов, Н. О $(3,4)$-графах Рамсея. — Год. Соф. унив. , Фак. мат. и мех. , **73**, 1979, 185–190.
3. Ненов, Н. Об одной константе, связанной с $(3,4)$-графами Рамсея. — Сердика, **7**, 1981, 336–371.
4. Greenwood, R., A. Gleason. Combinational relation and chromatic graphs. — Canad. J. Math., **7**, 1955, 1–5.
5. Lin, S. On Ramsey numbers and K_r-colouring of graphs. — J. Comb. Theory, Ser. B, **12**, 1972, 82–92.

Поступила 12.02.1992