

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Книга 2 — Механика

Том 85, 1991

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Livre 2 — Mécanique

Tome 85, 1991

О МАКСИМАЛЬНОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ ОДНОЙ ТРИБОЛОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

ВАСИЛ ДИАМАНДИЕВ

Васил Диамандиев. О МАКСИМАЛЬНОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ ОДНОЙ ТРИБОЛОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В настоящей работе рассматривается тепловая динамика следующей трибологической системы: два цилиндра (вала), из которых один равномерно вращающийся, трутся по их контактной поверхности. Принимается сферическая модель о шероховатой поверхности и находится формула о числе выступов. Показывается, что температура выступов изза трения достигает один максимум на основе предположения, что цилиндры теплоизолированы на малую глубину.

Vassil Diamandiev. ON THE ROUGH SURFACE MAXIMUM TEMPERATURE OF A TRIBOLOGIC SYSTEM

This paper considers the thermodynamics of the following tribologic system: two cylinders (shafts), one of which is evenly rotating, are rubbing along to their contact surface. A spherical model of the rough surface is assumed, and a formula for the number of asperies has been found. It is shown that the temperature of asperities at the friction reaches its maximum on the basis of the assumption that the cylinders are thermal-insulated at a shallow depth.

В настоящей работе рассматривается тепловая динамика следующей трибологической системы: два цилиндра (вала), из которых один неподвижный, а другой равномерно вращающийся, трутся по их основной контактной поверхности. Для простоты принимаем, что неподвижный цилиндр имеет идеальную гладкую основную поверхность, а подвижный

имеет шероховатую поверхность. В соответствии с моделями [1, 2, 3, 4, 5, 6] шероховатые поверхности рассматриваются как набор из сферических выступов, которые распределяются одинаково на данной площади. В этой работе принимается сферическая модель и находится формула для числе выступов, расположенных на данный круг, который представляет основу рассмотренных цилиндров. Это число зависит от размеров выступа и данного круга. Потом определяется температура выступов, которая возникает изза трения цилиндров, и показывается, что она достигает один максимум для малого интервала времени в начале процесса движения. Этот результат получен на основе предположения, что цилиндры теплоизолированы на малой глубине от их общей поверхности трения. Может быть это находит применение в теории тормозов в автотранспорте.

1. МОДЕЛЬ МИКРОГЕОМЕТРИИ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть задан круг радиусом r_0 . В соответствии с принятой моделью считаем, что на нем распределены равномерно сферические выступы с равными размерами. Основы выступов находятся в соприкосновении плотно одной к другой (рис. 1). Эта концепция позволяет найти сравнитель-

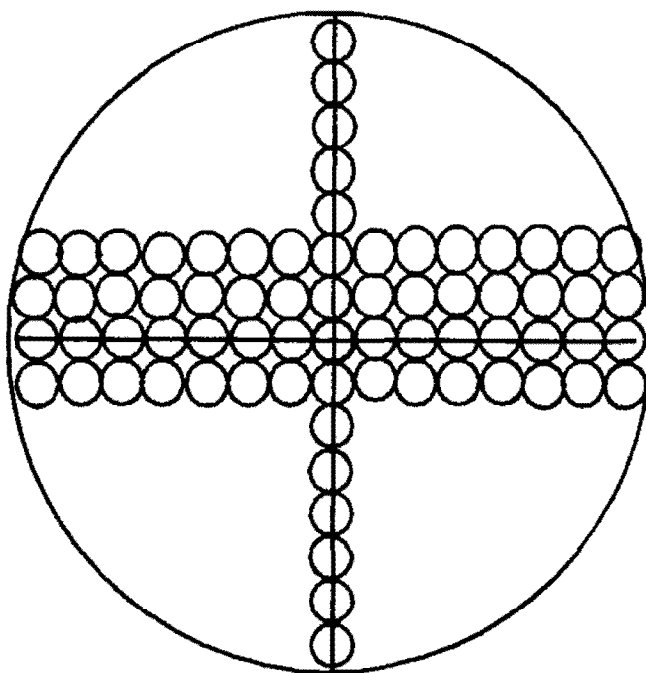


Рис. 1

но просто число выступов на круге. Обозначим через r_1 радиус основы выступа. Тогда на горизонтальном диаметре круга имеем следующее чис-

ло выступов ·

$$(1) \quad n_1 = \frac{r_0}{r_1}.$$

Хорда, которая проходит через центры кругов на второй линии после горизонтального диаметра, имеет следующую длину

$$d_1 = 2\sqrt{r_0^2 - 4r_1^2}.$$

Следовательно число выступов на второй линии дано выражением

$$(2) \quad n_2 = n_1 \left(1 - \frac{4}{n_1^2}\right)^{1/2}.$$

Аналогично имеем n_3 выступы на третьей линии, заданные через формулу

$$(3) \quad n_3 = n_1 \left(1 - \frac{16}{n_1^2}\right)^{1/2}.$$

Число выступов вертикального диаметра также n_1 . По причине симметрии имеем, что число выступов на последней линии дано выражением

$$(4) \quad n_{\frac{n_1-1}{2}} = n_1 \left(1 - \frac{(n_1-1)^2}{n_1^2}\right)^{1/2}.$$

Вся сумма N выступов на круге $O(r_0)$ согласно (2), (3) и (4) определяется через формулу

$$(5) \quad N = n_1 + 2n_1 \sum_{m=1}^{\frac{n_1-1}{2}} \left[1 - \frac{4m^2}{n_1^2}\right]^{1/2}.$$

В формуле (5) сделаем замену

$$(6) \quad x = \frac{2m}{n_1}.$$

Когда m принимает значения $1, 2, 3, \dots, \frac{n_1-1}{2}$, для x имеем из (6)

$$(7) \quad x_1 = \frac{2}{n_1}, x_2 = \frac{4}{n_1}, x_3 = \frac{6}{n_1}, \dots, x_{\frac{n_1-1}{2}} = \frac{n_1-1}{n_1},$$

т. е. x имеет приращение $\Delta x = \frac{2}{n_1}$. Функция $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ убывает относительно x и тогда на основе формулы о приближенном вычислении определенных интегралов получаем неравенства

$$(8) \quad \sqrt{1 - \left(\frac{n_1-1}{n_1}\right)^2} + \frac{n_1}{2} \int_{\frac{2}{n_1}}^{\frac{n_1-1}{n_1}} \sqrt{1-x^2} dx < \sum_{m=1}^{\frac{n_1-1}{2}} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{n_1^2}} < \sqrt{1 - \frac{4}{n_1^2}} + \int_{\frac{2}{n_1}}^{\frac{n_1-1}{n_1}} \sqrt{1-x^2} dx.$$

Интеграл в (8) имеет следующее значение

$$(9) \quad \int_{\frac{2}{n_1}}^{\frac{n_1-1}{n_1}} \sqrt{1-x^2} dx$$

$$= \frac{n_1-1}{2n_1} \sqrt{1-\left(\frac{n_1-1}{n_1}\right)^2} - \frac{1}{n_1} \sqrt{1-\frac{4}{n_1^2}} + \frac{1}{2} \arcsin\left(1-\frac{1}{n_1}\right) - \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{n_1}.$$

Учитывая (8) и (9), получим из формулы (5) неравенство

$$(10) \quad N < \frac{n_1^2}{2} \arcsin\left(1-\frac{1}{n_1}\right) + \frac{n_1-1}{2} \sqrt{2n_1-1} + n_1 + \sqrt{n_1^2-4} - \frac{n_1^2}{2} \arcsin \frac{2}{n_1}$$

и соответственно неравенство

$$(10') \quad N > \frac{n_1^2}{2} \arcsin\left(1-\frac{1}{n_1}\right) + \frac{n_1+3}{2} \sqrt{2n_1-1} + n_1 - \sqrt{n_1^2-4} - \frac{n_1^2}{2} \arcsin \frac{2}{n_1}.$$

Так как n_1 большое число, имеем приближенные формулы

$$(10'') \quad \arcsin\left(1-\frac{1}{n_1}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n_1} \sqrt{2n_1-1},$$

$$\arcsin \frac{2}{n_1} = \frac{2}{n_1}.$$

От (10), (10') и (10'') получим неравенства

$$(11) \quad \frac{\pi}{4} n_1^2 - \sqrt{n_1^2-4} + \frac{3}{2} \sqrt{2n_1-1} < N < \frac{\pi}{4} n_1^2 + \sqrt{n_1^2-4} - \frac{1}{2} \sqrt{2n_1-1}.$$

Если возьмем среднее арифметическое из верхней и нижней границы, для N согласно (11) получим

$$(12) \quad N = \frac{\pi}{4} n_1^2 + \frac{1}{2} \sqrt{2n_1-1}.$$

Величина $\frac{1}{2} \sqrt{2n_1-1}$ очень мала по отношению n_1^2 , т. е. можно принять

$$N = \frac{\pi}{4} n_1^2,$$

или согласно (1) находим

$$(13) \quad N = \frac{\pi r_0^2}{4r_1^2},$$

где r_1 радиус основы выступа. Формула (13) определяет число выступов на данной круговой площади. Эта формула имеет интересную геометрическую интерпретацию. Если малые круги радиусом r_1 покрывают большой круг $O(r_0)$, тогда их число дается выражением

$$N_0 = \frac{\pi r_0^2}{\pi r_1^2}.$$

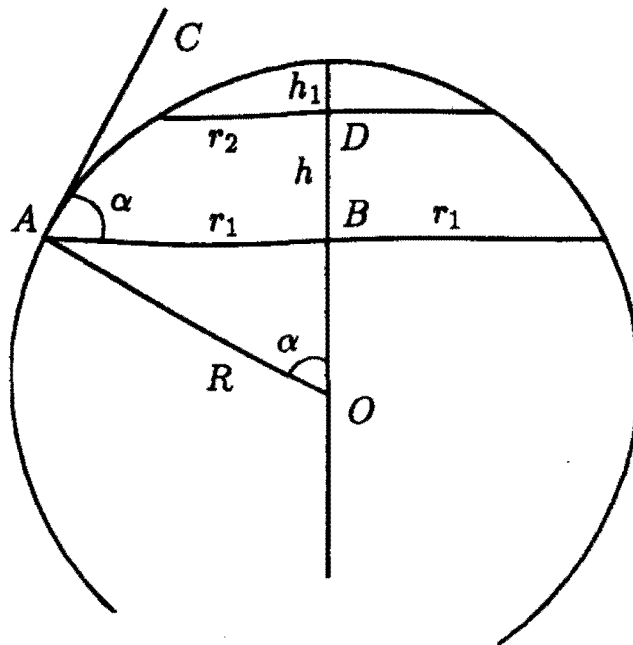


Рис. 2

Так как между ними находится промежуточная площадь, которая дает отражение в формуле (13), число кругов меньше чем N_0 .

Теперь переходим к некоторым формулам о размерах выступов при упругой деформации. Здесь оставим в сторону деформацию по причине трения и износа. Рассмотрим деформированный сферический выступ, имеющий форму сферического сегмента, показанный на рис. 2. Имеем следующие обозначения:

$CD = r_2$ — радиус касательной площади;

$AB = r_1$ — радиус основы выступа;

$h = BD$ — высота выступа;

α — угол, который составляет основы выступа с ей боковой стены;

$ED = h_1$ — вертикальная деформация.

По формулам Герца [7] имеем

$$(14) \quad h_1 = \sqrt[3]{\frac{9}{16}(\Delta P)^2 \frac{k^2}{R}},$$

$$r_2 = \sqrt[3]{\frac{3}{4}\Delta P k R},$$

где ΔP нагрузка выступа, R — его радиус и k — константа, данная выражением

$$(15) \quad k = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}.$$

Здесь μ_i , E_i являются коэффициентом Пуассона и модулем Юнга. Формулы (14) имеют место в случае, когда одна из соприкасающихся поверхностей идеально гладкая. Обычно измеряют высоту h и угол α [8]. Через эти величины будем выражать размеры выступа. Пусть P сила нагрузки между цилиндрами. Если считаем, что эта сила распределяется равномерно, тогда один из выступов выдерживает следующую нагрузку

$$\Delta P = \frac{P}{N}$$

или согласно (13) имеем

$$(16) \quad \Delta P = 4pr_1^2,$$

где величина

$$(17) \quad p = \frac{P}{\pi r_0^2}$$

является номинальным давлением между цилиндрами. Согласно рис. 2 имеем следующие соотношения

$$(18) \quad R = \frac{r_1}{\sin \alpha}, \quad r_1 \cotg \alpha = R - h - h_1.$$

От (14), (16) и (18) после некоторых выкладок находим следующие формулы о размерах выступа

$$(19) \quad \begin{aligned} r_1 &= \frac{h \sin \alpha}{1 - \cos \alpha - \sin \alpha \sqrt[3]{9p^2 k^2 \sin \alpha}}, \\ r_2 &= \frac{h \sqrt[3]{3pk \sin^2 \alpha}}{1 - \cos \alpha - \sin \alpha \sqrt[3]{9p^2 k^2 \sin \alpha}}, \\ R &= \frac{h}{1 - \cos \alpha - \sin \alpha \sqrt[3]{9p^2 k^2 \sin \alpha}}, \\ h_1 &= \frac{h \sin \alpha \sqrt[3]{9p^2 k^2 \sin \alpha}}{1 - \cos \alpha - \sin \alpha \sqrt[3]{9p^2 k^2 \sin \alpha}}. \end{aligned}$$

Фактическая площадь контакта A_r между идеальным гладким цилиндром и шероховатым цилиндром определяется из соотношения

$$(20) \quad A_r = \pi r_2^2 N.$$

Согласно (13) и (19) получим из (20) отношение

$$(20') \quad \frac{A_r}{S} = \frac{\pi}{4} \sqrt[3]{\frac{9p^2 k^2}{\sin^2 \alpha}},$$

где $S = \pi r_0^2$ номинальная круговая площадь цилиндра. Фактическое давление \bar{p} , приложенное к отдельному выступу, находится из соотношения

$$\bar{p} = \frac{\Delta P}{\pi r_2^2},$$

или согласно (16) и (19) находим

$$(21) \quad \bar{p} = \frac{4}{\pi} \sqrt[3]{\frac{p \sin^2 \alpha}{9k^2}}.$$

Рассмотрим некоторые числовые примеры для случая цилиндров из стали. Тогда имеем $\mu_1 = \mu_2 = 0,3$, $E_1 = E_2 = 2.10^6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ и от (15) получим

$$k = 9,1.10^{-7} \frac{\text{см}^2}{\text{кг}}.$$

Пусть радиус цилиндров $r_0 = 50$ см и сила нагрузки $P = 785$ кг. Из (17) находим

$$p = 0,1 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

Возьмем $h = 2.10^{-5}$ см = 0,2 мк, $\alpha = 1^\circ = 0,017$. Согласно (19), (20') и (21) имеем соответственно

$$\begin{aligned} r_2 &= 0,6 \text{ мк}, & h_1 &= 2,5.10^{-4} \text{ мк}, & r_1 &= 23,6 \text{ мк}, \\ R &= 1350 \text{ мк}, & \frac{A_r}{S} &= 5.10^{-4}, & \bar{p} &= 205 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}. \end{aligned}$$

Как второй пример возьмем

$$h = 2.10^{-4} \text{ см} = 2 \text{ мк}, \quad \alpha = 10^\circ = 0,174$$

и получим соответственно

$$\begin{aligned} r_2 &= 0,26 \text{ мк}, & h_1 &= 5.10^{-4} \text{ мк}, & r_1 &= 23 \text{ мк}, \\ R &= 132 \text{ мк}, & \frac{A_r}{S} &= 1.1.10^{-4}, & \bar{p} &= 950 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}. \end{aligned}$$

Наконец определим объем деформированного выступа. Из рис. 2 имеем

$$(22) \quad dV = \pi(R^2 - z^2) dz,$$

где z ордината по радиусе OE . Из (22) получим

$$(22') \quad V = \pi R^2 h - \frac{\pi h}{3} (z_1^2 + z_2^2 + z_1 z_2), \dots$$

где

$$(23) \quad z_1 = r_1 \cotg \alpha, \quad z_2 = r_1 \cotg \alpha + h.$$

Из (19) имеем

$$(24) \quad h = \frac{r_1}{\sin \alpha} \left(1 - \cos \alpha - \sin \alpha \sqrt[3]{9p^2 k^2 \sin \alpha} \right).$$

Поставим (23) и (24) в (22') и получим

$$V = \frac{\pi r_1^2 h}{3} \left[1,5 + \frac{1}{2} \text{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sqrt{\frac{9p^2 k^2}{\sin^2 \alpha}} + \cos \alpha \sqrt[3]{\frac{9p^2 k^2}{\sin^2 \alpha}} \right].$$

Так как α и k маленькие величины, можно принять

$$(25) \quad V = \frac{1}{2} \pi r_1^2 h,$$

которое является объемом деформированного выступа.

2. ТЕМПЕРАТУРА ВЫСТУПОВ

Предположим, что механическая работа, которую выступ совершает по причине трения, будет трансформироваться полностью в тепловую энергию. Обозначим с dQ количество теплоты, которая возникает для времени dt . Очевидно она определяется выражением

$$(26) \quad dQ = J f \Delta P r \omega dt,$$

где J тепловой эквивалент механической работы, f — коэффициент трения между поверхностями, ω — угловая скорость цилиндра, r — расстояние выступа от оси вращения. Величина J определяется численным выражением

$$(27) \quad J = \frac{10^{-4} \text{ кал}}{4,27 \text{ кг.см}}.$$

Коэффициент трения определяется из эмпирической формулы [9]

$$(28) \quad f = 0,43 \frac{16\Delta P + 100}{32\Delta P + 100} \frac{r\omega + 100}{6r\omega + 100}.$$

Так как радиус r_1 очень малая величина, имеем $\Delta P \approx 0$ и из (28) получим

$$(28') \quad f = 0,43 \frac{r\omega + 100}{6r\omega + 100},$$

где $r\omega$ имеет размерность $\frac{\text{км}}{\text{час}}$. Здесь оставляем в сторону факт, что f зависит от температуры трения.

Количество теплоты dQ распределяется между двумя цилиндрами на потоки dQ_1 и dQ_2 , которые определяются из следующего соотношения [10]

$$(29) \quad \frac{dQ_1}{dQ_2} = \frac{\sqrt{k_1 c_1 \rho_1}}{\sqrt{k_2 c_2 \rho_2}},$$

где k_i , c_i , ρ_i теплофизические и физические характеристики тел. Кроме того имеем

$$(30) \quad dQ = dQ_1 + dQ_2,$$

где dQ дано через (26). Из (29) и (30) получаем

$$(31) \quad dQ_1 = K dQ,$$

где K дается выражением

$$(32) \quad K = \frac{\sqrt{k_1 c_1 \rho_1}}{\sqrt{k_1 c_1 \rho_1} + \sqrt{k_2 c_2 \rho_2}}.$$

Принимаем, что dQ_1 количество теплоты, которое входит в сферическом выступе. Согласно (16), (26) и (31) имеем

$$(33) \quad dQ_1 = 4KJfpr_1^2 r \omega dt.$$

Формула (33) показывает, что количество теплоты пропорционально основной площади выступа. Из (33) следует

$$(33') \quad Q_1 = 4KJfpr_1^2 r \omega t,$$

которое количество теплоты для времени t , принимая, что p не зависит от времени. Согласно закона Фурье [10] теплота, которая выходит из дна выступа для времени dt , определяется выражением

$$(34) \quad dQ'_1 = -k_1 \frac{\partial \theta}{\partial x}(h, t) \pi r_1^2 dt,$$

где $\theta(x, t)$ температура глубины x в моменте t . Из (34) получим

$$(34') \quad Q'_1 = -\pi r_1^2 k_1 \int_0^t \frac{\partial \theta}{\partial x}(h, t) dt.$$

Здесь k_1 — коэффициент теплопроводности материала выступа. Количество теплоты, которое собирается в выступе для времени dt , определяется выражением

$$(35) \quad dQ_v = c_1 \rho_1 dt \iiint_{(V)} \frac{\partial \theta}{\partial t}(x, t) dV,$$

где V объем выступа. Так как величина h очень малая и $0 \leq x \leq h$, из (35) согласно (25) находим

$$(35') \quad dQ_v = \frac{\pi}{2} r_1^2 h c_1 \rho_1 \frac{\partial \theta}{\partial t}(x, t) dt.$$

Интегрируем (35') относительно времени и получим

$$(35'') \quad Q_v = \frac{\pi c_1 \rho_1 r_1^2 h}{2} [\theta(t) - T_0],$$

где $\theta(t)$ средняя температура выступа и T_0 температура окружающей среды.

Сделаем баланс теплоты, т. е. находим

$$Q_1 - Q'_1 = Q_v$$

или согласно (33'), (34') и (35'') имеем

$$(36) \quad \theta(t) = T_0 + A_1 t + \frac{2a_1^2}{h} \int_0^t \frac{\partial \theta}{\partial x}(h, t) dt,$$

где величина A_1 определяется выражением

$$(37) \quad A_1 = \frac{8KJfpr\omega}{\pi c_1 \rho_1 h}$$

и величина

$$(38) \quad a_1^2 = \frac{k_1}{c_1 \rho_1},$$

коэффициент теплопроводности. Величины c_1 , ρ_1 являются соответственно специфической теплотой материала и его плотностью.

Замечание. В формуле (36) не принимаем во внимание влияние температуры других выступов на данный выступ, который находится на расстоянии r от оси вращения, но это обстоятельство объясняется фактом, что процесс нагревания рассматривается для очень маленького интервала времени.

3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА МАЛЕНЬКУЮ ГЛУБИНУ ОТ ДАННОГО ВЫСТУПА

Будем рассматривать данный выступ как стержень, который продолжается на глубину l . Будем предполагать, что вращательный цилиндр теплоизолирован на глубине l , которую считаем малой величиной. Тогда распределение температуры по глубине будет описываться уравнением теплопроводности в линейном случае, т. е. [11]

$$(39) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2},$$

где величина a_1^2 определяется из (38). Если T_0 обозначает температуру окружающей среды, функция $\theta(x, t)$ должна выполнять условия

$$(40) \quad \theta(x, 0) = T_0, \quad \theta(l, t) = T_0,$$

где второе условие выражает очевидно теплоизолированность цилиндра. Температуру поверхности выступа определим из условия, что количество теплоты Q_1 , данное из (33') моментально поглощается объемом V на глубине l , который дается выражением

$$(41) \quad V = \frac{\pi}{2} r_1^2 h + \pi r_1^2 (l - h).$$

Исходя из элементарного уравнения физики о поглощении теплоты данной массой, о температуре поверхности согласно (41) и (33') получим

$$(42) \quad \theta(0, t) = T_0 + At,$$

где величина A дается выражением

$$(43) \quad A = \frac{8KJfpr\omega}{\pi c_1 \rho_1 (2l - h)}.$$

Условия (40) и (42) являются начальными и граничными для уравнения (39). Будем определять решение этого уравнения символическим способом Хевисайда [12, 13]. Приложим преобразование Лапласа относительно (39) и согласно (40) получим

$$(44) \quad a_1^2 \frac{\partial^2 \theta_L}{\partial x^2} = s\theta_L(x, s) - T_0,$$

где

$$(45) \quad \theta_L(x, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \theta(x, t) dt.$$

Из (44) находим

$$(46) \quad \theta_L(x, s) = \frac{T_0}{s} + B_1(s) e^{-\frac{\sqrt{s}}{a_1} x} + B_2(s) e^{\frac{\sqrt{s}}{a_1} x}.$$

Условия (40) и (42) для (46) согласно (45) дают

$$(47) \quad \begin{aligned} B_1(s) e^{-\frac{\sqrt{s}}{a_1} l} + B_2(s) e^{\frac{\sqrt{s}}{a_1} l} &= 0, \\ B_1(s) + B_2(s) &= \frac{A}{s^2}. \end{aligned}$$

Решая систему (47) и подставляя в (46), находим

$$(48) \quad \theta_L(x, s) = \frac{T_0}{s} + \frac{A e^{-\frac{\sqrt{s}}{a_1} x}}{s^2 \left[1 - e^{-\frac{2l}{a_1} \sqrt{s}} \right]} - \frac{A e^{-\frac{\sqrt{s}}{a_1} (2l-x)}}{s^2 \left[1 - e^{-\frac{2l}{a_1} \sqrt{s}} \right]}.$$

Возьмем обратную трансформацию Лапласа из уравнении (48), т. е. находим

$$(49) \quad \theta(x, t) = T_0 + AL^{-1} \left[\frac{e^{-\frac{\sqrt{s}}{a_1} x}}{s^2 \left\{ 1 - e^{-\frac{2l}{a_1} \sqrt{s}} \right\}} \right] - AL^{-1} \left[\frac{e^{-\frac{\sqrt{s}}{a_1} (2l-x)}}{s^2 \left\{ 1 - e^{-\frac{2l}{a_1} \sqrt{s}} \right\}} \right].$$

Так как принимаем, что l маленькая величина, пренебрегаем l^2 , l^3 и т. д., т. е. имеем приблизительно

$$(50) \quad 1 - e^{-\frac{2l}{a_1} \sqrt{s}} \approx \frac{2l}{a_1} \sqrt{s}.$$

Согласно (50) из (49) получим

$$(51) \quad \theta(x, t) = T_0 + \frac{a_1 A}{2l} L^{-1} \left[\frac{e^{-\frac{\sqrt{s}}{a_1} x}}{s^{\frac{5}{2}}} \right] - \frac{a_1 A}{2l} L^{-1} \left[\frac{e^{-\frac{\sqrt{s}}{a_1} (2l-x)}}{s^{\frac{5}{2}}} \right].$$

4. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕТКИ ОБ ОБРАТНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЛАПЛАСА

Будем исходить из известной формулы [10]

$$(52) \quad L^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-k\sqrt{s}} \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{k^2}{4t}} \quad (k > 0),$$

где k произвольный положительный параметр. Из этой формулы будем получать нужные для нас выражения в (51). Для этой цели покажем законность формул

$$(53) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k} L^{-1}[\Phi(s, k)] &= L^{-1} \left[\frac{\partial \Phi(k, s)}{\partial k} \right], \\ \int_{k_1}^{k_2} L^{-1}[\Phi(s, k)] dk &= L^{-1} \left[\int_{k_1}^{k_2} \Phi(k, s) dk \right], \end{aligned}$$

где $\Phi(k, s)$ произвольная дифференцируемая функция относительно k . Пусть даны прямая и обратная трансформация Лапласа [13]

$$(54) \quad \begin{aligned} L[f(k, t)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(k, t) dt = \Phi(k, s), \\ L^{-1}[\Phi(k, s)] &= f(k, t). \end{aligned}$$

Из (54) получим

$$(55) \quad \frac{\partial f(k, t)}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k} L^{-1}[\Phi(k, s)],$$

$$(56) \quad \frac{\partial}{\partial k} L[f(k, t)] = L \left[\frac{\partial f(k, t)}{\partial k} \right] = \frac{\partial \Phi(k, s)}{\partial k}.$$

Из (56) имеем

$$(57) \quad \frac{\partial f(k, t)}{\partial k} = L^{-1} \left[\frac{\partial \Phi(k, s)}{\partial k} \right].$$

Сравнивая (55) и (57), получаем первое из соотношений (53). Интегрируя первую из формул (54), находим

$$(58) \quad L \left[\int_{k_1}^{k_2} f(k, t) dk \right] = \int_{k_1}^{k_2} \Phi(k, s) dk.$$

Если интегрируем вторую из формул (54), получим

$$(59) \quad \int_{k_1}^{k_2} f(k, t) dk = \int_{k_1}^{k_2} L^{-1}[\Phi(k, s)] dk.$$

Сравнивая (58) и (59), получаем второе из соотношений (53).

Применяя операцию интегрирования под знаком L^{-1} к формуле (52), получим

$$(60) \quad L^{-1} \left[\frac{1}{s} e^{-k\sqrt{s}} \right] = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^k e^{-\frac{k^2}{4t}} dk.$$

Аналогично, применяя ту же операцию к формуле (60), имеем

$$(61) \quad L^{-1} \left[\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} e^{-k\sqrt{s}} \right] = L^{-1} \left[\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} \right] + \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^k \left[\int_0^k e^{-\frac{k^2}{4t}} dk \right] dk - k,$$

Из свойств гамма функций [14] находим

$$(61') \quad L^{-1} \left[\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} \right] = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}.$$

Через интегрирование по частям имеем

$$(61'') \quad \int_0^k \left[\int_0^k e^{-\frac{k^2}{4t}} dk \right] dk = k \int_0^k e^{-\frac{k^2}{4t}} dk + 2te^{-\frac{k^2}{4t}} - 2t.$$

Из (61), (61') и (61'') находим

$$(62) \quad L^{-1} \left[\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} e^{-k\sqrt{s}} \right] = \frac{k}{\sqrt{\pi t}} \int_0^k e^{-\frac{k^2}{4t}} dk + 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{k^2}{4t}} - k.$$

Аналогично, совершая последовательное интегрирование формулы (62), находим

$$(63) \quad L^{-1} \left[\frac{1}{s^2} e^{-k\sqrt{s}} \right] = t + \frac{k^2}{2} - k\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{k^2}{4t}} - \left(\sqrt{\frac{t}{\pi}} + \frac{k^2}{2\sqrt{\pi t}} \right) \int_0^k e^{-\frac{k^2}{4t}} dk,$$

$$L^{-1} \left[\frac{1}{s^{\frac{5}{2}}} e^{-k\sqrt{s}} \right] = \left(k\sqrt{\frac{t}{\pi}} + \frac{k^3}{6\sqrt{\pi t}} \right) \int_0^k e^{-\frac{k^2}{4t}} dk + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{k^2}{4t}} (k^2 + 4t) - kt - \frac{1}{6} k^3.$$

Последнюю формулу будем использовать для функции температуры (51).

5. МАКСИМАЛЬНАЯ ТЕМПЕРАТУРА ВЫСТУПОВ

Температура выступов определена из формулы (36). Покажем, что для маленького интервала времени она достигает максимум. Для этой цели определим функцию $\theta(x, t)$, данную в (51). Приложим формулу (63),

в которой положим соответственно $k = \frac{x}{a_1} > 0$ и $k' = \frac{2l-x}{a_1} > 0$. Таким образом получим

$$(64) \quad \theta(x, t) = T_0 + \frac{A}{2l} \left[\left(x \sqrt{\frac{t}{\pi}} + \frac{x^3}{6a_1^2 \sqrt{\pi t}} \right) \int_0^{\frac{x}{a_1}} e^{-\frac{u^2}{4t}} du + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left(\frac{x^2}{a_1} + 4a_1 t \right) e^{-\frac{x^2}{4a_1^2 t}} - xt - \frac{x^3}{6a_1^2} \right] - \frac{A}{2l} \left[\left\{ (2l-x) \sqrt{\frac{t}{\pi}} + \frac{(2l-x)^3}{6a_1^2 \sqrt{\pi t}} \right\} \int_0^{\frac{2l-x}{a_1}} e^{-\frac{u^2}{4t}} du + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left\{ \frac{(2l-x)^2}{a_1} + 4a_1 t \right\} e^{-\frac{(2l-x)^2}{4a_1^2 t}} - (2l-x)t - \frac{(2l-x)^3}{6a_1^2} \right].$$

Из формулы (64) после соответственных выкладок находим

$$(65) \quad \frac{\partial \theta}{\partial x}(h, t) = \frac{A}{l} \left[-t - \frac{1}{a_1^2} (l^2 - lh + 0.5h^2) + \frac{h}{a_1} \sqrt{\frac{t}{\pi}} + \frac{(2l-h)}{a_1} \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{(2l-h)^2}{4a_1^2 t}} + \frac{(2l-h)^3}{12a_1^3 \sqrt{\pi t}} \left\{ 3e^{-\frac{(2l-h)^2}{4a_1^2 t}} + e^{-\frac{(2l-h)^2}{16a_1^2 t}} \right\} + \frac{(2l-h)^5}{24a_1^5 t \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(2l-h)^2}{16a_1^2 t}} \right].$$

В выводе формулы (65) использованы следующие приближения:

$$\int_0^{\frac{h}{a_1}} e^{-\frac{u^2}{4t}} du = \frac{h}{a_1},$$

$$\int_0^{\frac{2l-h}{a_1}} e^{-\frac{u^2}{4t}} du = \frac{2l-h}{a_1} e^{-\frac{(2l-h)^2}{4a_1^2 t}} + \frac{(2l-h)^3}{6a_1^2 t} e^{-\frac{(2l-h)^2}{16a_1^2 t}}$$

по причине малых значений h и l . Вставляя величину $\frac{\partial \theta}{\partial x}(h, t)$ из (65) в (36), получим окончательную формулу для температуры выступов

$$(66) \quad \theta(t) = T_0 + A_1 t + \frac{2a_1^2 A}{lh} \left[\frac{2}{3} \frac{ht\sqrt{t}}{a_1 \sqrt{\pi}} + \frac{2l-h}{a_1 \sqrt{\pi}} \int_0^t \sqrt{t} e^{-\frac{(2l-h)^2}{4a_1^2 t}} dt + \frac{(2l-h)^3}{12a_1^3 \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t}} \left\{ 3e^{-\frac{(2l-h)^2}{4a_1^2 t}} + e^{-\frac{(2l-h)^2}{16a_1^2 t}} \right\} dt + \frac{(2l-h)^5}{24a_1^5 \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{t\sqrt{t}} e^{-\frac{(2l-h)^2}{16a_1^2 t}} dt - \frac{1}{2} t^2 - \frac{t}{a_1^2} (l^2 - lh) \right].$$

Величины A_1 и A согласно (37) и (43) связаны релацией

$$(67) \quad A = \frac{h}{2l-h} A_1.$$

Дифференцируем функцию $\theta(t)$ и получим

$$(68) \quad \frac{d\theta}{dt} = A_1 + \frac{2a_1^2 A}{lh} \left[\frac{h}{a_1} \sqrt{\frac{t}{\pi}} + \frac{2l-h}{a_1} \sqrt{\frac{t}{h}} e^{-\frac{(2l-h)^2}{4a_1^2 t}} \right. \\ \left. + \frac{(2l-h)^3}{12a_1^2 \sqrt{\pi t}} \left\{ 3e^{-\frac{(2l-h)^2}{4a_1^2 t}} + e^{-\frac{(2l-h)^2}{16a_1^2 t}} \right\} + \frac{(2l-h)^5}{24a_1^5 \sqrt{\pi}} \frac{1}{t\sqrt{t}} e^{-\frac{(2l-h)^2}{16a_1^2 t}} - t - \frac{1}{a_1^2} (l^2 - lh) \right].$$

Из формулы (68) согласно (67) находим

$$\frac{d\theta}{dt}(t=0) = \frac{A_1 h}{2l-h} > 0,$$

т. е. функция $\theta(t)$ возрастает для $t = 0$. Приравнявая $\frac{d\theta}{dt}$ к нулю, после некоторых вычислений получим

$$(69) \quad t^2 \sqrt{t} - \frac{t^2}{a_1 \sqrt{\pi}} \left[h + (2l-h) e^{-\frac{(2l-h)^2}{4a_1^2 t}} \right] - \frac{lh}{2a_1^2} t \sqrt{t} \\ - \frac{(2l-h)^3}{12a_1^2 \sqrt{\pi}} t \left\{ 3e^{-\frac{(2l-h)^2}{4a_1^2 t}} + e^{-\frac{(2l-h)^2}{16a_1^2 t}} \right\} - \frac{(2l-h)^5}{24a_1^5 \sqrt{\pi}} e^{-\frac{(2l-h)^2}{16a_1^2 t}} = 0.$$

Так как $h \ll l$, из (69) находим следующее приближенное решение для t :

$$(70) \quad t_1 = 1,93 \frac{l^2}{a_1^2}.$$

Трансформируем некоторые интегралы в (66) следующим образом:

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(2l-h)^2}{4a_1^2 t}} dt = \frac{4a_1^2}{(2l-h)^2} t \sqrt{t} e^{-\frac{(2l-h)^2}{4a_1^2 t}} - \frac{6a_1^2}{(2l-h)^2} \int_0^t \sqrt{t} e^{-\frac{(2l-h)^2}{4a_1^2 t}} dt, \\ (71) \quad \int_0^t \frac{1}{t\sqrt{t}} e^{-\frac{(2l-h)^2}{16a_1^2 t}} dt = \frac{16a_1^2}{(2l-h)^2} \sqrt{t} e^{-\frac{(2l-h)^2}{16a_1^2 t}} - \frac{8a_1^2}{(2l-h)^2} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(2l-h)^2}{16a_1^2 t}} dt, \\ \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(2l-h)^2}{16a_1^2 t}} dt = \frac{16a_1^2}{(2l-h)^2} t \sqrt{t} e^{-\frac{(2l-h)^2}{16a_1^2 t}} - \frac{24a_1^2}{(2l-h)^2} \int_0^t \sqrt{t} e^{-\frac{(2l-h)^2}{16a_1^2 t}} dt.$$

Согласно теореме о средних значениях имеем приблизительно

$$(72) \quad \int_0^t \sqrt{t} e^{-\frac{(2l-h)^2}{4a_1^2 t}} dt = \frac{2}{3} t \sqrt{t} e^{-\frac{3(2l-h)^2}{8a_1^2 t}}, \\ \int_0^t \sqrt{t} e^{-\frac{(2l-h)^2}{16a_1^2 t}} dt = \frac{2}{3} t \sqrt{t} e^{-\frac{(2l-h)^2}{16a_1^2 t}}.$$

Поставим (70) в формуле (66) и согласно (71) и (72) получим

$$\theta_{\max} = T_0 + 6,83 \frac{K J f p r \omega}{h c_1 \rho_1 a_1^2} l^2 + 2,66 \frac{K J f p r \omega}{c_1 \rho_1 a_1^2} l.$$

Так как $\frac{l^2}{h} \gg l$, согласно (38) можем принимать

$$(73) \quad \theta_{\max} = T_0 + 6,83 \frac{K J f p r \omega}{h k_1} l^2.$$

Формула (73) определяет максимальную температуру данного выступа, находящегося на расстоянии r от оси вращения цилиндра.

Рассмотрим некоторые численные примеры относительно формулы (73). Возьмем цилиндры (валы) из стали с радиусом $r_0 = 50$ см. Как и в прежних примерах пусть сила нагрузки между цилиндрами $P = 785$ кг, т. е. номинальное давление будет $p = 0,1 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$. Угловая скорость вращения принимаем $\omega = 100 \text{сек}^{-1}$. Линейная периферийная скорость цилиндра будет $v = r\omega = 180 \frac{\text{км}}{\text{час}}$. Величина (15) как и раньше принимает значение $K = 9,1 \cdot 10^{-7} \frac{\text{см}^2}{\text{кг}}$. Коэффициент трения согласно формулы (28') будет по периферии цилиндра $f = 0,102$. Так как цилиндры имеют одинаковые теплофизические характеристики согласно (32) $K = \frac{1}{2}$. Коэффициент теплопроводности стали имеет стоимость $k_1 = 1,4 \cdot 10^{-4} \frac{\text{кал}}{\text{см.сек.град}}$. Температура T_0 принимаем 0°C .

Как первый пример возьмем шероховатую поверхность с выступами, имеющие высоту $h = 2 \cdot 10^{-3} \text{см} = 20 \text{мк}$ и $\alpha = 10^\circ = 0,175$. По формулам (19) имеем $R = 0,14$ см. Принимаем глубину теплоизолированности цилиндра $l = 2 \text{мм} = 2 \cdot 10^{-1} \text{см}$. По формуле (73) находим

$$\theta_{\max} = 580^\circ \text{C}.$$

Как второй пример возьмем $h = 8 \cdot 10^{-3} \text{см} = 80 \text{мк}$ и $\alpha = 10^\circ$. По формулам (19) имеем $R = 0,57$ см. Принимаем глубину $l = 5 \cdot 10^{-1} \text{см}$. По формуле (73) получим $\theta_{\max} = 906^\circ \text{C}$.

По формуле (21) в двух случаях имеем

$$\bar{p} = 940 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Жур в л е в, В. А. К вопросу о теоретическом обосновании закона Амонтон-Кулона для трения несмазанных поверхностей. — Журн. технической физики, 1940, №10, вып. 17.

2. Bowden, F. P., D. Tabor. The area of contact between stationary and moving surfaces. — Proc. Roy. Soc. vol. 169, 1939.
3. Rubinstein, C. A. A general theory of the surface friction of solids, — Proc. Phys. Soc., 1956, vol. 69.
4. Archart, J. F. Contact and rubbing of flat surfaces. — J. Appl. Phys. vol. 24, № 8, 1953.
5. Archart, J. F. Elastic deformation and the laws of friction. — Proc. Roy. Soc. vol. 243, 1957.
6. Molgaard, J. A. Coefficient of friction which increases with increasing. — Proc. Phys. Soc., vol. 79, 1962.
7. Timoshenko and Goodier. The mathematical theory of elasticity. 19, 1967.
8. Левин, Б. Н. Контактный метод измерения микрогеометрии поверхности. Машгиз, 1950.
9. Карвацкий, Б. Л. Расчет и исследование автотормозов. 1961.
10. Лыков, А. В. Теория теплопроводности. М., 1967.
11. Тихонов, А. Н., А. А. Самарский. Уравнения математической физики. 1966.
12. Карлслюу, Г., Д. Егер. Операционные методы в прикладной математике. М., 1948.
13. Дейч, Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. Физматгиз, 1958.
14. Градштейн, И. С., И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962.

Поступила 12.04.1992