ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 1 — Математика
Том 84, 1990

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 1 — Mathématiques
Tome 84, 1990

ОДНА ТЕОРЕМА О СОВПАДЕНИИ

СИМЕОН СТЕФАНОВ

Симеон Стефанов. ОДНА ТЕОРЕМА О СОВПАДЕНИИ

В этой заметке доказана одна теорема о совпадении для отображений между эвклидовыми пространствами.

Simeon Stefanov. A COINCIDENCE POINT THEOREM

In this note a coincidence point theorem is proved for maps between Euclidean spaces.

Напомним классическую теорему Пуанкаре–Хопфа (см. напр. [2]).

Теорема (Пуанкаре–Хопф). *Каждое векторное поле на четномерной сфере S^{2k} аннулируется в некоторой точке $x \in S^{2k}$.*

В этой заметке получена одна теорема о совпадении в довольно общей ситуации, которая обобщает, в частности, теорему Пуанкаре–Хопфа.

Прежде чем сформулировать основний результат, сделаем некоторые замечания об обозначениях.

Если $\mathbf{R}^k \subset \mathbf{R}^n$ — канонически вложенные эвклидовые пространства, то через $(\mathbf{R}^k)^\perp$ обозначаем ортогонольное дополнение $\mathbf{R}^k$ в $\mathbf{R}^n$.

$\dim A$ обозначает размерность Лебега множества A, определенную при помощи покрытий.

$H_n(A, B)$ есть группа относительных гомологий пары (A, B) с целыми коэффициентами.

Одноточечная компактификация $\mathbf{R}^n$ является сферой S^n; будем предполагать, что $\mathbf{R}^n$ компактифицировано при помощи точки ∞, так что $S^n =$

$\mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$. Подмножество $A \subset \mathbf{R}^n$ будем также считать и подмножеством S^n.

В работе использованы элементарные свойства гомологий и некоторые свойства эйлерового класса $e(\xi)$ векторного расслоения ξ.

Теорема. *Пусть* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *непрерывное отображение и* $P : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{2k+1}$ *— ортогональный проектор* $(2k+1 \leqq n)$. *Рассмотрим множество*

$$A = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \exists \lambda \in \mathbf{R} : Pf(x) = \lambda P(x)\}.$$

Тогда $\dim A \geqq n - 2k$ *и даже*

$$H_{n-2k}\Big(A \cup \{\infty\}), (\mathbf{R}^{2k+1})^{\perp} \cup \{\infty\}\Big) \neq 0.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{R}^{2k+1} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_{2k+2} = \cdots = x_n = 0\}$ и $\mathbf{R}^{n-2k-1} = (\mathbf{R}^{2k+1})^{\perp} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_1 = \cdots = x_{2k+1} = 0\}$. Введем обозначения $A_* = A \cup \{\infty\}$, $\mathbf{R}_*^{n-2k-1} = \mathbf{R}^{n-2k-1} \cup \{\infty\}$, тогда ясно, что $\mathbf{R}_*^{n-2k-1} \subset A_*$. Будем считать также, что $S^n = \mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$.

Допустим, что $H_{n-2k}(A_*, \mathbf{R}_*^{n-2k-1}) = 0$. Тогда отображение

$$H_{n-2k-1}(\mathbf{R}_*^{n-2k-1}) \to H_{n-2k-1}(A_*),$$

индуцированное вложением, является мономорфизмом. Из двойственности Александера (см. [1], с. 319) следует, что

$$H^{2k}(S^n \setminus \mathbf{R}_*^{n-2k-1}) \to H^{2k}(S^n \setminus A_*)$$

также мономорфизм и значит отображение

$$H^{2k}(\mathbf{R}^n \setminus \mathbf{R}^{n-2k-1}) \to H^{2k}(\mathbf{R}^n \setminus A),$$

индуцированное вложением, тоже мономорфизм. Наконец, существует компакт $K \subset \mathbf{R}^n \setminus A$ такой, что мономорфизм и отображение

$$i^* : H^{2k}(\mathbf{R}^n \setminus \mathbf{R}^{n-2k-1}) \to H^{2k}(K),$$

где $i : K \hookrightarrow \mathbf{R}^n \setminus \mathbf{R}^{n-2k-1}$ — вложение.

Определим $\pi : \mathbf{R}^n \setminus \mathbf{R}^{n-2k-1} \to S^{2k}$ формулой

$$\pi(x) = \frac{(x_1, \ldots, x_{2k+1})}{\|x_1, \ldots, x_{2k+1})\|} = \frac{P(x)}{\|P(x)\|}.$$

Очевидно, что $\pi^* : H^{2k}(S^{2k}) \to H^{2k}(\mathbf{R}^n \setminus \mathbf{R}^{n-2k-1})$ — изоморфизм. Пусть ξ — касательное расслоение над S^{2k}. Тогда его эйлеров класс является нетривиальным — $e(\xi) \neq 0$. Рассмотрим отображение $\pi i : K \to S^{2k}$ и расслоение $\eta = (\pi i)^* \xi$ над K. Имеем $e(\eta) = e((\pi i)^* \xi) = (\pi i)^* e(\xi) = i^* \pi^* e(\xi) \neq 0$ в силу того, что $i^* \pi^*$ - мономорфизм. Это означает, что каждое сечение расслоения η аннулируется (см. напр. [2], с. 87). Мы построим, однако, ненулевое сечение η, что является противоречием.

Геометрически η можно представить следующим образом: если $\tau(\pi(x))$ — касательное пространство к S^{2k} в точке $\pi(x)$, то слой η в точке x равен $\eta_x = x - \pi(x) + \tau(\pi(x))$. Если $x \in K$, то $x \notin A$ и значит векторы $Pf(x)$ и $P(x)$ не коллинеарны, откуда следует, что вектор $P(f(x) - x)$

не является нормальным к S^{2k}. Пусть $\pi_x : \mathbf{R}^n \to \eta_x$ обозначает проекцию на слой η_x, тогда определяя

$$S(x) = \pi_x P(f(x) - x)$$

получаем ненулевое сечение расслоения η , что противоречит $e(\eta) \neq 0$.

Следствие. *Пусть* $f : \mathbf{R}^{2k+1} \to \mathbf{R}^{2k+1}$ *непрерывное отображение и*

$$A = \left\{ x \in \mathbf{R}^{2k+1} | \, \exists \lambda \in \mathbf{R} : f(x) = \lambda(x) \right\}.$$

Тогда компонента связности A, *содержащая* 0 — *неограничена.*

Отметим, что для четномерных пространств $\mathbf{R}^{2k}$ следствие (и тем более теорема) неверно — достаточно представить

$$\mathbf{R}^{2k} = \{ z = (z_1, \cdots, z_k) \in \mathbf{C}^k \}$$

и взять например $f(z) = (iz_1, \cdots, iz_k)$.

Это следствие обобщает упомянутую теорему Пуанкаре–Хопфа. В самом деле, допустим, что на S^{2k} существует ненулевое касательное векторное поле τ. Считая сферу S^{2k} вложенной в $\mathbf{R}^{2k+1}$, обозначим через $f(x)$ конец касательного вектора $\tau(x)$. Продолжим f на $\mathbf{R}^{2k+1}$ так:

$$\tilde{f}(x) = f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \|x\| \text{ для } x \neq o \text{ и } \tilde{f}(o) = o.$$

Тогда получаем противоречие со следствием, так как в этом случае множество A одноточечно — $A = \{o\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М а с с и, У. Теория гомологий и когомологий. М., 1981.
2. М и л н о р, Д ж., Д ж. С т а ш е ф. Характеристические классы. М., 1979.

Поступила 29.03.1991