ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 1 — Математика
Том 84, 1990

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI"

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 1 — Mathématiques
Tome 84, 1990

О СКЛЕИВАНИЯХ, ПРОИСХОДЯЩИХ ПРИ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ТОРА В ПЛОСКОСТЬ

НИКОЛАЙ ХАДЖИИВАНОВ, СИМЕОН СТЕФАНОВ

Николай Хаджиизанов, Симеон Стефанов. О СКЛЕИВАНИЯХ, ПРОИСХОДЯЩИХ ПРИ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ТОРА В ПЛОСКОСТЬ

Рассматриваются непрерывные отображения двумерного тора в плоскость. Н. Хаджииванов доказал (см. [1]), что любое такое отображение склеивает пару удаленных точек. Позже он уточнил местоположение этих точек. Настоящее доказательство этого утверждения принадлежит обоим авторам.

Nikolay Khadzhiivanov, Simeon Stefanov. ON THE IDENTIFICATION OF POINTS BY CONTINUOUS MAPS FROM THE TORUS TO THE PLANE

Continuous maps from a 2-dimensional torus to the plane are considered. N. Khadzhiivanov has proved for such maps that they identify a pair of distant points (cf. [1]). Later he has precised the situation of these points. The present proof of this result belongs to the both authors.

Согласно классической теореме Борсука–Улама, для всякого непрерывного отображения $f : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}^2$ сферы $\mathbf{S}^2$ в плоскость $\mathbf{R}^2$ найдется пара диаметрально противоположных точек сферы, образы которых совпадают. Об аналогичном результате пойдет речь в настоящей статье.

Полуокружность $(x-r)^2 + z^2 = 1$, $y = 0$, $x \leqq r$, где $r > 1$, обозначим через L, а допольнителную — через L'. Через S обозначим поверхность, полученную вращением полуокружности L' вокруг оси $\overrightarrow{Oz}$. Очевидно $T = S \cup L$ является подмножеством двумерного тора T^2, полученного вращением окружности $L \cup L'$ вокруг оси $\overrightarrow{Oz}$. Для любой точки $u \in L$

через S_u обозначим окружность на торе, параллельную плоскости Oxy и проходящую через точку на окружности $L \cup L'$, диаметрально противоположную точке u. Круг с контуром S_u обозначим через $\mathcal{D}_u$. Положим $a = (r, 0, 1)$, $b = (r, 0, -1)$.

В [1] сформулировано следующее предложение:

При любом непрерывном отображении $f : T^2 \to \mathbf{R}^2$ найдется пара точек (u, v), для которых $\|u - v\| \geqq 2r$ и $f(u) = f(v)$.

На VI-ой конференции Болгарского математического общества в Варне, 6–9 апреля 1977, обоими авторами был сделан доклад, в котором это предложение уточняется следующим образом:

Теорема (Н. Хаджииванов, 1973). *Пусть $f : T \to \mathbf{R}^2$ — непрерывное отображение. Тогда оно имеет хотя бы одно из следующих трех свойств:*

1) $f(S_a) \cap f(S_b) \neq \varnothing$;

2) *Существует точка $u \in L \setminus \{a, b\}$, для которой $f(u) \in f(S_u)$;*

3) *Существует точка $u \in S \setminus (S_a \cup S_b)$, для которой $f(u) = f(-u)$.*

Предложение из [1] является тривиальным следствием из этой теоремы, потому что $T \subset T^2$ и любое из свойств 1)–3) очевидно гарантирует существование пары (u, v), для которой $\|u - v\| \geqq 2r$ и $f(u) = f(v)$.

Свойства 1) – 3) независимы:

1. Ортогональная проекция на плоскость Oxy удовлетворяет только свойство 1).

2. Если $f : T \to \mathbf{R}^2$ — произвольное непрерывное отображение, которое взаимно однозначно на S, тогда выполняется только свойство 2).

3. Пусть f — тождественно на L, а любой точке u из S отображение f сопоставляет точку v на полуокружности L', имеющую ту же самую аппликату. Тогда f — непрерывное отображение множества T в плоскость Oxz, которое удовлетворяет только свойство 3).

Приступаем к доказательство теоремы, принадлежащее обоим авторам.

Лемма 1. *В плоскости даны два дизюнктные континуума. Тогда хотя бы один из них содержится в неограниченной компоненте связности дополнения другого.*

Доказательство. Пусть P и Q — континуумы в $\mathbf{R}^2$ и $P \cap Q = \varnothing$. Легко сообразить, что имеется луч $\overrightarrow{m}$ с началом $d \in P \cup Q$, который не содержит других точек из $P \cup Q$; пусть например $d \in Q$. Тогда $\overrightarrow{m} \cup Q$ — связное множество, которое не пересекает P и следовательно содержится в компоненте множества $\mathbf{R}^2 \setminus P$; эта компонента неограничена, так как содержит $\overrightarrow{m}$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть K — простая односторонне неограниченная конечная ломанная на плоскости $\mathbf{R}^2$. Тогда ее дополнение $\mathbf{R}^2 \setminus K$ гомеоморфно $\mathbf{R}^2$.*

Доказательство. Очевидно существует гомеоморфизм плоскости $\mathbf{R}^2$ на себя, при котором K изображается на некоторый луч $\overrightarrow{m}$. Нетрудно сообразить, что $\mathbf{R}^2 \setminus \overrightarrow{m}$ гомеоморфно открытой полуплоскости, а значит — $\mathbf{R}^2 \setminus K$ гомеоморфно $\mathbf{R}^2$.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть F — замкнутое подмножество нормального топологического пространства X, а $f : F \to \mathbf{R}^2$ — непрерывное отображение. Если точка c содержится в неограниченной компоненте связности множества $\mathbf{R}^2 \setminus f(F)$, тогда существует непрерывное продолжение $\tilde{f} : X \to \mathbf{R}^2$ отображения f, для которого $c \notin \tilde{f}(X)$.*

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{m}$ — луч в $\mathbf{R}^2$ с началом d, который целиком содержится в $\mathbf{R}^2 \setminus f(F)$. Тогда $\overrightarrow{m}$ содержится в неограниченной компоненте U этого множества. Так как, по условию, и $c \in U$, то существует конечная ломанная P, содержащаяся в U, которая соединяет c с d. Без ограничения общности можно считать, что P — простая ломанная, которая не пересекает $\overrightarrow{m}$, кроме в d. Тогда $K = P \cup \overrightarrow{m}$ — простая односторонне неограниченная ломанная в $\mathbf{R}^2$ и, согласно лемме 2, множество $\mathbf{R}^2 \setminus K$ гомеоморфно $\mathbf{R}^2$. Тогда непрерывное отображение $f : F \to \mathbf{R}^2 \setminus K$, согласно классической теореме Титце–Урысона, продолжается до непрерывного отображения $\tilde{f} : X \to \mathbf{R}^2 \setminus K$. Из включения $c \in K$ следует, что $c \notin \tilde{f}(X)$.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть F — замкнутое подмножество нормального пространства X, c и d — точки плоскости $\mathbf{R}^2$, $\varepsilon > 0$, $c \in O_\varepsilon(d)$ и $f : F \to \mathbf{R}^2$ — непрерывное отображение, для которого $f(F) \cap O_\varepsilon(d) = \varnothing$. Если существует непрерывное продолжение $\varphi : X \to \mathbf{R}^2$ отображения f, для которого $c \notin \varphi(X)$, тогда существует непрерывное продолжение $\tilde{f} : X \to \mathbf{R}^2$ отображения f, для которого $\tilde{f}(X) \cap O_\varepsilon(d) = \varnothing$.*

Доказательство. Пусть $r : \mathbf{R}^2 \setminus c \to \mathbf{R}^2 \setminus O_\varepsilon(d)$ — непрерывная ретракция и $\tilde{f} = r\varphi$. Докажем, что $\tilde{f}$ обладает искомым свойством.

Если $x \in F$, тогда $\varphi(x) = f(x)$ и так как $f(x) \notin O_\varepsilon(d)$, то $\tilde{f}(x) = r(f(x)) = f(x)$. Таким образом, $\tilde{f}$ является продолжением отображения. Соотношение $\tilde{f}(X) \cap O_\varepsilon(d) = \varnothing$ выполнено, потому что $\tilde{f}(x) = r(\varphi(x)) \in r(\mathbf{R}^2 \setminus c) \subset \mathbf{R}^2 \setminus O_\varepsilon(d)$ для любого $x \in X$.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $f : T \to \mathbf{R}^2$ — непрерывное отображение, для которого $f(S_a) \cap f(S_b) = \varnothing$ и $f(u) \notin f(S_u)$ для любого $u \in L$. Тогда существует непрерывное отображение $\tilde{f} : \mathcal{D}_a \cup \mathcal{D}_b \to \mathbf{R}^2$, которое является продолжением отображения $f\big|_{S_a \cup S_b}$ и удовлетворяет условиям $f(a) \notin \tilde{f}(\mathcal{D}_a)$ и $f(b) \notin \tilde{f}(\mathcal{D}_b)$.*

Доказательство. Определим подмножество L_+ множества L следующим образом: $u \in L_+$ тогда и только тогда, когда существует непрерывное продолжение $f_u : \mathcal{D}_u \to \mathbf{R}^2$ отображения $f\big|_{S_u}$, для которого $f(u) \notin f_u(\mathcal{D}_u)$. Нам нужно доказать, что $a \in L_+$ и $b \in L_+$; действительно, тогда можно будеть положит $\tilde{f}(u) = f_a(u)$ для любого $u \in \mathcal{D}_a$ и $\tilde{f}(u) = f_b(u)$ для любого $u \in \mathcal{D}_b$ и отображение $\tilde{f}$ будет искомое.

Сначала установим, что $L_+ \neq \varnothing$. Одно из множеств $f(S_a)$, $f(S_b)$ содержится в неограниченной компоненте дополнения другого (см. лемму 1): пусть это например $f(S_a)$. Так как $b \in S_a$, то $f(b)$ лежит в неограниченной компоненте множества $\mathbf{R}^2 \setminus f(S_b)$ и, поэтому существует непрерывное продолжение $f_b : \mathcal{D}_b \to \mathbf{R}^2$ отображения $f\big|_{S_b}$, для которого $f(b) \notin f_b(\mathcal{D}_b)$ (см.

лемму 3). А это показывает, что $b \in L_+$.

Итак, $L_+ \neq \varnothing$. А теперь докажем, что L_+ — открыто–замкнутое подмножество множества L, т. е. что множества L_+ и $L_- = L \setminus L_+$ — открыты в L. А это будет так, если для любой точки $u_0 \in L$ существует дуга $\langle u_1, u_2 \rangle$, содержащая u_0 и целиком лежащая или в L_+, или в L_-.

Пусть $u_0 \in L$. По условию $f(u_0) \notin f(S_{u_0})$ и следовательно существует $\varepsilon > 0$, для которого $O_{2\varepsilon}(f(u_0)) \cap f(S_{u_0}) = \varnothing$. Легко сообразить, что имеются $u_1 \in L$ и $u_2 \in L$, для которых $u_0 \in \langle u_1, u_2 \rangle$ и

$$(1) \qquad f(\langle u_1, u_2 \rangle) \subset O_\varepsilon(f(u_0))$$

и

$$(2) \qquad O_\varepsilon(f(u_0)) \cap f(S_u) = \varnothing \quad \text{для любого } u \in \langle u_1, u_2 \rangle.$$

Действительно, из равномерной непрерывности отображения $f\big|_S$ следует, что если окружность S_u достаточно близка к S_{u_0}, тогда $f(S_u) \subset O_\varepsilon(f(S_{u_0}))$ и так как $O_{2\varepsilon}(f(u_0)) \cap f(S_{u_0}) = \varnothing$, то $O_\varepsilon(f(u_0)) \cap f(S_u) = \varnothing$.

Докажем, что при сделанном выборе u_1 и u_2 имеет место или включение $\langle u_1, u_2 \rangle \subset L_-$, или $\langle u_1, u_2 \rangle \in L_+$. Допустим, что первое не выполнено и следовательно $\langle u_1, u_2 \rangle \cap L_+ \neq \varnothing$. Надо доказать, что $\langle u_1, u_2 \rangle \subset L_+$. Пусть $u' \in \langle u_1, u_2 \rangle \cap L_+$, а $u'' \in \langle u_1, u_2 \rangle$. Надо доказать, что $u'' \in L_+$, т. е. что существует непрерывное продолжение $f_{u''} : \mathcal{D}_{u''} \to \mathbf{R}^2$ отображения $f\big|_{S_{u''}}$, для которого $f(u'') \notin f_{u''}(\mathcal{D}_{u''})$.

Так как $u' \in L_+$, то существует непрерывное продолжение $f_{u'} : \mathcal{D}_{u'} \to \mathbf{R}^2$ отображения $f\big|_{S_{u'}}$, для которого $f(u') \notin f_{u'}(\mathcal{D}_{u'})$. Благодаря лемме 4, можно считать, что $f_{u'}(\mathcal{D}_{u'}) \cap O_\varepsilon(f(u_0)) = \varnothing$, так как $u' \in O_\varepsilon(f(u_0))$ (см. (1)) и $f(S_{u'}) \cap O_\varepsilon(f(u_0)) = \varnothing$ (см. (2)). Положим $\overline{\mathcal{D}}_{u''} = \mathcal{D}_{u'} \cup \bigcup\{S_u | u \in \langle u', u'' \rangle\} \cup S_{u''}$ и определим отображение $\overline{f}_{u''} : \overline{\mathcal{D}}_{u''} \to \mathbf{R}^2$ следующим образом: $\overline{f}_{u''}(v) = f_{u'}(v)$, если $v \in \mathcal{D}_{u'}$, и $\overline{f}_{u''}(v) = f(v)$, если $v \in S_u$ для некоторого $u \in \langle u', u'' \rangle \cup \{u''\}$.

Из данного определения ясно, что $\overline{f}_{u''}$ является продолжением отображения $f\big|_{S_{u''}}$.

Докажем, что $f(u'') \notin \overline{f}_{u''}(\mathcal{D}_{u''})$. Действительно $\overline{f}_{u''}(\mathcal{D}_{u'}) = f_{u'}(\mathcal{D}_{u'})$ и $f_{u'}(\mathcal{D}_{u'}) \cap O_\varepsilon(f(u_0)) = \varnothing$. Кроме того, если $u \in \langle u', u'' \rangle \cup \{u''\}$, тогда $\overline{f}_{u''}(S_u) = f(S_u)$, а $f(S_u) \cap O_\varepsilon(f(u_0)) = \varnothing$ (см. (2)). Следовательно, $\overline{f}_{u''}(\overline{\mathcal{D}}_{u''}) \cap O_\varepsilon(f(u_0)) = \varnothing$ и так как $f(u'') \subset f(\langle u_1, u_2 \rangle) \subset O_\varepsilon(f(u_0))$, то $f(u'') \notin \overline{f}_{u''}(\overline{\mathcal{D}}_{u''})$.

Очевидно существует гомеоморфизм $h : \mathcal{D}_{u''} \xrightarrow{\text{на}} \overline{D}_{u''}$, который оставляет на месте все точки из $S_{u''}$. Положим $f_{u''} = \overline{f}_{u''} h$. Тогда $f_{u''} : \mathcal{D}_{u''} \to \mathbf{R}^2$ — непрерывное продолжение отображения $f\big|_{S_{u''}}$ и $f_{u''}(\mathcal{D}_{u''}) = \overline{f}_{u''}(\overline{\mathcal{D}}_{u''})$; так что $f(u'') \notin f_{u''}(\mathcal{D}_{u''})$.

Таким образом доказано, что $u'' \in L_+$.

Итак, L_+ — непустое открыто–замкнутое подмножество связного множества L. Следовательно $L_+ = L$ и значит $a \in L_+$, $b \in L_+$.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть* $f : \mathcal{D} \to \mathbf{R}^2$ *— непрерывное отображение круга* $\mathcal{D}$ *в плоскость* $\mathbf{R}^2$, $\partial\mathcal{D}$ *— контур круга,* $p \in \partial\mathcal{D}$, $q \in \partial\mathcal{D}$, $p \neq q$, $0 < 2\delta < \|p - q\|$. *Тогда существует непрерывное отображение* $\tilde{f} : \mathcal{D} \to \mathbf{R}^2$ *со следующими свойствами:*

1. $\tilde{f}(\mathcal{D}) \subset f(\mathcal{D})$;
2. $\tilde{f}\big|_{\partial\mathcal{D}} = f\big|_{\partial\mathcal{D}}$;
3. $\tilde{f}(\mathcal{D} \setminus (O_\delta(p) \cup O_\delta(q)) \subset f(\partial\mathcal{D})$;
4. $\tilde{f}(O_\delta(p) \subset f(O_\delta(p))$.

Доказательство. Определим непрерывное отображение $\varphi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ со следующими свойствами:

а) $\varphi\big|_{\partial\mathcal{D}} = \mathrm{id}$;

б) $\varphi(\mathcal{D} \setminus O_\delta(q)) \subset \partial\mathcal{D}$;

в) $\varphi(O_\delta(p)) \subset O_\delta(p) \cap \partial\mathcal{D}$.

Построить φ не составит никакого труда. А теперь определим искомое $\tilde{f}$ следующим образом $\tilde{f} = f\varphi$. Проверка условий $1-4$ элементарна.

Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть* $f : \mathcal{D}_a \cup \mathcal{D}_b \to \mathbf{R}^2$ *— непрерывное отображение,* $f(S_a) \cap f(S_b) = \varnothing$, $f(a) \notin f(\mathcal{D}_a)$, $f(b) \notin f(\mathcal{D}_b)$. *Тогда существует непрерывное отображение* $\tilde{f} : \mathcal{D}_a \cup \mathcal{D}_b \to \mathbf{R}^2$ *со следующими свойствами:*

1) $\tilde{f}\big|_{S_a \cup S_b} = f\big|_{S_a \cup S_b}$;

2) $\tilde{f}(u) \neq \tilde{f}(-u)$ *для любого* $u \in \mathcal{D}_a$.

Доказательство. Как легко сообразить, существует δ, $0 < \delta < 2r$, для которого $f(O_\delta(a)) \cap f(O_\delta(b)) = \varnothing$, $f(O_\delta(a)) \cap f(\mathcal{D}_a) = \varnothing$, $f(O_\delta(b)) \cap f(\mathcal{D}_b) = \varnothing$.

Применяя лемму 6 для круга $\mathcal{D} = \mathcal{D}_b$ и точек $p = a$ и $q = -b$, построим отображение $\tilde{f} : \mathcal{D}_b \to \mathbf{R}^2$, для которого

1б. $\tilde{f}(\mathcal{D}_b) \subset f(\mathcal{D}_b)$;

2б. $\tilde{f}\big|_{S_b} = f\big|_{S_b}$;

3б. $\tilde{f}(\mathcal{D}_b \setminus (O_\delta(a) \cup O_\delta(-b))) \subset f(S_b)$;

4б. $\tilde{f}(O_\delta(a)) \subset f(O_\delta(a))$.

Применяя повторно лемму 6, на этот раз для круга $\mathcal{D} = \mathcal{D}_a$ и точек $p = b$ и $q = -a$, построим отображение $\tilde{f} : \mathcal{D}_a \to \mathbf{R}^2$, для которого

1а. $\tilde{f}(\mathcal{D}_a) \subset f(\mathcal{D}_a)$;

2а. $\tilde{f}\big|_{S_a} = f\big|_{S_a}$;

3а. $\tilde{f}(\mathcal{D}_a \setminus (O_\delta(b) \cup O_\delta(-a))) \subset f(S_a)$;

4а. $\tilde{f}(O_\delta(b)) \subset f(O_\delta(b))$.

Легко доказать, что таким образом определенное отображение $\tilde{f} : \mathcal{D}_a \cup \mathcal{D}_b \to \mathbf{R}^2$ обладает искомыми свойствами. Свойство 1) очевидно. Чтобы доказать и свойство 2), рассмотрим отдельно три возможности.

Пусть $u \in \mathcal{D}_a \setminus (O_\delta(b) \cup O_\delta(-a))$. Тогда $-u \in \mathcal{D}_b \setminus (O_\delta(a) \cup O_\delta(-b))$. Воспользуемся 3а и 3б, чтобы сделать заключение, что $\tilde{f}(u) \subset f(S_a)$ и $\tilde{f}(-u) \in f(S_b)$, так что $\tilde{f}(u) \neq \tilde{f}(-u)$.

Пусть теперь $u \in O_\delta(b)$. Из 4а следует, что $\tilde{f}(u) \subset f(O_\delta(b))$. Так как $\tilde{f}(-u) \subset \tilde{f}(\mathcal{D}_b) \subset f(\mathcal{D}_b)$ (см. 1б) и $f(O_\delta(b)) \cap f(\mathcal{D}_b) = \varnothing$, то $\tilde{f}(u) \neq \tilde{f}(-u)$.

Пусть, наконец, $u \in O_\delta(-a)$. Тогда $-u \in O_\delta(a)$. Из 1а следует, что $\tilde{f}(u) \subset f(\mathcal{D}_a)$, а из 4б — что $\tilde{f}(-u) \subset f(O_\delta(a))$. Так как $f(\mathcal{D}_a) \cap f(O_\delta(a)) = \varnothing$, то $\tilde{f}(u) \neq \tilde{f}(-u)$.

Таким образом доказано, что $\tilde{f}(u) \neq \tilde{f}(-u)$ для любого $u \in \mathcal{D}_a$.

Доказательство леммы завершено.

Доказательство теоремы. Пусть $f : T \to \mathbf{R}^2$ — непрерывное отображение, для которого $f(S_a) \cap f(S_b) = \varnothing$ и $f(u) \notin f(S_u)$ для любого $u \in L$. Докажем, что существует $u_0 \in S$, для которого $f(u_0) = f(-u_0)$.

Согласно лемме 5 существует непрерывное отображение $\tilde{f} : \mathcal{D}_a \cup \mathcal{D}_b \to \mathbf{R}^2$, которое является продолжением отображения $f|_{S_a \cup S_b}$ и, кроме того, $\tilde{f}(a) \notin \tilde{f}(\mathcal{D}_a)$, $\tilde{f}(b) \notin \tilde{f}(\mathcal{D}_b)$. Тогда из леммы 7 следует, что существует непрерывное отображение $\hat{f} : \mathcal{D}_a \cup \mathcal{D}_b \to \mathbf{R}^2$, которое является продолжением отображения $\tilde{f}|_{S_a \cup S_b}$, а следовательно и отображения $f|_{S_a \cup S_b}$ и, кроме того, $\hat{f}(u) \neq \hat{f}(-u)$ для любого $u \in \mathcal{D}_a$.

Положим $\hat{S} = S \cup \mathcal{D}_a \cup \mathcal{D}_b$ и определим $\hat{f}(u) = f(u)$ для любого $u \in S$. Таким образом, непрерывное отображение $\hat{f} : \hat{S} \to \mathbf{R}^2$ определено на все множество $\hat{S}$, которое очевидно гомеоморфно двумерной сфере S^2. Согласно теореме Борсука–Улама существует $u_0 \in \hat{S}$, для которого $\hat{f}(u_0) = \hat{f}(-u_0)$. Но мы знаем, что $\hat{f}(u) \neq \hat{f}(-u)$ для любого $u \in \mathcal{D}_a \cup \mathcal{D}_b$. Следовательно $u_0 \in S$ и значит $f(u_0) = f(-u_0)$.

Таким образом доказательство теоремы завершено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаджииванов, Н. Г. Непрекъснати изображения на кабърчета в евклидови пространства. — Математика и математическо образование (Доклади на II пролетна конф. на БМД). С., БАН, 1974, 221–230.

Поступила 18.05.1991