ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 1 — Математика
Том 84, 1990

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 1 — Mathématiques
Tome 84, 1990

О РАЗМЕРНОСТИ БИКОМПАКТОВ*

НИКОЛАЙ ХАДЖИИВАНОВ

Николай Хаджииванов. О РАЗМЕРНОСТИ БИКОМПАКТОВ

Пусть X — бикомпакт, обладающий следующим свойством: если $X = U \cup V$, где U и V — открытые множества, тогда существует такая последовательность замкнутых множеств $F_1, F_2, \ldots, F_k, \ldots$, что $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, $F_k \subset U$ или $F_k \subset V$ для любого k и $\dim(F_i \cap F_j) \leqq n-1$, если $i \neq j$. Тогда $\dim X \leqq n$.

Nikolaj Khadzhiivanov. ON THE DIMENSION OF COMPACTA

The inequality $\dim X \leqq n$ holds for a compact space X with the property that each binary open cover has a countable closed refinement $\{F_k\}$ such that $\dim(F_i \cap F_j) \leqq n-1$ for $i \neq j$.

В статье [1] мы доказали следующий результат:

Пусть X — бикомпакт, в любое бинарное открытое покрытие которого можно вписать счетное дизъюнктное замкнутое покрытие. Тогда $\dim X \leqq 0$.

Теперь мы обобщим это предложение следующим образом:

Теорема. *Пусть X — бикомпакт, в любое бинарное открытое покрытие которого можно вписать такое счетное замкнутое покрытие, что пересечение любых его двух различных элементов имеет размерность* $\dim$ *не более чем $n-1$. Тогда* $\dim X \leqq n$.

---

* Доклад V конференции Болгарского математического общества, Габрово, 8–10 апреля 1976 г. Труды конференции еще не вышли в свет.

Обратное утверждение не верно. Федорчук построил в [2] для любого n, $n \geqq 2$, пример бикомпакта X_n, любое замкнутое подмножество которого имеет размерность dim или 0 или n, где n — размерность самого бикомпакта X_n. Очевидно нельзя в любое бинарное открытое покрытие бикомпакта X_n вписать счетное замкнутое покрытие, пересечение любых двух различных элементов которого имеет размерность не более чем $n-1$. Действительно, если это было бы возможно, тогда все вопросные пересечения имели бы размерность 0 и, следовательно, по только что сформулированной теореме получили бы $\dim X_n \leqq 1$, что естественно является противоречием.

С другой стороны, легко видеть, что утверждение, которое мы сформулировали в самом начале, обратимо, так как очевидно в любое открытое покрытие бикомпакта X, для которого $\dim X = 0$, можно вписать даже конечное замкнутое дизъюнктное покрытие.

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая

Лемма. *Пусть A_+ и A_- — замкнутые непересекающиеся подмножества бикомпакта C, который является объединением счетного числа дизъюнктных замкнутых подмножеств, никакое из которых не пересекает одновременно A_+ и A_-. Тогда существуют замкнутые подмножества C_+ и C_- бикомпакта C, для которых $A_+ \subset C_+$, $A_- \subset C_-$, $C = C_+ \cup C_-$, $C_+ \cap C_- = \varnothing$.*

Доказательство леммы содержится в доказательстве леммы 3 на с. 123 нашей работы [3].

Доказательство теоремы. Допустим, что $\dim X \geqq n+1$. Тогда в X можно найти такие $n+1$ пары замкнутых множеств Φ_{+i}, Φ_{-i}, для которых $\Phi_{+i} \cap \Phi_{-i} = \varnothing$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, и нельзя найти перегородок C_i в X между Φ_{+i} и Φ_{-i}, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, с пустым пересечением $\bigcap_{i=1}^{n+1} C_i$. Положим $U_+ = X \setminus \Phi_{-(n+1)}$ и $U_- = X \setminus \Phi_{+(n+1)}$. Открытые множества U_+ и U_- составляют открытое бинарное покрытие ω бикомпакта X. В покрытие ω впишем такое счетное замкнутое покрытие, что пересечение любых его двух различных элементов имеет размерность не более чем $n-1$; пусть $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_j, \ldots$ — элементы этого покрытия. Очевидно никакое из множеств $\mathcal{F}_j$ не пересекает одновременно $\Phi_{+(n+1)}$ и $\Phi_{-(n+1)}$. Множество

$$M = \bigcup_{i \neq j} \mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j$$

имеет размерность $\dim M \leqq n-1$. Кроме того, оно F_σ-множество и поэтому (см. [3]) множество $X \setminus M$ нормально прилегает к M. Тогда (см. [3]) существуют перегородки C_i в X между Φ_{+i} и Φ_{-i}, $i = 1, 2, \ldots, n$, такие что

$$M \cap \bigcap_{i=1}^{n} C_i = \varnothing.$$

Множество $C = \bigcap_{i=1}^{n} C_i$ и его подмножества $A_+ = C \cap \Phi_{+(n+1)}$ и $A_- = C \cap \Phi_{-(n+1)}$ удовлетворяют всем условиям леммы, так как никакое из замкнутых подмножеств $C \cap \mathcal{F}_j$ бикомпакта C не пересекает одновременно A_+ и A_- и, кроме того, они попарно не пересекаются: $(C \cap \mathcal{F}_i) \cap (C \cap \mathcal{F}_j) \subset C \cap M$, а $C \cap M = \varnothing$. Тогда существуют замкнутые подмножества C_+ и C_- бикомпакта C, для которых $C = C_+ \cup C_-$, $C_+ \cap C_- = \varnothing$, $A_+ \subset C_+$, $A_- \subset C_-$. Замкнутые множества $C_+ \cup \Phi_{+(n+1)}$ и $C_- \cup \Phi_{-(n+1)}$ не пересекаются и поэтому существует перегородка C_{n+1} в X между ними. Ясно, что C_{n+1} является перегородкой между $\Phi_{+(n+1)}$ и $\Phi_{-(n+1)}$ и $C \cap C_{n+1} = \varnothing$.

Итак, мы нашли перегородки C_i в X между Φ_{+i} и Φ_{-i}, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, такие что $\bigcap_{i=1}^{n+1} C_i = \varnothing$.

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Доказанная теорема обощает частично теорему из §2 нашей статьи [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаджииванов, Н. О размерности компактных метрических пространств. — Докл. Болг. Акад. наук, **29**, 1976, № 7, 1085–1086.
2. Федорчук, В. В. Бикомпакты без промежуточных размерностей. — ДАН СССР, **213**, 1973, № 4, 795–798.
3. Хаджииванов, Н. О продолжении отображений в сферы и о счетных разложениях тихоновских кубов. — Матем. сборник, **84**, 1971, № 1, 119–140.
4. Хаджииванов, Н. О счетных объединениях замкнутых множеств, попарные пересечения которых имеют ограниченную размерность. — Докл. Болг. Акад. наук, **29**, 1976, № 6, 779–781.

Поступила 18.05.1991