ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 1 — Математика
Том 83, 1989

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 1 — Mathématiques
Tome 83, 1989

ИНТЕГРАЛНИ ПРЕДСТАВЯНИЯ НА ХОЛОМОРФНИ ФУНКЦИИ ПОСРЕДСТВОМ ФУНКЦИИТЕ НА ВЕБЕР–ЕРМИТ

Петър Русев

Петр Русев. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИЙ ВЕБЕРА–ЭРМИТА

Пусть $D_\nu(z)$ обозначает функция Вебера-Эрмита с индексом ν. Рассматриваются интегральные преобразования

$$(*)\qquad A(z) = \int_0^\infty a(t)H(z,t)\,dt,$$

где $H(z,t) = 2^{t/2}\exp(z^2/2)D_t(z\sqrt{2})$. Дано необходимое условие типа „роста“ для представлении функций $A(z)$, голоморфной в полосе $|\operatorname{Im} z| < \tau_0$ $(0 < \tau_0 \leqq +\infty)$, в виде $(*)$. Выяснена связь с классическим преобразованием Фурие и как следствие доказана единственность интегрального представления вида $(*)$.

Peter Rusev. INTEGRAL REPRESENTATION OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS BY MEANS OF WEBER–HERMITE FUNCTIONS

Integral representations of the kind

$$(*)\qquad A(z) = \int_0^\infty a(t)H(z,t)\,dt$$

are considered where $H(z,t) = 2^{t/2}\exp(z^2/2)D_t(z\sqrt{2})$. A necessary "growth" condition is given for a function $A(z)$, holomorphic in the stripe $|\operatorname{Im} z| < \tau_0$ $(0 < \tau_0 \leqq +\infty)$, to be represented in the form $(*)$. The connection with the classical Fourier transformation is clarified and as a consequence the uniqueness property of the transformation $(*)$ is proved.

1. Всяко (аналитично) решение на диференциалното уравнение

$$(1.1)\qquad y'' + (\nu + 1/2 - z^2/4)y = 0, \quad \nu \in \mathbb{C},$$

се нарича функция на параболичния цилиндър или още функция на Вебер–Ермит ([1], II, 8.2). В следващото изложение последното наименование се употребява за частното решение на уравнението (1.1), което има вида ([1], II, 8.2, (4))

$$D_\nu(z) = 2^{\nu/2}\exp(-z^2/4)\frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma((1-\nu)/2)}\Phi(-\nu/2,1/2;z^2/2) + (z/\sqrt{2})\frac{\Gamma(-1/2)}{\Gamma(-\nu/2)}\Phi((1-\nu)/2,3/2;z^2/2), \tag{1.2}$$

като с $\Phi(a,c;z)$ е означена изродената хипергеометрична функция на Кумер ([1], I, 6.1).

Ако ν е фиксирано, $D_\nu(z)$ като функция на z е холоморфна в цялата комплексна равнина, т. е. е цяла функция на z. В частност, ако $\nu = n$ е цяло неотрицателно число, то

$$\exp(z^2/4)D_n(z) = 2^{-n/2}H_n(z/\sqrt{2}), \tag{1.3}$$

където H_n е n-тият полином на Ермит ([1], II, 8.2, (9)). От горното съотношение следва, че

$$H_n(z) = 2^{n/2}\exp(z^2/2)D_n(z\sqrt{2}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.4}$$

При фиксирани z и $c \neq 0, -1, -2, \ldots$, $\Phi(a,c;z)$ като функция на a е холоморфна в цялата комплексна равнина. От (1.2) следва тогава, че $D_\nu(z)$ при фиксирано z е цяла функция на ν.

2. Като имаме предвид (1.4), дефинираме за $z \in \mathbb{C}$ и $t \in [0, +\infty)$

$$H(z,t) = 2^{t/2}\exp(z^2/2)D_t(z\sqrt{2}). \tag{2.1}$$

От интегралното представяне ([1], II, 8.3, (4))

$$D_\nu(z) = \sqrt{2/\pi}\,\exp(z^2/4)\int_0^\infty \exp(-u^2/2)u^\nu\cos(zu - \nu\pi/2)\,du, \tag{2.2}$$

което е валидно при $\operatorname{Re}\nu > -1$, получаваме, че

$$\sqrt{\pi/2}\,2^{-t/2}\exp(-z^2)H(z,t) = \int_0^\infty \exp(-u^2/2)u^t\cos(zu\sqrt{2} - \pi t/2)\,du. \tag{2.3}$$

Лема 2.1. *Каквото и да е $0 \leqq \tau < +\infty$, за всяко $z = x + iy$ с $|y| \leqq \tau$ и за всяко $t \in [0, +\infty)$ е изпълнено неравенство от вида*

$$\exp(-x^2)|H(z,t)| \leqq \mathrm{const}(\tau)(2t/e)^{t/2}\exp(\tau\sqrt{2t}). \tag{2.4}$$

Доказателство. От (2.3) следва, че щом $|y| \leqq \tau$,

$$\exp(-x^2)|H(z,t)| \leqq \mathrm{const}(\tau)2^{t/2}\int_0^\infty \exp(-u^2/2 + \tau u\sqrt{2})u^t\,du.$$

Като имаме предвид интегралното представяне ([1], II, 8.3, (3))

$$D_\nu(z) = \frac{\exp(-z^2/4)}{\Gamma(-\nu)} \int_0^\infty \exp(-u^2/2 - zu) u^{-\nu-1}\, du, \tag{2.5}$$

което е валидно при $\operatorname{Re}\nu < 0$, намираме, че

$$\exp(-x^2)|H(x,t)| \leqq \operatorname{const}(\tau) 2^{t/2} \Gamma(t+1) D_{-t-1}(-\tau\sqrt{2}). \tag{2.6}$$

За функцията $D_\nu(z)$ е в сила следното представяне ([1], II, 8.4, (5)):

$$D_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left\{(\nu/2)\log(-\nu) - \nu/2 - \sqrt{-\nu}\, z\right\}\{1 + \delta_\nu(z)\}, \tag{2.7}$$

$$\nu \in \mathbf{C} \setminus [0, +\infty),$$

където $\delta_\nu(z)$ е цяла функция на z, $\delta_\nu(z) = O\left(|\nu|^{-1/2}\right)$ при $|\nu| \to +\infty$ и $|\arg(-\nu)| \leqq \pi/2$ равномерно върху всяко ограничено подмножество на $\mathbf{C}$.

От (2.7) следва тогава, че при $t \to +\infty$ е в сила

$$D_{-t-1}(-\tau\sqrt{2}) \tag{2.8}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left\{-\frac{t+1}{2}\log(t+1) + \frac{t+1}{2} + \sqrt{t+1}\,\tau\sqrt{2}\right\}\left\{1 + O(t^{-1/2})\right\}.$$

Формулата на Стирлинг дава, че

$$\Gamma(t+1) = \sqrt{2\pi}\exp\{(t+1/2)\log(t+1) - t - 1\}\{1 + O(t^{-1})\}, \quad t \to +\infty. \tag{2.9}$$

Тъй като $\sqrt{2t+2} - \sqrt{2t} < 1$ и $\log(t+1) - \log t < t^{-1}$ за $t > 0$, от (2.8) и (2.9) следва, че съществува такова $\lambda = \lambda(\tau) > 0$, че за $t \in [\lambda, +\infty)$ е изпълнено неравенство от вида

$$\Gamma(t+1) D_{-t-1}(-\tau\sqrt{2}) \leqq \operatorname{const}(\tau)\exp\{(t/2)\log t - t/2 + \tau\sqrt{2t}\},$$

или все едно

$$\Gamma(t+1) D_{-t-1}(-\tau\sqrt{2}) \leqq \operatorname{const}(\tau)(t/e)^{t/2}\exp(\tau\sqrt{2t}). \tag{2.10}$$

Функцията $(t/e)^{-t/2}\exp(-\tau\sqrt{2t})\Gamma(t+1)D_{-t-1}(-\tau\sqrt{2})$ е непрекъсната (като функция на t) в интервала $[0, +\infty)$. Следователно в интервала $[0, \lambda]$ също е изпълнено неравенство от вида (2.10), т. е. можем да считаме, че такова неравенство е валидно за всяко $t \in [0, +\infty)$. Тогава от (2.6) и (2.10) следва (2.4).

Да означим с $E(\tau_0)$ $(0 < \tau_0 \leqq +\infty)$ множеството на комплексните функции $a(t)$ $(0 \leqq t < +\infty)$, които са локално интегрируеми и за които е изпълнено

$$\limsup_{t \to +\infty} (2t)^{-1/2} \log\left|(2t/e)^{t/2} a(t)\right| \leqq -\tau_0. \tag{2.11}$$

Една функция $a \in E(\tau_0)$ тогава и само тогава, когато каквото и да е $-\infty < \tau < \tau_0$, съществува такова $r = r(\tau) > 0$, че за $t > r$ е изпълнено неравенството

$$|a(t)| \leqq (2t/e)^{-t/2}\exp(-\tau\sqrt{2t}). \tag{2.12}$$

Теорема 2.1. *Ако $0 < \tau_0 \leqq +\infty$ и функцията $a \in E(\tau_0)$, интегралът*

$$A(z) = \int_0^\infty a(t)H(z,t)\,dt \tag{2.13}$$

е абсолютно равномерно сходящ върху всяко компактно подмножество на ивицата $S(\tau_0)$: $|\mathrm{Im}\, z| < \tau_0$ и следователно дефинира холоморфна функция в нея. Освен това, каквото и да е $0 \leqq \tau < \tau_0$, изпълнено е неравенство от вида

$$|A(z)| \leqq \mathrm{const}(\tau)\exp(x^2) \tag{2.14}$$

за всяко $z \in \overline{S(\tau)} : |\mathrm{Im}\, z| \leqq \tau$.

Доказателство. Нека K е компактно подмножество на $S(\tau_0)$. Тогава съществуват такива $0 \leqq \tau < \tau_0$ и $0 < R < +\infty$, че $|x| \leqq R$ и $|y| \leqq \tau_0$ за всяко $z = x + iy \in K$.

Да допуснем, че $\tau_0 < +\infty$ и нека $\delta = (\tau_0 - \tau)/2$. За $t \geqq r(\tau + \delta) = r((\tau + \tau_0)/2)$ е изпълнено неравенството

$$|a(t)| \leqq (2t/e)^{-t/2}\exp\{-(\tau+\delta)\sqrt{2t}\}. \tag{2.15}$$

Тогава съгласно лема 2.1 за $z \in K$ и $t \geqq r(\tau+\delta)$ е изпълнено неравенство от вида

$$|a(t)H(z,t)| \leqq \mathrm{const}(\tau, R)\exp(-\delta\sqrt{2t}\,)$$

и следователно интегралът

$$\int_{r(\tau+\delta)}^\infty |a(t)H(z,t)|\,dt$$

се мажорира върху K от интеграла

$$\int_{r(\tau+\delta)}^\infty \exp(-\delta\sqrt{2t})\,dt.$$

Това означава, че интегралът в (2.13) е абсолютно равномерно сходящ върху компактното множество $K \subset S(\tau_0)$.

Горните изводи бяха направени при предположението, че $\tau_0 < +\infty$. Ако $\tau_0 = +\infty$, избираме $\delta = 1$.

От лема 2.1 следва, че щом $|y| \leqq \tau$, то

$$|A(z)| \leqq \int_0^\infty |a(t)H(z,t)|\,dt \leqq \mathrm{const}(\tau)\exp(x^2)\int_0^\infty |a(t)|(2t/e)^{t/2}\exp(\tau\sqrt{2t}\,)\,dt.$$

Но интегралът от дясната страна на горното неравенство е сходящ, което следва от (2.15) и локалната интегрируемост на $a(t)$.

Забележка. От теорема 2.1 или по-точно от неравенството (2.14) следва, че не всяка функция, холоморфна в ивица от вида $S(\tau_0)$, се представя в нея във вида (2.13) с функция от класа $E(\tau_0)$.

3. Представянето (2.3), по-точно дясната му страна, наподобява преобразование на Фурие. Естествено е да се очаква, че за функция, която е холоморфна в ивицата $S(\tau_0)$ $(0 < \tau_0 \leqq +\infty)$ и има в нея интегрално представяне от вида (2.13), е налице и подходящо интегрално представяне на Фурие.

За да се убедим в това, дефинираме класа $F(\tau_0)$ от функции f, които са преобразования на Лаплас на функциите от класа $E(\tau_0)$, т. е.

$$f(\zeta) = \int_0^\infty a(t)\exp(\zeta t)\,dt, \quad a \in E(\tau_0). \tag{3.1}$$

Лема 3.1. *Нека* $0 < \tau_0 \leqq +\infty$ *и* $a \in E(\tau_0)$. *Интегралът в* (3.1) *дефинира цяла функция и освен това, каквото и да е* $0 < \tau < \tau_0$, *изпълнено е неравенство от вида* $(\zeta = \xi + i\eta)$

$$|f(\zeta)| \leqq \mathrm{const}(\tau)\exp(\exp(2\xi)/4 - \tau\exp\xi). \tag{3.2}$$

Доказателството на тази лема е напълно аналогично на това на лема 3.2 от [2, с. 110].

Теорема 3.1. *Ако* $a(t) \in E(\tau_0)$ $(0 < \tau_0 \leqq +\infty)$, *за функцията* $A(z)$, *дефинирана чрез* (2.13) *в ивицата* $S(\tau_0)$, *е в сила представянето*

$$2\sqrt{\pi}\exp(-z^2)A(z) \tag{3.3}$$

$$= \int_0^\infty \exp(-u^2/4)\{f(\ln u + i\pi/2)\exp(-izu) + f(\ln u - i\pi/2)\exp(izu)\}\,du,$$

където f *е функция от* $F(\tau_0)$.

Доказателство. Да обърнем внимание, че интегралът в (3.3) е абсолютно равномерно сходящ върху всяка (затворена) ивица $\overline{S(\tau)}$ с $0 \leqq \tau < \tau_0$. Наистина, ако $\tau + \delta < \tau_0$, от (3.2) следва, че за всяко $u \in (0, +\infty)$ е изпълнено неравенство от вида

$$|f(\ln u \pm i\pi/2)| \leqq \mathrm{const}(\tau + \delta)\exp(u^2/4 - (\tau + \delta)u)$$

и следователно за $z = x + iy$ с $|y| \leqq \tau$ и $u \in (0, +\infty)$ е изпълнено

$$\exp(-u^2/4)|f(\ln u \pm i\pi/2)\exp(\pm izu)| \leqq \mathrm{const}(\tau + \delta)\exp(-\delta u).$$

Да заместим в дясната страна на (3.3) функцията f с (3.1). Получаваме двукратния интеграл

$$2\int_0^\infty \exp(-u^2/4)\,du \int_0^\infty a(t)u^t\cos(zu - \pi t/2)\,dt. \tag{3.4}$$

Нека $0 \leqq \tau < \tau_0$ е фиксирано и δ е така избрано, че $\tau + \delta < \tau_0$ (ако $\tau_0 < +\infty$, можем да считаме, че $\delta = (\tau_0 - \tau)/2$, а ако $\tau_0 = +\infty$, избираме $\delta = 1$). Тогава за $t \geqq r = r(\tau + \delta)$ е изпълнено неравенството (2.15). Следователно, за да се убедим, че двукратният интеграл в (3.4) е абсолютно сходящ при $|\mathrm{Im}\, z| \leqq \tau$, достатъчно е да покажем, че е сходящ двукратният интеграл

$$\int_0^\infty \exp(-u^2/4 + \tau u)\,du \int_{r(\tau+\delta)}^\infty \tilde{a}(t)u^t\,dt,$$

където

$$\tilde{a}(t) = (2t/e)^{-t/2}\exp(-(\tau+\delta)\sqrt{2t}),$$

или, което е едно и също, че е сходящ интегралът

$$\int_0^\infty \exp(-u^2/4+\tau u)\,du \int_0^\infty \tilde{a}(t)u^t\,dt. \tag{3.5}$$

Дефинираме функцията $\tilde{f}(\zeta)$ чрез

$$\tilde{f}(\zeta) = \int_0^\infty \tilde{a}(t)\exp(\zeta t)\,dt.$$

Понеже $\tilde{a} \in E(\tau+\delta)$, то $\tilde{f} \in F(\tau+\delta)$ и е изпълнено неравенство от вида ($\zeta = \xi + i\eta$)

$$|\tilde{f}(\zeta)| \leq \operatorname{const}(\tau)\exp\{\exp(2\xi)/4 - (\tau+\delta/2)\exp\xi\}.$$

От него следва, че за $u \in (0,+\infty)$ е изпълнено

$$\int_0^\infty \tilde{a}(t)u^t\,du = \tilde{f}(\ln u) \leq \operatorname{const}(\delta)\exp(u^2/4-(\tau+\delta/2)u).$$

Но тогава получаваме, че

$$\int_0^\infty \exp(-u^2/4+\tau u)\,du \int_0^\infty \tilde{a}(t)u^t\,dt \leq \operatorname{const}(\delta)\int_0^\infty \exp(-(\delta/2)u)\,du < +\infty,$$

т. е. двукратният интеграл (3.5) е наистина сходящ.

Като разменим реда на интегриранията в (3.4), получаваме двукратния интеграл

$$2\int_0^\infty a(t)\,dt \int_0^\infty \exp(-u^2/4)u^t\cos(zu-\pi t/2)\,du$$

$$= 2^{3/2}\int_0^\infty 2^{t/2}a(t)\,dt \int_0^\infty \exp(-u^2/2)u^t\cos(zu\sqrt{2}-\pi t/2)\,du.$$

Но съгласно (2.3) и (2.13) това е точно лявата страна на (3.3).

Да дефинираме функциите p и q посредством равенствата

$$p(\zeta) = \frac{1}{2}\left(f(\zeta+i\pi/2)+f(\zeta-i\pi/2)\right) \tag{3.6}$$

и

$$q(\zeta) = \frac{1}{2i}\left(f(\zeta+i\pi/2)-f(\zeta-i\pi/2)\right). \tag{3.7}$$

Тогава от (3.3) следва, че за $z \in S(\tau_0)$ е в сила представянето

$$(3.8) \qquad \sqrt{\pi}\exp(-z^2)A(z) = \int_0^\infty \exp(-u^2/4)\{p(\ln u)\cos zu + q(\ln u)\sin zu\}\,du.$$

Също така, като имаме предвид (3.1), (3.6) и (3.7), намираме, че

$$(3.9) \qquad p(\zeta) = \int_0^\infty a(t)\cos(\pi t/2)\exp(\zeta t)\,dt$$

и

$$(3.10) \qquad q(\zeta) = \int_0^\infty a(t)\sin(\pi t/2)\exp(\zeta t)\,dt.$$

От представянето (3.8) може да бъде направен важен извод, който изразява свойството единственост на интегралното представяне (2.13). По-точно в сила е следното твърдение:

Теорема 3.2. *Ако $a(t) \in E(\tau_0)$ $(0 < \tau_0 \leqq +\infty)$ и функцията A, дефинирана чрез (2.13), е тъждествено нула в $S(\tau_0)$, то $a \sim 0$ в интервала $[0, +\infty)$, т. е. $a(t) = 0$ почти навсякъде в този интервал.*

Доказателство. За всяко $z \in S(\tau_0)$ наред с равенството

$$\int_0^\infty \exp(-u^2/4)\{p(\ln u)\cos zu + q(\ln u)\sin zu\}\,du = 0$$

е изпълнено и

$$\int_0^\infty \exp(-u^2/4)\{p(\ln u)\cos zu - q(\ln u)\sin zu\}\,du = 0.$$

От горните две равенства следва в частност, че за всяко $x \in (-\infty, +\infty)$ е в сила равенството

$$(3.11) \qquad \int_0^\infty \exp(-u^2/4)p(\ln u)\cos xu\,du = 0.$$

Ако функцията $a(t) \in E(\tau_0)$, функциите $a(t)\cos(\pi t/2)$ и $a(t)\sin(\pi t/2)$ са също от $E(\tau_0)$, и следователно функциите p и q са от класа $F(\tau_0)$. Но тогава от лема 3.1 следва, че всяка от функциите $\exp(-u^2/4)p(\ln u)$ и $\exp(-u^2/4)q(\ln u)$ е от пространството $L(0, +\infty)$. Съгласно теоремата за единственост на cos–преобразованието на Фурие в това пространство от (3.11) следва, че $p(\ln u) = 0$ за всяко $u \in (0, +\infty)$, т. е. $p(\xi) = 0$ за $\xi \in (-\infty, +\infty)$. Теоремата за идентичност на холоморфните функции дава, че $p(\zeta) \equiv 0$. Но съгласно свойството единственост на преобразованието на Лаплас от (3.9) следва, че $a \sim 0$ в интервала $(0, +\infty)$.

Друг интересен извод от представянето (3.8) е следното твърдение:

Теорема 3.3. *Четна (нечетна) функция A, която е холоморфна в ивицата $S(\tau_0)$ $(0 < \tau_0 \leqq +\infty)$ и се представя в нея във вида (2.13) с функция $a(t) \in E(\tau_0)$, е тъждествено нула.*

Доказателство. Ако функцията A е четна, от (3.8) следва, че

$$\int_0^\infty \exp(-u^2/4)q(\ln u)\sin zu\,du = 0$$

за $z \in S(\tau_0)$. Но тогава както в доказателството на теорема 3.2 заключаваме, че $q(\ln u) = 0$ за всяко $u \in (0, +\infty)$ и от (3.10) следва, че $a \sim 0$ в интервала $(0, +\infty)$. Ако A е нечетна, идваме пак до равенството (3.11).

Да означим с $F^*(\tau_0)$ $(0 < \tau_0 \leqq +\infty)$ класа на целите функции $f(\zeta)$ със следното свойство: за всяко $0 < \tau < \tau_0$ съществува такова $\delta = \delta(\tau) > 0$, че за всяко $\zeta = \xi + i\eta$ е изпълнено неравенство от вида

$$|f(\zeta)| \leqq \mathrm{const}(\tau)(1 + |\zeta|)^{-1-\delta(\tau)}\exp(\exp(2\xi)/4 - \tau\exp\xi). \tag{3.12}$$

Лема 3.2. *Ако цялата функция $f(\zeta)$ принадлежи на класа $F^*(\tau_0)$ $(0 < \tau_0 \leqq +\infty)$, тя се представя във вида (3.1) с функция $a(t)$ от класа $E(\tau_0)$.*

Доказателство. За $0 \leqq t < +\infty$ дефинираме

$$a(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f(\zeta)\exp(-t\zeta)\,d\zeta. \tag{3.13}$$

От (3.12) следва, че интегралът в (3.13) е абсолютно сходящ върху всяка права линия $\mathrm{Re}\,\zeta = \sigma$ $(-\infty < \sigma < +\infty)$ и стойността му не зависи от σ. Освен това във всяка полуравнина $\mathrm{Re}\,\zeta \leqq \sigma$ е изпълнено неравенство от вида

$$|f(\zeta)| \leqq \mathrm{const}(\tau, \sigma)(1 + |\zeta|)^{-1-\delta(\tau)}.$$

Съгласно формулата за обръщане на преобразованието на Лаплас в комплексна област за всяко $\zeta \in \mathbb{C}$ е налице (3.1).

Остава да се убедим, че дефинираната с (3.13) функция $a(t)$ е от класа $E(\tau_0)$. За целта заместваме σ с $(\ln 2t)/2$ $(0 < t < +\infty)$ и като вземем предвид (3.12), намираме, че

$$|a(t)| \leqq \mathrm{const}(\tau)(2t/e)^{-t/2}\exp(-\tau\sqrt{2t})\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\eta}{(1 + |\eta|)^{1+\delta(\tau)}}$$

и следователно $a \in E(\tau_0)$.

Забележка. От лема 3.1 следва, че класът $F^*(\tau_0)$ се съдържа в класа $F(\tau_0)$, като последният е по-широк от $F^*(\tau_0)$. Наистина нека $0 < \tau_0 < +\infty$ и да дефинираме

$$f_0(\zeta) = \int_0^\infty a_0(t)\exp(\zeta t)\,dt$$

с $a_0(t) = (2t/e)^{-t/2}\exp(-\tau_0\sqrt{2t})$. Функцията $a_0 \in E(\tau_0)$ и следователно

$f_0 \in F(\tau_0)$. Понеже $a_0'(t) \in L(0,+\infty)$, от равенството

$$f_0(\zeta) = \frac{1}{\zeta}\left\{-1 - \int_0^\infty a_0'(t)\exp(\zeta t)\,dt\right\}$$

и лемата на Риман следва, че

$$\lim_{|\eta|\to+\infty} i\eta f(i\eta) = -1,$$

което показва, че функцията f_0 не принадлежи на класа $F^*(\tau_0)$.

Сега да формулираме твърдение, което може да се счита за обратно на теорема 3.1, а именно:

Теорема 3.4. *Ако цялата функция $f \in F^*(\tau_0)$ $(0 < \tau_0 \leqq +\infty)$, комплексната функция A, дефинирана с (3.3), е холоморфна в ивицата $S(\tau_0)$ и се представя в нея във вида (2.13) с функция $a \in E(\tau_0)$.*

4. Дефинираме функциите $G^{\pm}(z,t)$ за $z \in \mathbb{C}$ и $t \in [0,+\infty)$ чрез

$$G^{\pm}(z,t) = 2^{t/2}\Gamma(t+1)D_{-t-1}(\mp iz\sqrt{2}). \tag{4.1}$$

Лема 4.1. *Каквото и да е $0 \leqq \tau < +\infty$, във всяка от полуравнините $\pm\operatorname{Im} z \geqq \tau$ е изпълнено неравенство от вида*

$$|G^{\pm}(z,t)| \leqq \operatorname{const}(\tau)(2t/e)^{t/2}\exp(z^2/2 - \tau\sqrt{2t}). \tag{4.2}$$

Твърдението на лема 4.1, т. е. валидността на горното неравенство, се доказва както и тази на неравенството (2.4).

Теорема 4.1. *Ако $0 \leqq \tau_0 < +\infty$ и функцията $b(t) \in E(-\tau_0)$, интегралът*

$$B^{\pm}(z) = \int_0^\infty b(t)G^{\pm}(z,t)\,dt \tag{4.3}$$

е абсолютно равномерно сходящ върху всяка полуравнина $\pm\operatorname{Im} z \geqq \tau > \tau_0$ и следователно дефинира холоморфна функция на z при $\pm\operatorname{Im} z > \tau_0$. Освен това във всяка полуравнина $\pm\operatorname{Im} z \geqq \tau > \tau_0$ е изпълнено неравенство от вида

$$|B^{\pm}(z)| \leqq \operatorname{const}(\tau)\exp(z^2/2). \tag{4.4}$$

Горното твърдение е следствие от лема 4.1 и от факта, че $b(t) \in E(-\tau_0)$ означава, че за произволно $\tau \in (\tau_0, +\infty)$ е изпълнено неравенство от вида

$$|b(t)| \leqq (2t/e)^{-t/2}\exp(\tau\sqrt{2t}), \quad t \geqq r = r(\tau) > 0. \tag{4.5}$$

Лема 4.2. *За функциите $G^{\pm}(z,t)$ е валидно интегралното представяне*

$$\sqrt{2}\exp(-z^2/2)G^{\pm}(z,t) = \int_0^\infty \exp(-u^2/4)u^t\exp(\pm izu)\,du. \tag{4.6}$$

Горните равенства са непосредствено следствие от дефиницията на функциите $G^{\pm}(z,t)$ чрез (4.1) и интегралното представяне (2.5).

Теорема 4.2. *Ако функцията $b \in E(-\tau_0)$ $(0 \leqq \tau_0 < +\infty)$, за функциите $B^{\pm}(z)$, дефинирани чрез (4.3) в полуравнините $\pm\mathrm{Im}\, z > \tau_0$, е в сила представянето*

$$\sqrt{2}\exp(-z^2/2)B^{\pm}(z) = \int_0^{\infty} \exp(-u^2/4)g(\ln u)\exp(\pm izu)\, du, \tag{4.7}$$

където g е функция от $F(-\tau_0)$.

Доказателство. Дефинираме функцията $g(\zeta)$ чрез

$$g(\zeta) = \int_0^{\infty} b(t)\exp(\zeta t)\, dt. \tag{4.8}$$

За такава функция е в сила твърдение, аналогично на лема 3.1, а именно: g е цяла функция и освен това каквото и да е $\tau_0 < \tau < +\infty$, в сила е неравенство от вида $(\zeta = \xi + i\eta \in \mathbf{C})$

$$|g(\zeta)| \leqq \mathrm{const}\,(\tau)\exp(\exp(2\xi)/4 + \tau\exp\xi). \tag{4.9}$$

От наличието на такова неравенство за всяко $\tau_0 < \tau < +\infty$ следва, че интегралът отдясно на (4.7) е абсолютно равномерно сходящ върху всяка полуравнина $\pm\mathrm{Im}\, z \geqq \tau > \tau_0$.

Както в доказателството на теорема 3.1 се убеждаваме, че абсолютно сходящ върху такава полуравнина е и всеки от двукратните интеграли, който се получава, като заместим g в (4.7) с (4.8), а именно:

$$\int_0^{\infty} \exp(-u^2/4 \pm izu)\, du \int_0^{\infty} b(t)u^t\, dt. \tag{4.10}$$

След размяната на реда на интегриранията в (4.10), дясната страна на (4.7) става

$$\int_0^{\infty} b(t)\, dt \int_0^{\infty} \exp(-u^2/4)u^t\exp(\pm izu)\, du.$$

Но съгласно интегралното представяне (4.6) това е точно лявата страна на (4.7).

Следствие. *Ако $b(t) \in E(-\tau_0)$ $(0 \leqq \tau_0 < +\infty)$ и $B^{\pm}(z) \equiv 0$ в някоя от полуравнините $\pm\mathrm{Im}\, z > \tau_0$, то $b \sim 0$ в $[0, +\infty)$.*

Теорема 4.3. *Ако цялата функция $g(\zeta) \in F^*(-\tau_0)$ $(0 \leqq \tau_0 < +\infty)$, то комплексните функции $B^{\pm}(z)$, дефинирани с (4.7), са холоморфни във всяка от полуравнините $\pm\mathrm{Im}\, z > \tau_0$ и се представят в тях във вида (4.3) с функция $b(t) \in E(-\tau_0)$.*

Доказателството на горното твърдение е аналогично на това на теорема 3.4 и се опира на факта, че щом $g \in F^*(-\tau_0)$, функцията $b(t)$, дефинирана чрез

$$b(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} g(\zeta)\exp(-t\zeta)\, d\zeta,$$

принадлежи на класа $E(-\tau_0)$.

5. При фиксирано $0 < \tau_0 < +\infty$ дефинираме функциите

$$G^{(1)}(\tau_0; z, t) = \frac{1}{2}\left\{G^+(z + i\tau_0, t) + G^-(z - i\tau_0, t)\right\} \tag{5.1}$$

и

$$G^{(2)}(\tau_0; z, t) = \frac{1}{2i}\left\{G^+(z + i\tau_0, t) - G^-(z - i\tau_0, t)\right\}. \tag{5.2}$$

От лема 4.1 и по-точно от неравенствата (4.2) следва, че каквото и да е $0 \leqq \tau \leqq \tau_0$, в ивицата $\overline{S(\tau)}$: $|\mathrm{Im}\, z| \leqq \tau$ са изпълнени неравенства от вида

$$|G^{(k)}(\tau_0; z, t)| \leqq \mathrm{const}(\tau)(2t/e)^{t/2} \exp\{x^2/2 - (\tau_0 - \tau)\sqrt{2t}\}, \quad k = 1, 2. \tag{5.3}$$

С помощта на горните неравенства се доказва, че ако функциите $b_k(t) \in E(0)$ $(k = 1, 2)$, интегралът

$$B(z) = \int_0^\infty \left\{b_1(t) G^{(1)}(\tau_0; z, t) + b_2(t) G^{(2)}(\tau_0; z, t)\right\} dt \tag{5.4}$$

е абсолютно равномерно сходящ във всяка (затворена) ивица $\overline{S(\tau)}$ с $0 \leqq \tau < \tau_0$ и освен това във всяка такава ивица за *холоморфната функция*, която той дефинира, е изпълнено неравенство от вида

$$|B(z)| \leqq \mathrm{const}(\tau) \exp(x^2/2). \tag{5.5}$$

За функциите (5.1) и (5.2) са валидни съответно интегралните представяния

$$\sqrt{2} \exp(-z^2/2) G^{(1)}(\tau_0; z, t) = \int_0^\infty \exp(-u^2/4 - \tau_0 u) u^t \cos zu \, du \tag{5.6}$$

и

$$\sqrt{2} \exp(-z^2/2) G^{(2)}(\tau_0; z, t) = \int_0^\infty \exp(-u^2/4 - \tau_0 u) u^t \sin zu \, du, \tag{5.7}$$

които са непосредствени следствия от дефиницията им и от интегралното представяне (4.6).

Теорема 5.1. *Ако функциите $b_k(t) \in E(0)$ $(k = 1, 2)$, за функцията $B(z)$, дефинирана чрез* (5.4) *в ивицата $S(\tau_0)$, е в сила представянето*

$$\sqrt{2} \exp(-z^2/2) B(z) \tag{5.8}$$

$$= \int_0^\infty \exp(-u^2/4 - \tau_0 u) \left\{g_1(\ln u) \cos zu + g_2(\ln u) \sin zu\right\} du$$

с функции $g_k(\zeta) \in F(0)$ $(k = 1, 2)$.

Валидно е и твърдение, аналогично на теорема 4.3, а именно:

Теорема 5.2. *Ако целите функции* $g_k(\zeta) \in F^*(0)$ $(k = 1, 2)$, *то комплексната функция* $B(z)$, *дефинирана с* (5.8), *е холоморфна в ивицата* $S(\tau_0)$ *и се представя в нея във вида* (5.4) *с функции* $b_k(t) \in E(0)$ $(k = 1, 2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтман, Г., А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. I, М., 1973, II, М., 1974.
2. Русев, П. Интегрално представяне на аналитични функции посредством изродени хипергеометрични функции. Год. Соф. унив., Фак. мат. и мех., 72, 1978, 99–120.

Постъпила на 20.12.1989 г.