ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 2 — Механика
Том 86, 1992

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI"

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 2 — Mécanique
Tome 86, 1992

КАЧЕНИЕ ШАРА ПО АБСОЛЮТНО ШЕРОХОВАТОМУ ТОРУ

СОНЯ ДЕНЕВА

Соня Денева. КАЧЕНИЕ ШАРА ПО АБСОЛЮТНО ШЕРОХОВАТОМУ ТОРУ

В работе затронуты некоторые аспекты неголономной задачи о качении шара по абсолютно шероховатой поверхности под действием силы тяжести.

Sonia Deneva. PRIVATE MOVEMENTS OF ROLLING SPHERE ON ABSOLUTELY ROUGH TORE

In this paper is considered some aspects of the classical unholonomic problem about rolling sphere on absolutely rough surface under the action of weight.

В работе [1] рассмотрены некоторые частные движения катящего шара по абсолютно шероховатому тору, когда точка соприкосновения шара описывает параллель. В одном из этих случаев угол нутации подвижного триэдра шара остается постоянным во время движения. В настоящей работе исследуется более общий случай этой задачи, при котором движение подвижного триэдра шара определяется по методу Дарбу. Для этой цели, как искомые функции времени рассматриваются компоненты вектора угловой скорости на неподвижные оси координат.

Введем следующие обозначения: G — центр масс шара, $G\xi\eta\zeta$ и $Oxyz$ — соответственно подвижная, связанная с движущимся телом с началом в его центре масс G, и неподвижная системы координат, $n^0(n_x, n_y, n_z)$ — единичный вектор внешней нормали в точке P соприкосновения шара с поверхностью качения, ω — угловая скорость тела, $R(R_x, R_y, R_z)$ — радиус-вектор произвольной точки тора на неподвижные оси, m и a — масса шара и его радиус, a_{ij} — директорные косинусы триэдра $G\xi\eta\zeta$ относительно $Oxyz$, α и β — параметры поверхности тора, v_G и w_G — скорость и ускорение центра шара, φ, ψ, θ — углы Эйлера подвижного триэдра $G\xi\eta\zeta$.

Так как исследуется движение однородного шара, каждая система $G\xi\eta\zeta$, которая неизменно связанна с шаром, является системой его главных осей инерции. Для определенности можно принять, что положение $G\xi\eta\zeta$ по отношении $Oxyz$ в начальном моменте движения задано, т. е. углы φ_0, ψ_0, θ_0 — фиксированы.

Из условия, что шар катится по тору без скольжения, имеем неголономную связь

$$v_G = a(\omega \times n^0) \tag{1}$$

или из проекций на $Oxyz$ получаем

$$\begin{aligned} \dot{x}_G &= a(\omega_y n_z - \omega_z n_y), \\ \dot{y}_G &= a(\omega_z n_x - \omega_x n_z), \\ \dot{z}_G &= a(\omega_x n_y - \omega_y n_x). \end{aligned} \tag{2}$$

Для уравнений тора будем иметь [1]

$$\begin{aligned} R_x &= (R_1 + R_2 \sin\beta)\cos\alpha, \\ R_y &= (R_1 + R_2 \sin\beta)\sin\alpha, \\ R_z &= R_2 \sin\beta. \end{aligned} \tag{3}$$

Из (3) находим нормальный вектор n^0:

$$n^0 = \cos\alpha \sin\beta i + \sin\alpha \sin\beta j + \cos\beta k, \tag{4}$$

где i, j, k — орты системы $Oxyz$.

Принимая ввиду, что рассматривается движение по параллели на торе, т. е. $\beta = \text{const}$, из (2), (3) и (4) находим зависимости

$$\omega_x \sin\alpha - \omega_y \cos\alpha = 0, \tag{5}$$

$$\dot{\alpha}\cos\alpha \, \frac{R_1 + (R_2 + a)\sin\beta}{a} = \omega_z \cos\alpha \sin\beta - \omega_x \cos\beta. \tag{6}$$

Уравнения движения шара находим из уравнений Аппеля в квазикоординатах

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_j} = Q_j, \tag{7}$$

где S — энергия ускорений тела, Q_j — обобщенные силы. Для квазикоординатах выберем проекции угловой скорости шара

$$\dot{\pi}_1 = \omega_x, \quad \dot{\pi}_2 = \omega_y, \quad \dot{\pi}_3 = \omega_z. \tag{8}$$

По теореме Кенига энергия ускорений S имеет следующий вид:

$$S = \frac{A}{2}\left(\dot{\omega}_x^2 + \dot{\omega}_y^2 + \dot{\omega}_z^2\right) + \frac{m}{2} w_G^2 + \cdots, \tag{9}$$

где $A = \dfrac{2}{5}ma^2$ (A, B, C — главные моменты инерции). Согласно (1) находим

$$w_G^2 = a^2\left[\dot\omega^2 - \left(\dot\omega.n^0\right)^2\right] - 2a^2\left(\dot\omega.\dot n^0\right)\left(\omega.n^0\right) + \cdots \tag{10}$$

Здесь повсюду многоточием обозначены члены, которые не содержат $\dot\omega_x$, $\dot\omega_y$, $\dot\omega_z$. Заменяем (10) в (9) и получаем согласно (4)

$$\begin{aligned} S = {} & \frac{7}{10}ma^2\left(\dot\omega_x^2 + \dot\omega_y^2 + \dot\omega_z^2\right) \\ & - \frac{m}{2}a^2\left(\dot\omega_x\cos\alpha\sin\beta + \dot\omega_y\sin\alpha\sin\beta + \dot\omega_z\cos\beta\right)^2 \\ & - ma^2(\omega.n^0)\dot\alpha\sin\beta(-\sin\alpha\dot\omega_x + \cos\alpha\dot\omega_y) + \cdots \end{aligned} \tag{11}$$

Обобщенные силы Q_j определяются по формулам

$$Q_j = \sum_{\nu=1}^{N} a_{\nu j}.F_\nu, \tag{12}$$

где F_ν — силы тяжести и a_{ij} находим из формул для скоростей

$$v_\nu = \sum_{j=1}^{3} a_{\nu j}\dot\pi_j + a_\nu = a_{\nu 1}\omega_x + a_{\nu 2}\omega_y + a_{\nu 3}\omega_z + a_\nu. \tag{13}$$

С другой стороны, согласно (1) скорости v_ν определяются из зависимости

$$v_\nu = a(\omega \times n^0) + \omega \times \rho_\nu, \tag{14}$$

где $\rho_\nu = x_\nu i + y_\nu j + z_\nu k$ — радиус-вектор произвольной точки шара.

Из сравнений (13) и (14) находим

$$\begin{aligned} a_{\nu 1} &= \sin\alpha\sin\beta k - \cos\beta j - z_\nu j + y_\nu k, \\ a_{\nu 2} &= \cos\beta i - \sin\beta\cos\alpha k + z_\nu i - x_\nu k, \\ a_{\nu 3} &= \sin\beta(\cos\alpha j - \sin\alpha i) + x_\nu j - y_\nu i. \end{aligned} \tag{15}$$

Из (12) и (15) имеем

$$\begin{aligned} Q_1 &= -mga\sin\alpha\sin\beta, \\ Q_2 &= mga\cos\alpha\sin\beta, \\ Q_3 &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь имеется ввиду, что

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu y_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu z_\nu = 0.$$

Заменяем (11) и (16) в (7) и получаем

$$\frac{7}{5}a\dot\omega_x - a\cos\alpha\sin\beta(\dot\omega_x\cos\alpha\sin\beta + \dot\omega_y\sin\alpha\sin\beta + \dot\omega_z\cos\beta) \tag{17}$$

$$+ a\dot{\alpha}\sin\beta\sin\alpha(\omega.n^0) + g\sin\alpha\sin\beta = 0,$$

$$\frac{7}{5}\,a\dot{\omega}_y - a\sin\alpha\sin\beta(\dot{\omega}_x\cos\alpha\sin\beta + \dot{\omega}_y\sin\alpha\sin\beta + \dot{\omega}_z\cos\beta)$$

$$- a\dot{\alpha}\sin\beta\cos\alpha(\omega.n^0) - g\cos\alpha\sin\beta = 0,$$

$$\frac{7}{5}\,a\dot{\omega}_z - a\cos\beta(\dot{\omega}_x\cos\alpha\sin\beta + \dot{\omega}_y\sin\alpha\sin\beta + \dot{\omega}_z\cos\beta) = 0.$$

Уравнения (17) допускают первые интегралы кинетического момента и кинетической энергии, которые найдем непосредственно. Пусть P — точка касания шара и тора. Кинетичный момент имеет следующий вид

$$K_P = A\omega + m(GP \times v_G)$$

или согласно (1) находим

(18) $$K_P = \frac{7}{5}\,ma^2\omega - ma^2(\omega.n^0)n^0.$$

Из уравнения кинетического момента имеем

$$\frac{dK_P}{dt} = PG \times (-mgk),$$

откуда получаем интеграл кинетического момента для точки

(19) $$K_P.k = C_1 = \mathrm{const}.$$

Из (18) и (19) находим

(20) $$\omega_x\cos\alpha\sin\beta\cos\beta + \omega_y\sin\alpha\sin\beta\cos\beta - \omega_z(0{,}4 + \sin^2\beta) = C_1',$$

где C_1' — константа.

Интеграл кинетической энергии следует из теоремы изменения кинетической энергии T

(21) $$dT = mg.dr_G + N.dr_P,$$

где N — реакция тора на шар.

Для дифференциалов в (21) имеем

$$dr_P = v_P.dt,$$

так как шар катится без скольжения. Соответственно

$$g.dr_G = -gdz_G = 0$$

из-за движения по параллели. Тогда из (21) находим, что

(22) $$T = h = \mathrm{const}.$$

Из теоремы Кенига для кинетической энергии имеем

$$T = \frac{A}{2}\,\omega^2 + \frac{m}{2}\,v_G^2$$

или согласно (1) получаем

(23) $$T = \frac{7}{10}ma^2(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) - \frac{ma^2}{2}(\omega_x\cos\alpha\sin\beta + \omega_y\sin\alpha\sin\beta + \omega_z\cos\beta)^2.$$

Из (22) и (23) находим

(24) $7\left(\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2\right)-5(\omega_x\cos\alpha\sin\beta+\omega_y\sin\alpha\sin\beta+\omega_z\cos\beta)^2=h_1=\mathrm{const}.$

Из (5), (6) и (20) составляем систему уравнений относительно компонентов угловой скорости

$$\begin{aligned}&\omega_x\sin\alpha-\omega_y\cos\alpha=0,\\ &\omega_y\cos\beta-\omega_z\cos\alpha\sin\beta=-\dot\alpha\cos\alpha\,\frac{R_1+(R_2+a)\sin\beta}{a},\\ &\omega_x\cos\alpha\sin\beta\cos\beta+\omega_y\sin\alpha\sin\beta\cos\beta-\omega_z(0{,}4+\sin^2\beta)=C_1'.\end{aligned}\tag{25}$$

Без ограничения общности, предположим, что в начальном моменте

$$\alpha_0=0.\tag{26}$$

Из (25) в этом случае получаем зависимости

$$\omega_{y_0}=0;\tag{27}$$

$$\dot\alpha_0=\frac{a}{R_1+(R_2+a)\sin\beta}\,[\omega_{z_0}\sin\beta-\omega_{x_0}\cos\beta],\tag{28}$$

$$C_1'=\omega_{x_0}\sin\beta\cos\beta-\omega_{z_0}(0{,}4+\sin^2\beta).\tag{29}$$

Начальное условие (27) является необходимым условием для угловой скорости шара при движении по параллели.

Решая линейную систему (25) относительно ω_x, ω_y, ω_z, получаем

$$\begin{aligned}&\omega_x=-\frac{2{,}5\cos\alpha}{\cos\beta}\left[C_1'\sin\beta+\frac{R_1+(R_2+a)}{a}\,\dot\alpha(0{,}4+\sin^2\beta)\right],\\ &\omega_y=-\frac{2{,}5\sin\alpha}{\cos\beta}\left[C_1'\sin\beta+\frac{R_1+(R_2+a)}{a}\,\dot\alpha(0{,}4+\sin^2\beta)\right],\\ &\omega_z=-2{,}5\left[C_1'+\dot\alpha\sin\beta\frac{R_1+(R_2+a)\sin\beta}{a}\right].\end{aligned}\tag{30}$$

После замены (30) в (24) получается алгебрическое уравнение относительно $\dot\alpha$, из которого следует, что $\dot\alpha$ — константа для рассматриваемого движения, т. е. имеем

$$\dot\alpha=\dot\alpha_0=\frac{a}{R_1+(R_2+a)\sin\beta}[\omega_{z_0}\sin\beta-\omega_{x_0}\cos\beta].\tag{31}$$

Заменяя (29) и (31) в (30), находим

$$\omega_x=\omega_{x_0}\cos\alpha,\quad \omega_y=\omega_{x_0}\sin\alpha,\quad \omega_z=\omega_{z_0},\tag{32}$$

т. е. ω_x и ω_y являются периодическими функциями времени. Третье из уравнений (17) удовлетворяется тождественно согласно (32), а первые два уравнения редуцируются на следующую зависимость

$$\frac{7}{5}\,a\omega_{x_0}-a\sin\beta(\omega_{x_0}\sin\beta+\omega_{z_0}\cos\beta)\dot\alpha-g\sin\beta=0.\tag{33}$$

Заменяя (31) в (33), получаем

$$\omega_{z_0}^2 \sin^2\beta\cos\beta + \omega_{x_0}^2 \cos\beta(0{,}4 + \cos^2\beta) \tag{34}$$

$$- 2\sin\beta(0{,}2 + \cos^2\beta)\omega_{x_0}\omega_{z_0} + \frac{g}{a^2}\sin\beta[R_1 + (R_2 + a)\sin\beta] = 0.$$

Уравнение (34) показывает, что компоненты начальной угловой скорости зависимы при движении по параллели.

Из (34) получим

$$\omega_{z_0} = \frac{(0{,}2 + \cos^2\beta)\omega_{x_0} \pm \sqrt{0{,}04\omega_{x_0}^2 - \dfrac{g}{a^2}\sin\beta\cos\beta R}}{\sin\beta\cos\beta}, \tag{35}$$

где с R обозначили величину

$$R = R_1 + (R_2 + a)\sin\beta. \tag{36}$$

Очевидно, чтобы движение было реальным, начальная угловая скорость должна удовлетворять ограничению

$$\omega_{x_0} \geqq \frac{5}{a}\sqrt{gR\sin\beta\cos\beta}. \tag{37}$$

Другое ограничение для ω_{x_0} получим из условия, что проекция реакции N должна быть направлена по внешней нормали тора, т. е.

$$N.n^0 > 0. \tag{38}$$

Из уравнения движения центра шара имеем

$$N.n^0 = mg\cos\beta - m\dot{\alpha}^2\sin\beta R.$$

Условие (38) получает следующий вид:

$$|\dot{\alpha}| < \sqrt{\frac{g}{R}\operatorname{cotg}\beta}, \tag{39}$$

где R определено из (36).

Из (31) и (35) находим

$$\dot{\alpha} = \frac{a}{R\cos\beta}\left(0{,}2\omega_{x_0} \pm \sqrt{0{,}04\omega_{x_0}^2 - \frac{g}{a^2}R\sin\beta\cos\beta}\right). \tag{40}$$

Из (39) и (40) получаем неравенство

$$0{,}2\omega_{x_0} \pm \sqrt{0{,}04\omega_{x_0}^2 - \frac{g}{a^2}R\sin\beta\cos\beta} < \frac{\cos\beta}{a}.\sqrt{gR\operatorname{cotg}\beta}. \tag{41}$$

Неравенство (41) имеет различные решения в зависимости от знака радикала в (35). При знаке плюс (41) возможно только для угла β, удовлетворяющий условию $0 < \beta < \dfrac{\pi}{4}$.

Для ω_{x_0} получится ограничение

$$\omega_{x_0} < \frac{2{,}5}{a\cos\beta}\sqrt{gR\operatorname{cotg}\beta}\,.$$

Когда знак перед радикалом в (35) — минус, возможны два случая:

а) При $0 < \beta < \dfrac{\pi}{4}$ имеем условие

$$\omega_{x_0} < \frac{5\cos\beta}{a}\sqrt{gR\operatorname{cotg}\beta}\,.$$

б) При $\dfrac{\pi}{4} \leqq \beta < \dfrac{\pi}{2}$ — имеется ограничение

$$\omega_{x_0} > \frac{2{,}5}{a\cos\beta}\sqrt{gR\operatorname{cotg}\beta} \geqq \frac{5}{a}\sqrt{gR\sin\beta\cos\beta}\,.$$

Так доказана следующая

Теорема. Качение без скольжения однородного шара по абсолютно шероховатому тору, когда точка касания описывает параллель на торе, возможно только тогда, когда начальные угловые скорости шара и скорость его точки касания по параллели тора удовлетворяют следующие условия:

1) $\dfrac{5}{a}\sqrt{gR\sin\beta\cos\beta} \leqq \omega_{x_0} < \dfrac{2{,}5}{a\cos\beta}\sqrt{gR\operatorname{cotg}\beta}$,

$$\omega_{z_0} = \frac{(0{,}2+\cos^2\beta)\omega_{x_0} + \sqrt{0{,}04\omega_{x_0}^2 - \dfrac{g}{a^2}R\sin\beta\cos\beta}}{\sin\beta\cos\beta}\,,$$

$$\dot\alpha = \frac{a}{R\cos\beta}\left(0{,}2\omega_{x_0} + \sqrt{0{,}04\omega_{x_0}^2 - \frac{g}{a^2}R\sin\beta\cos\beta}\right),$$

только для угла параллели β в интервале $\left(0,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$.

2) $\dfrac{5}{a}\sqrt{gR\sin\beta\cos\beta} \leqq \omega_{x_0} < \dfrac{5\cos\beta}{a}\sqrt{gR\operatorname{cotg}\beta}$,

$$\omega_{z_0} = \frac{(0{,}2+\cos^2\beta)\omega_{x_0} - \sqrt{0{,}04\omega_{x_0}^2 - \dfrac{g}{a^2}R\sin\beta\cos\beta}}{\sin\beta\cos\beta}\,,$$

$$\dot\alpha = \frac{a}{R\cos\beta}\left(0{,}2\omega_{x_0} - \sqrt{0{,}04\omega_{x_0}^2 - \frac{g}{a^2}R\sin\beta\cos\beta}\right)$$

для угла β в интервале $\left(0,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$,

3) $\omega_{x_0} > \dfrac{2{,}5}{a\cos\beta}\sqrt{gR\operatorname{cotg}\beta}$,

$$\omega_{z_0} = \frac{(0{,}2+\cos^2\beta)\omega_{x_0} - \sqrt{0{,}04\omega_{x_0}^2 - \dfrac{g}{a^2}R\sin\beta\cos\beta}}{\sin\beta\cos\beta},$$

$$\dot\alpha = \frac{a}{R\cos\beta}\left(0{,}2\omega_{x_0} - \sqrt{0{,}04\omega_{x_0}^2 - \frac{g}{a^2}R\sin\beta\cos\beta}\right),$$

когда β удовлетворяет условию $\dfrac{\pi}{4} \leqq \beta < \dfrac{\pi}{2}$.

Здесь повсюду R определена из (36). Во всех этих случаях $\omega_{y_0} = 0$. Угловые скорости ω_x, ω_y — периодические функции времени, которые заданы из (32); ω_z — постоянная, а точка касания шара описывает параллель по тору с постоянной скоростью, задана выражением

$$v = (R_1 + R_2\sin\beta)\dot\alpha.$$

Интересно отметить, что движение по параллели однородного шара при частном движении с постоянным углом нутации невозможно по внешней стороне тора. Когда переменные углы Эйлера подвижного триэдра — это возможно, конечно со сделаными ограничениями для начальной скорости.

Наконец, рассмотрим сферическое движение шара около его центра, т. е. найдем углы Эйлера подвижного триэдра $G\xi\eta\zeta$ в функции времени. Приложим метод Дарбу — Риккати для решения этой проблемы. Согласно этому методу, рассматриваем уравнение Риккати

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{i\omega_x + \omega_y}{2}\lambda^2 + i\omega_z\lambda + \frac{i\omega_x - \omega_y}{2}, \tag{42}$$

где неизвестная величина λ определяется из

$$\lambda = -i\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}e^{i\psi}. \tag{43}$$

Здесь ψ, θ — углы Эйлера триэдра $G\xi\eta\zeta$ — неизвестные функции времени. Заменяем в (42) величины ω_x, ω_y, ω_z, которые для рассматриваемого движения определены из (32), т. е. имеем

$$2\frac{d\lambda}{dt} = i\omega_{x_0}e^{-i\alpha}\lambda^2 + 2i\omega_{z_0}\lambda + i\omega_{x_0}e^{i\alpha}. \tag{44}$$

Уравнение (44) допускает частное решение

$$\lambda_0 = ke^{i\alpha}, \tag{45}$$

где k — постоянная, которая согласно (44) удовлетворяет уравнению

$$\omega_{x_0}k^2 + 2(\omega_{z_0} - \dot\alpha)k + \omega_{x_0} = 0. \tag{46}$$

Согласно (35) и (40) легко увидеть, что уравнение (46) при $0 < \beta \leqq \pi/4$ имеет реальные отрицательные корни. Для определенности остановимся на этом случае, т. е. когда k — вещественное число.

Частное решение (45) соответствует случаю $\theta = \mathrm{const}$, $\psi = \alpha - \dfrac{\pi}{2}$, который мы уже рассмотрели в работе [1]. В настоящем исследовании этот случай мы должны отбросить, так как зависимость (35), в этом случае, не имеет реального решения. В действительности, с помощью формул Эйлера для ω_x, ω_y, ω_z таже зависимость здесь получает следующий вид:

$$\begin{aligned}(47)\qquad &\sin^2\beta\cos\beta\left[\frac{a}{R_1+R_2\sin\beta}\sin(\theta_0+\beta)+\cos\theta_0\right]^2\dot\psi^2\\ &+\cos\beta(0{,}4+\cos^2\beta)\sin^2\theta_0\dot\varphi^2\\ &+2\sin\beta(0{,}2+\cos^2\beta)\left[\cos\theta_0+\frac{a}{R_1+R_2\sin\beta}\sin(\theta_0+\beta)\right]\sin\theta_0\dot\varphi^2+\frac{g}{a^2}R\sin\beta=0.\end{aligned}$$

Очевидно $\dot\varphi$ из (47) не имеет реальных значений.

Чтобы найти общее решение (44) предположим, что

$$(48)\qquad \lambda = ke^{i\alpha}+u,$$

где u — новая неизвестная функция. Заменяем (48) в (44) и получим уравнение Бернули

$$(49)\qquad \frac{du}{dt}=\frac{i}{2}\omega_{x_0}e^{-i\alpha}u^2+i(\omega_{x_0}k+\omega_{z_0})u.$$

Общее решение (49) имеет вид

$$(50)\qquad u(t)=\frac{1}{D(t)}\left[(C_1-iC_2)e^{i(k\omega_{x_0}+\omega_{z_0})t}+\frac{i\omega_{x_0}}{2}\,\frac{e^{i\alpha}}{k\omega_{x_0}+\omega_{z_0}-\dot\alpha}\right],$$

где $D(t)$ — величина

$$\begin{aligned}(51)\qquad D(t)&=C_1^2+C_2^2+\frac{1}{4}\omega_{x_0}^2\frac{1}{(k\omega_{x_0}+\omega_{z_0}-\dot\alpha)^2}\\ &+\frac{\omega_{x_0}[C_1\sin(k\omega_{x_0}+\omega_{z_0}-\dot\alpha)t-C_2\cos(k\omega_{x_0}+\omega_{z_0}-\dot\alpha)t]}{k\omega_{x_0}+\omega_{z_0}-\dot\alpha}\end{aligned}$$

и C_1, C_2 — произвольные действительные постоянные.

Здесь принято ввиду, что согласно (26) и (31) величина α является функцией

$$(52)\qquad \alpha(t)=\dot\alpha t.$$

Согласно (43), (48), (50) и (52), находим следующие зависимости для углов Эйлера θ и ψ

$$(53)\qquad \begin{aligned}\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\sin\psi&=k\cos(\dot\alpha t)+\frac{1}{D(t)}\Big[C_1\cos(k\omega_{x_0}+\omega_{z_0}-\dot\alpha)t\\ &+C_2\sin(k\omega_{x_0}+\omega_{z_0}-\dot\alpha)t-\frac{\omega_{x_0}\sin(\dot\alpha t)}{2(k\omega_{x_0}+\omega_{z_0}-\dot\alpha)}\Big],\\ \operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\cos\psi&=-k\sin(\dot\alpha t)+\frac{1}{D(t)}\Big[C_2\cos(k\omega_{x_0}+\omega_{z_0}-\dot\alpha)t\\ &-C_1\sin(k\omega_{x_0}+\omega_{z_0}-\dot\alpha)t-\frac{\omega_{x_0}\cos(\dot\alpha t)}{2(k\omega_{x_0}+\omega_{z_0}-\dot\alpha)}\Big],\end{aligned}$$

где $D(t)$ определена из (51) и k — из (46).

Постоянные C_1 и C_2 определяются из начальных условий, применимы для (53). Предполагая, что начальные углы θ_0 и ψ_0 — заданы, получим систему

$$
(54)\quad
\begin{aligned}
C_1 &= \left(\operatorname{cotg}\frac{\theta_0}{2}\sin\psi_0 - k\right)\left[C_1^2 + C_2^2 - \frac{\omega_{x_0}}{k\omega_{x_0}+\omega_{z_0}-\dot\alpha}C_2 \right.\\
&\quad \left. + \frac{\omega_{x_0}^2}{4(k\omega_{x_0}+\omega_{z_0}-\dot\alpha)^2}\right],\\
C_2 &= \operatorname{cotg}\frac{\theta_0}{2}\cos\psi_0\left[C_1^2 + C_2^2 - \frac{\omega_{x_0}}{k\omega_{x_0}+\omega_{z_0}-\dot\alpha}C_2 + \frac{\omega_{x_0}^2}{4(k\omega_{x_0}+\omega_{z_0}-\dot\alpha)^2}\right]\\
&\quad + \frac{\omega_{x_0}}{2(k\omega_{x_0}+\omega_{z_0}-\dot\alpha)}.
\end{aligned}
$$

Нетрудно увидеть, что система (54) редуцируется на одно квадратное уравнение относительно одной из неизвестных. Система (53) определяет углы ψ и θ как функции времени. Третий из углов Эйлера находим из кинематических формул Эйлера, т. е. согласно (32)

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \frac{\omega_{z_0} - \dot\psi}{\cos\theta}\,dt.$$

Очевидно то, что согласно (53) $\dot\psi$ и $\cos\theta$ являются знакомыми функциями времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Денева, С. — Год. Соф. унив., Фак. мат и информ., **85**, 1991.
2. Неймарк, Ю. И., Н. А. Фуфаев. Динамика неголономных систем, М., 1967.
3. Долапчиев, Бл. Аналитична механика, С., 1986.
4. Диамандиев, В. — Год. Соф. унив., Фак. мат и информ., **77**, 1983.

Поступила 12.04.1993 г.