ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 1 — Математика
Том 82, 1988

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA "ST. KLIMENT OHRIDSKI"
FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 1 — Mathématiques
Tome 82, 1988

О МАКСИМУМЕ КОЛИЧЕСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ С ОБЩИМ РЕБРОМ

НИКОЛАЙ ХАДЖИИВАНОВ

Николай Хаджииванов. О МАКСИМУМЕ КОЛИЧЕСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ С ОБЩИМ РЕБРОМ. Исследуется максимум $\hat{t}$ числа треугольников с общим ребром в графах, принадлежащих некоторым естественным и важным классам графов, в частности, классу n-графов с хотя бы $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ ребрами и имеющих треугольник. Обсуждается статья [2], в которой решена проблема Эрдеша о $\hat{t}$, и выводятся новые следствия из основной теоремы этой статьи. Доказана одна гипотеза Эдвардса, сформулированная в дополнительном замечании к его работе [3], и подробно обсуждается эта его статья.

Nikolay Khadzhiivanov. ON THE MAXIMAL NUMBER OF TRIANGLES WITH A COMMON EDGE. The maximal number $\hat{t}$ of triangles with a common edge in graphs of some natural and important classes (in particular the class of n-graphs with at least one triangle and $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ edges) is investigated. Paper [2], where a problem of P. Erdös about $\hat{t}$ is solved, is discussed and some new consequences of the main theorem, proved in [2], are deduced. The Edwards' conjecture is proved and his paper [3] is analysed in details.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И ПЕРВАЯ ТЕОРЕМА

Рассматриваем только обыкновенные графы. Если G – граф, множества его вершин, ребер и треугольников обозначим через V, E и T, а числа их элементов – через n, e и t. Число тетраэдров графа обозначим через q. Если v – вершина графа, а $A(v)$ – множество всех смежных ей вершин, тогда $d(v) = |A(v)|$ – степень этой вершины. Числа

$$t[u,v] = |A(u) \cap A(v)| \text{ и } \bar{t}[u,v] = |V \setminus (A(u) \cup A(v))|$$

в том случае, когда $[u,v] \in E$, являются соответственно количеством треугольников со стороной $[u,v]$ и количеством вершин, одновременно несмежных u и v. Ясно, что

$$3t = \sum \{t[u,v] | [u,v] \in E\}, \tag{1}$$

а

$$\bar{t} = \sum \{\bar{t}[u,v] | [u,v] \in E\}, \tag{2}$$

есть число тех 3-вершинных множеств, любое из которых имеет ровно одну пару смежных вершин.

Положим

$$\begin{aligned}
t[u,v,w] &= t[u,v] + t[u,w] + t[w,u], \\
\bar{t}[u,v,w] &= \bar{t}[u,v] + \bar{t}[v,w] + \bar{t}[w,u], \\
q[u,v,w] &= |A(u) \cap A(v) \cap A(w)|, \\
\bar{q}[u,v,w] &= |V \setminus (A(u) \cup A(v) \cup A(w))|.
\end{aligned}$$

Если $[u,v,w] \in T$, то $q[u,v,w]$ – число всех тетраэдров, имеющих в качестве грани треугольник $[u,v,w]$, а $\bar{q}[u,v,w]$ – число тех вершин, которые одновременно несмежны вершинам u,v,w. Ясно, что

$$4q = \sum \{q(u,v,w) | [u,v,w] \in T\} \tag{3}$$

а

$$\bar{q} = \sum \{\bar{q}(u,v,w) | [u,v,w] \in T\} \tag{4}$$

есть количество тех 4-вершинных множеств, любое из которых состоит из треугольника и одной вершины, несмежной всем вершинам этого треугольника.

Легко сообразить верность следующих двух равенств:

$$\sum \{d(u) + d(v) | [u,v] \in E\} = \sum \{d^2(v) | v \in V\}, \tag{5}$$

$$\sum \{\bar{t}[u,v,w] | [u,v,w] \in T\} = \sum \{\bar{t}[u,v] t[u,v] | [u,v] \in E\}. \tag{6}$$

Действительно, в левой сумме (5) $d(v_0)$ встречается во всех слагаемых, для которых $[u,v_0] \in E$, т.е. $d(v_0)$ раз, а в левой сумме (6) $\bar{t}[u_0,v_0]$ встречается во всех слагаемых, для которых $[u_0,v_0,w] \in T$, т.е. $t[u_0,v_0]$ раз.

Если $[u,v,w] \in T$, $t[u,v] - q[u,v,w]$ есть число всех вершин, смежных вершинам u,v, однако несмежных вершине w. Поэтому $t[u,v,w] - 3q[u,v,w]$ – число тех вершин, любая из которых смежна ровно двум из вершин треугольника $[u,v,w]$. Присоединяя к ним вершины, которые одновременно смежны всем вершинам треугольника $[u,v,w]$, а их число – $q[u,v,w]$, в результате получим, что $\alpha = t[u,v,w] - 2\bar{q}[u,v,w]$ есть число тех вершин графа, любая из которых смежна хотя бы двум вершинам треугольника $[u,v,w]$.

Аналогично, $\beta = \bar{t}[u,v,w] - 2\bar{q}[u,v,w]$ – число тех вершин, любая из которых несмежна хотя бы двум вершинам треугольника $[u,v,w]$.

Разумеется, любая вершина графа смежна или несмежна хотя бы двум вершинам треугольника $[u,v,w]$ и, значит, $\alpha+\beta=n$. Таким образом доказано, что если $[u,v,w]\in T$, тогда

$$t[u,v,w]+\bar{t}[u,v,w]=n+2q[u,v,w]+2\bar{q}[u,v,w]. \tag{7}$$

Просуммировав почленно (7) по всевозможным треугольникам $[u,v,w]\in T$, получим (см.(3), (4), (6)):

$$\sum\{t[u,v,w] \mid [u,v,w]\in T\}+\sum\{\bar{t}[u,v]t[u,v] \mid [u,v]\in E\}=nt+8q+2\bar{q}. \tag{8}$$

Через $\hat{t}$ обозначим максимум числа треугольников с общей стороной, т.е.

$$\hat{t}=\max\{t[u,v] \mid [u,v]\in E\}. \tag{9}$$

Очевидно,

$$t[u,v,w]\leqq 3\hat{t}, \text{ если } [u,v,w]\in T. \tag{10}$$

Следовательно,

$$\sum\{t[u,v,w] \mid [u,v,w]\in T\}\leqq 3t\hat{t}. \tag{11}$$

Равенство в (11) имеет место тогда и только тогда, когда есть равенство в (10) для любого $[u,v,w]\in T$, т.е. когда верна импликация:

$$\text{Если } [u,v]\in E \text{ и } t[u,v]>0, \text{ тогда } t[u,v]=\hat{t}. \tag{$*$}$$

Из (6) следует

$$\sum\{\hat{t}[u,v,w] \mid [u,v,w]\in T\}\leqq \bar{t}\hat{t}. \tag{12}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно принять ввиду (2) и (9).

Равенство в (12) имеет место тогда и только тогда, когда верна импликация:

$$\text{Если } [u,v]\in E \text{ и } \bar{t}[u,v]>0, \text{ тогда } t[u,v]=\hat{t}. \tag{$**$}$$

Из (8), (11) и (12) следует

$$(3t+\bar{t})\hat{t}\geqq nt+8q+2\bar{q}. \tag{13}$$

К тому же ясно, что равенство в (13) имеет место тогда и только тогда, когда верны импликации (*) и (**)

Т е о р е м а 1. *Для любого графа G выполнено неравенство*

$$(14) \qquad (3t+\bar{t})\hat{t} \geqq nt,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $q = \bar{q} = 0$ и, кроме того, для всех $[u,v] \in E$, для которых $t[u,v] + \bar{t}[u,v] > 0$, число $t[u,v]$ одно и то же.

Неравенство (14) очевидно вытекает из (13). Для равенства в (14) необходимо и достаточно $q = \bar{q} = 0$ и равенство в (13), т.е. чтобы (*) и (**) одновременно выполнялись, а это означает: если $[u,v] \in E$ и хотя бы одно из чисел $t[u,v]$ и $\bar{t}[u,v]$ положительно, тогда $t[u,v] = \hat{t}$.

Неравенство (14) доказано немного иначе в [2].

Построим два экстремальные графа для теоремы 1, т.е. такие графы, для которых в (14) имеет место равенство.

П р и м е р 1. Пусть a_i – вершины треугольной призмы, $n \equiv 0(\mathrm{mod}\ 6)$ и A_i - дизъюнктные множества с $|A_i| = \frac{n}{6}$, $1 \leqq i \leqq 6$. Положим $V' = \bigcup\limits_{i=1}^{6} A_i$. Через E' обозначим совокупность всех двухэлементных подмножеств $[u,v]$ множества V', для которых $u \in A_i$ и $v \in A_j$, где $[a_i, a_j]$ – ребро призмы. Для графа $G' = (V', E')$, как нетрудно проверить с помощью теоремы, в (14) имеет место равенство и $e = \frac{n^2}{4}$, а $\hat{t} = \frac{n}{6}$.

П р и м е р 2. Возьмем три треугольника $[a_1, a_2, a_3]$, $[a_4, a_5, a_6]$, $[a_7, a_8, a_9]$ и любые две из 9 вершин a_i, индексы которых сравнимы по модулю 3, соединим ребром. Полученный граф Г будет иметь 9 вершин и 18 ребер – все ребра данных трех треугольников и, к тому же, все ребра треугольников $[a_1, a_4, a_7]$, $[a_2, a_5, a_6]$, $[a_3, a_6, a_9]$. Пусть $n \equiv 0(\mathrm{mod}\ 9)$ и A_i – девять дизъюнктных множеств с $|A_i| = \frac{n}{9}$. Положим $V'' = \bigcup\limits_{i=1}^{9} A_i$, а E'' определим как совокупность всех двухэлементных подмножеств $[u,v]$ множества V'', для которых $u \in A_i$ и $v \in A_j$, где $[a_i, a_j]$ – ребро графа Г. Для графа $G'' = (V'', E'')$, как нетрудно установить с помощью теоремы, в (14) есть равенство и $e = \frac{2n^2}{9}$, а $\hat{t} = \frac{n}{9}$.

Граф G' имеет ребра, которые не являются сторонами треугольников, а G'' таких ребер не имеет.

Нордхауз и Стьюарт [8] установили, что

$$(15) \qquad 3t = \sum\{d^2(v) | v \in V\} - ne + \bar{t}.$$

Впрочем, это интересное равенство можно доказать нетрудно. Действительно,

$$(16) \qquad |A(u) \cup A(v)| = |A(u)| + |A(v)| - |A(u) \cap A(v)|.$$

В случае, когда $[u,v] \in E$, равенство (16) можно переписать в следующей форме:

$$(17) \qquad t[u,v] = d(u) + d(v) - n + \bar{t}[u,v], [u,v] \in E,$$

потому что $t[u,v] = |A(u) \cap A(v)|$, $d(u) = |A(u)|$, $d(v) = |A(v)|$, $\bar{t}[u,v] = n - |A(u) \cup A(v)|$.

Складывая почленно всевозможные равенства (17), получим

$$\sum\{t[u,v] | [u,v] \in E\} = \sum\{d(u) + d(v) | [u,v] \in E\} - ne + \sum\{\bar{t}[u,v] | [u,v] \in E\}. \tag{18}$$

Чтобы убедиться в том, что равенство (18) совпадает с (15), достаточно принять ввиду равенства (1), (5) и (2).

С помощью равенства (15) неравенству (14) можно придать следующую эквивалентную форму:

$$\left(6t + ne - \sum\{d^2(v) | v \in V\}\right) \hat{t} \geqq nt. \tag{19}$$

Отсюда выведем следующие два следствия.

Следствие 1. Если

$$\sum\{d^2(v) | v \in V\} > ne, \tag{20}$$

тогда

$$\hat{t} > \frac{n}{6}. \tag{21}$$

Доказательство этого утверждения моментально следует из (19), так как, согласно (15), $3t > \bar{t}$ и, значит, $t > 0$ (разумеется, и $\hat{t} > 0$).

Следствие 2. Если $t > 0$ и

$$\sum\{d^2(v) | v \in V\} \geqq ne, \tag{22}$$

тогда

$$\hat{t} \geqq \frac{n}{6}. \tag{23}$$

Неравенство (23) следует из (19) и (22), так как $t > 0$. Последнее требование обязательно, потому что, если $t = \bar{t} = 0$, тогда, согласно (15), (22) выполнено, однако, (23) нет.

2. ПОЛНЫЕ ХРОМАТИЧЕСКИЕ ГРАФЫ И ВТОРАЯ ТЕОРЕМА. ПРОБЛЕМА ЭРДЕША И РЕШЕНИЕ

$G = (V, E)$ - полный хроматический граф точно тогда, когда любая его вершина смежна хотя бы одному из концов любого ребра, т.е. если $\bar{t} = 0$.

Очевидно, $G = (V, E)$ – полный хроматический граф тогда, когда отношение несмежности вершин является эквивалентностью в V; классы эквивалентности называются хроматическими классами. В случае, когда их количество равняется r, граф называется полным r-хроматическим графом. Полный r-хроматический граф имеет полные r-вершинные подграфы K_r, однако не имеет полных подграфов K_{r+1}.

G называем почти регулярным графом, если $|d(u)-d(v)| \leqq 1$ для любой пары вершин u, v и регулярным – если степени всех его вершин равны.

Система целых чисел $x_1, x_2, \dots, x_r$ определена однозначно, если $x_1 \geqq x_2 \geqq \dots \geqq x_r$, $x_1 + x_2 + \dots + x_r = s$ и $|x_i - x_j| \leqq 1$ для любой пары индексов i, j.

Действительно, положим $x_r = x$. Тогда $x_i \leqq x+1$ и если ν – количество тех i, для которых $x_i = x+1$, то $x_1 = \dots = x_\nu = x+1$ и $x_{\nu+1} = \dots = x_r = x$, а $0 \leqq \nu < r$. Тогда $\nu(x+1) + (r-\nu)x = s$, т.е. $s = rx + \nu$, где $0 \leqq \nu < r$. Таким образом $x = \left[\frac{s}{r}\right]$ – частное, а ν – остаток от деления s на r.

Эти элементарные рассуждения показывают, что для любых n и r, $r \leqq n$, имеется единственный почти регулярный полный хроматический граф с n вершинами и r классами; обозначаем его через $T_r(n)$ и называем графом Турана.

Очевидно, $e(T_r(n)) = \frac{r-1}{2r} n^2$, если $r|n$ (т.е. когда граф $T_r(n)$ регулярен), а $e(T_r(n)) \leqq \frac{r-1}{2r} n^2$ для любого r ($r \leqq n$, но не обязательно $r|n$), см. [1].

Туран [9] доказал, что единственный граф с максимальным количеством ребер среди n-вершинных графов без K_{r+1} является граф $T_r(n)$.

Прочее, задолго до него Мантель [7] установил то же самое, однако только в частном случае $r = 2$.

Из (1) и (9) следует

$$\hat{t}e \geqq 3t. \tag{24}$$

Равенство в (24) достигается только тогда, когда $t[u, v]$ одно и то же для любого ребра $[u, v]$.

Л е м м а 1. Выполнено неравенство

$$e\hat{t} \geqq \sum \left\{ d^2(v) | v \in V \right\} - ne. \tag{25}$$

Равенство имеет место только тогда, когда G – полный r-хроматический граф, который к тому же и регулярен, если $r \geqq 3$.

Неравенство (25) следует из (15) и (24). Равенство достигается только тогда, когда $\bar{t} = 0$, т.е. G – полный r-хроматический граф и, кроме того, $t[u, v]$ – постоянно. Последнее не является ограничением при $r \leqq 2$, так как тогда $t[u, v] = 0$, однако при $r \geqq 3$ означает, что граф регулярен. Действительно, если $[u, v] \in E$, тогда u и v принадлежат разным хроматическим классам и $t[u, v]$ – количество вершин в объединении остальных хроматических классов. Итак, объединение любых $r-2$-хроматических классов в G имеет постоянное количество элементов, а это означает, что все хроматические классы имеют одинаковое число вершин и, следовательно, граф регулярен.

Л е м м а 2. Имеет место неравенство

$$\hat{t} \geqq \frac{4e}{n} - n \tag{26}$$

и оно переходит в равенство только тогда, когда G - регулярный полный r-хроматический граф и $r \geqq 2$.

Действительно, если $e = 0$, (26) выполнено по тривиальным соображениям и к тому же оно строго. Если $e > 0$, оно следует из (25) и очевидного неравенства

$$\sum \{d^2(v)|v \in V\} \geqq \frac{1}{n}\left(\sum \{d(v)|v \in V\}\right)^2 = \frac{4e^2}{n}. \tag{27}$$

Равенство в (26) достигается только одновременно с равенствами в (25) и (27). Равенство в (27) имеет место только для регулярных графов. Применяя лемму 1, заключаем, что равенство в (26) достигается только тогда, когда G – регулярный полный r-хроматический граф и $r \geqq 2$ (потому что $e > 0$).

Замечание. Доказательства этих двух лемм излагаются здесь исключительно для полноты. Дело в том, что они по существу известны еще из статьи Нордхауза и Стьюарта [8]. В этой статье число $\hat{t}$ не участвует, однако вместо неравенств (25) и (26) там встречаются более точные неравенства

$$3t \geqq \sum \{d^2(v)|v \in V\} - ne, \tag{28}$$

$$3t \geqq e\left(\frac{4e}{n} - n\right) \tag{29}$$

Неравенство (28) следует из (15), а (29) – из (28) и (27). Случай равенства в (28) или (29) тоже рассмотрен в [8]. Неравенства (25) и (26) следуют из (28) и (29) с помощью тривиального неравенства (24). Они приводятся в [3], как это ни странно, без всякой ссылки на [8]. Притом в [3] есть дополнительное и совершенно лишнее предположение $\sum \{d^2(v)|v \in V\} \geqq ne$.

Если $e > \frac{r-1}{2r}n^2$, тогда $e > e(T_r(n))$ и, согласно теореме Турана, в G имеется K_{r+1}, так что $\hat{t} \geqq r - 1$. Значительно более сильное утверждение при том же самом предположении содержится в следующем предложении:

Теорема 2. Если

$$e \geqq \frac{r-1}{2r}n^2, \tag{30}$$

тогда

$$\hat{t} \geqq \frac{r-2}{r}n, \tag{31}$$

причем равенство в (31) достигается тогда и только тогда, когда $2 \leqq r|n$ и $G = T_r(n)$.

Неравенство (31) следует из (26) и (30). Равенство в (31) имеется только одновременно с равенствами в (26) и (30), т.е. (см. лемму 2) когда $G = T_p(n)$, где $2 \leqq p|n$, и $e = \frac{r-1}{2r}n^2$. Но в этом случае $e = \frac{p-1}{2p}n^2$ и, следовательно, $p = r$.

Доказательство завершено.

Эта элементарная теорема при $r = 2$ принимает следующий вид: если $e \geqq \frac{n^2}{4}$, тогда $\hat{t} \geqq 0$ и $\hat{t} = 0$ точно тогда, когда n – четно и $G = T_2(n)$.

Разумеется, если $e > \frac{n^2}{4}$, тогда $\hat{t} > 0$. Эрдеш [4] доказал значительно больше: существует такая константа $c > 0$, что если $e > \frac{n^2}{4}$, тогда $\hat{t} > cn$. Несколько лет спустя Эрдеш установил, что здесь можно взять $c = 30^{-18}$. В [4] и [5] Эрдеш высказал гипотезу: если $e > \frac{n^2}{4}$, тогда $\hat{t} \geqq \frac{n}{6} + O(1)$. В [6] гипотеза принимает более точную форму:

Проблема Эрдеша. Если $e > \frac{n^2}{4}$, тогда $\hat{t} \geqq \frac{n}{6}$.

В [2] эту проблему мы решили полностью совместно с моим дипломантом В. Никифоровым. Чтобы и здесь рассказать об этом решении, нам понадобится следующая

Л е м м а 3. Пусть n – натуральное, а s – целое число. Функция $f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ целочисленных аргументов $x_1,\ldots,x_n$, удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^{n} x_i = s$, принимает свое минимальное значение только тогда, когда $|x_i - x_j| \leqq 1$ для любых двух индексов i и j.

Высказанное утверждение, очевидно, следует причислять к математическому фольклору, но мы докажем его здесь для полноты изложения, тем более что на это понадобятся всего несколько строк.

Функция f, очевидно, достигает свой минимум, и пусть это происходит например в $(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$. Надо доказать, что $|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \leqq 1$, $i,j = 1,2,\ldots,n$. Допустим противное. Тогда без ограничения общности можно считать, что $\bar{x}_1 > \bar{x}_2+1$. Имеем $(\bar{x}_1-1)^2+(\bar{x}_2+1)^2 = \bar{x}_1^2+\bar{x}_2^2-2(\bar{x}_1-\bar{x}_2-1) < \bar{x}_1^2+\bar{x}_2^2$ и, следовательно,

$$f(\bar{x}_1-1,\bar{x}_2+1,\bar{x}_3,\ldots,\bar{x}_n) < f(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n),$$

что является противоречием.

Лемма доказана. Выведем из нее одно важное для нас следствие:

Л е м м а 4. Если

$$e \geqq \left[\frac{n^2}{4}\right], \tag{32}$$

тогда

$$\sum \left\{d^2(v) | v \in V\right\} \geqq ne, \tag{33}$$

причем, если неравенство (32) строгое, то и неравенство (33) является таковым.

Если неравенство (32) строгое, тогда $e > \frac{n^2}{4}$ и из (27) следует, что выполнено строгое неравенство (33). Если $e = \left[\frac{n^2}{4}\right]$ и n – четно, тогда неравенство (33) следует снова из (27), потому что сейчас $e = \frac{n^2}{4}$. Наконец, пусть $e = \left[\frac{n^2}{4}\right]$ и n - нечетно, $n = 2k+1$.

Итак, надо доказать, что если $n = 2k+1$ и $e = k(k+1)$, то

$$\sum \left\{d^2(v) | v \in V\right\} \geqq (2k+1)k(k+1). \tag{34}$$

Заметим, что

$$\sum \left\{d(v) | v \in V\right\} = 2e = 2k(k+1)$$

и положим $s = 2k(k+1)$. Согласно лемме 3, функция f принимает свое минимальное значение только тогда, когда $|x_i - x_j| \leqq 1$. Однако, как было установлено в начале пункта, в этом случае числа x_i определены однозначно с точностью до порядка. Теперь $\left[\frac{s}{n}\right] = k$ и остаток ν от деления s на n тоже равняется k, $\nu = k$, так что k из чисел x_i равны $k+1$, а остальные $k+1$ равны k. Это показывает, что вопросный минимум равен числу $k(k+1)^2 + (k+1)k^2 = (2k+1)k(k+1)$.

Таким образом неравенство (34), а заодно с ним и лемма 4 доказаны.

Из следствия 1 и леммы 4 получаем

С л е д с т в и е 3. Если $e > \left[\frac{n^2}{4}\right]$, тогда $\hat{t} > \frac{n}{6}$.

Из следствия 2 и леммы 4 получаем

С л е д с т в и е 4. Если $e \geqq \left[\frac{n^2}{4}\right]$ и $t > 0$, то $\hat{t} \geqq \frac{n}{6}$.

Следствия 3 и 4 подтверждают с избытком гипотезу Эрдеша. В то же время следствия 1 и 2 представляют более сильные утверждения. Дело в том, что из (33) не следует (32), включительно и тогда, когда $t > 0$. В этом убедимся на следующем примере.

П р и м е р 3. Пусть граф G''' имеет вершины $v_1, v_2, \ldots, v_n$ и ребра $[v_1, v_2]$, $[v_1, v_i]$ и $[v_2, v_i]$, где $i = 3, \ldots, n$.

Очевидно, $t > 0$, $e = 2n - 3$ и $e < \frac{n^2}{4}$, если $n > 6$ С другой стороны, $\sum\limits_{i=1}^{n} d(v_i)^2 = 2n^2 - 6$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} d(v_i)^2 > ne$.

Надо заметить тоже, что в следствии 4 требование $t > 0$ нельзя отставить, так как для любого полного 2-хроматического графа имеют место равенства $\sum \left\{ d^2(v) | v \in V \right\} = ne$ и $\hat{t} = 0$, а для графа $T_2(n)$ – $e = \left[\frac{n^2}{4}\right]$ и $\hat{t} = 0$.

Положим

$$\hat{t}(n) = \min\left\{\hat{t} | e \geqq [\frac{n^2}{4}], t > 0\right\}.$$

Итак, $\hat{t}(n)$ – минимальное $\hat{t}(G)$, где G – n-вершинный граф, для которого $e(G) \geqq \left[\frac{n^2}{4}\right]$ и $t(G) > 0$.

Для любого вещественного числа x положим

$$]x[= \min\{k | k \in \mathbb{N}, k \geqq x\}.$$

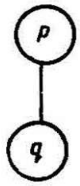
Естественным дополнением к следствию 4 является следующее

С л е д с т в и е 5. Для любого натурального числа n $(n \geqq 4)$

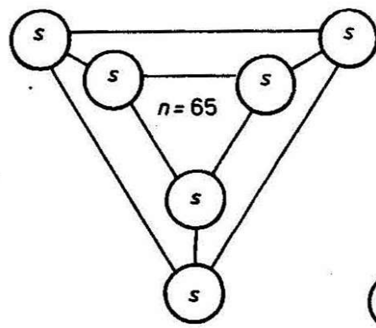
$$\hat{t}(n) = \left]\frac{n}{6}\right[. \tag{35}$$

Полный 2-хроматический граф с числами вершин в классах p и q изображен символично на фиг. 1, которая дает пояснение к пониманию следующих фигур. Фиг. 2–7 – примеры графов с $e = \left[\frac{n^2}{4}\right]$, $t > 0$ и $\hat{t} = \left]\frac{n}{6}\right[$. При помощи этих примеров и следствия 4 справедливость равенства (35) при $n \geqq 6$ устанавливается тривиально.

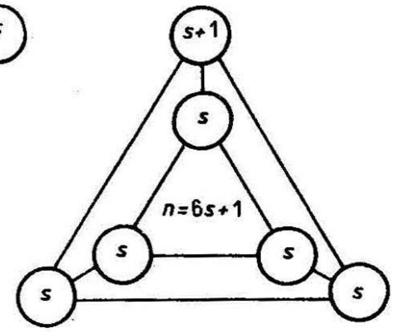
Следствие 5 показывает, что следствие 4 не подлежит усилению. То же самое верно и по отношению к следствию 3. Чтобы убедится в этом, достаточно посмотреть на фиг. 8, где изображен граф с $e = \left[\frac{n^2}{4}\right] + 1$ и $\hat{t} = \left]\frac{n}{6}\right[$.



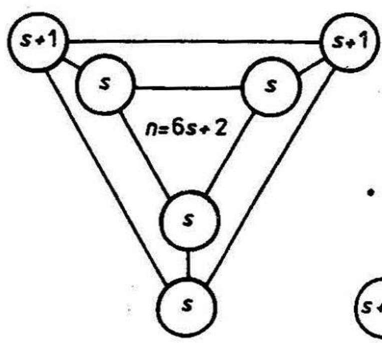
Фиг. 1



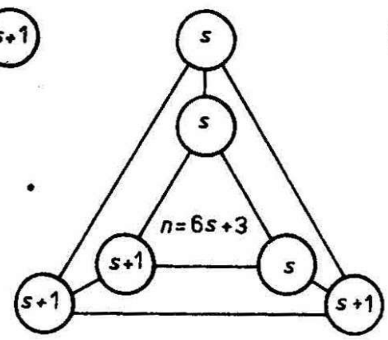
Фиг. 2



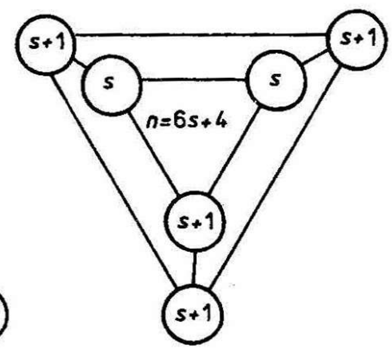
Фиг. 3



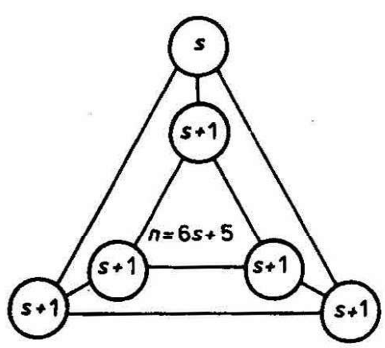
Фиг. 4



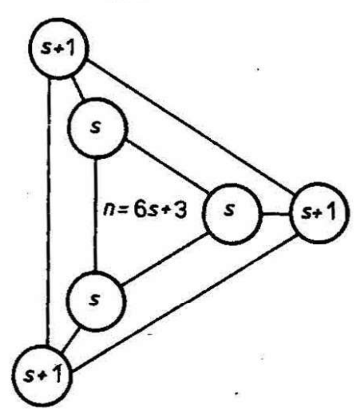
Фиг. 5



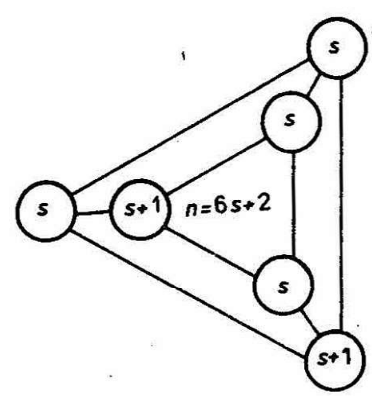
Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9

Граф, изображенный на фиг. 9, имеет $e = \frac{n^2}{4} - 1$ и $\hat{t} = \left]\frac{n}{6}\right[$, что показывает, что требование $e \geqq \left[\frac{n^2}{4}\right]$ отнюдь не необходимо для выполнения неравенства $\hat{t} \geqq \frac{n}{6}$.

3. О СТАТЬЕ ЭДВАРДСА И ТЕОРЕМА 3

Квадратный трехчлен

$$\varphi(x) = 2ex^2 - \left(6t + \frac{ne}{3}\right)x + nt$$

имеет корни $x_1 = \frac{n}{6}$ и $x_2 = \frac{3t}{e}$.

Докажем, что если $\hat{t} \geqq \frac{n}{6}$, тогда $\varphi(\hat{t}) \geqq 0$.

Действительно, согласно (24), $\hat{t} \geqq x_2$, так что если $x_2 \geqq x_1$, тогда, очевидно, $\varphi(\hat{t}) \geqq 0$, а если $x_1 \geqq x_2$, тогда неравенство $\hat{t} \geqq \frac{n}{6} = x_1$ снова показывает, что $\varphi(\hat{t}) \geqq 0$.

Таким образом доказана следующая

Л е м м а 5. Если $\hat{t} \geqq \frac{n}{6}$, тогда

$$6t + ne - \frac{nt}{\hat{t}} \leqq 2e\hat{t} + \frac{2}{3}ne. \tag{36}$$

Для любого графа G, согласно теореме 1 (см. и (19)), имеет место неравенство

$$\sum\{d^2(v)|v \in V\} \leqq 6t + ne - \frac{nt}{\hat{t}}. \tag{37}$$

С помощью (36) и (37) тривиально получаем:

Т е о р е м а 3. Если $\hat{t} \geqq \frac{n}{6}$, тогда

$$\hat{t} \geqq \frac{1}{2e}\sum\{d^2(v)|v \in V\} - \frac{n}{3}. \tag{38}$$

Естественно, неравенство (38) представляет интерес только тогда, когда его правая часть $\geqq \frac{n}{6}$, т.е. $\sum\{d^2(v)|v \in V\} \geqq en$. С другой стороны, если последнее неравенство выполнено и $t > 0$, согласно следствию 2 будем иметь $\hat{t} \geqq \frac{n}{6}$ и, значит, (38) имеет место.

Итак, мы доказали следующее предложение:

С л е д с т в и е 6. Если $\sum\{d^2(v)|v \in V\} \geqq ne$ и $t > 0$, тогда справедливо неравенство (38).

Если $e \geqq \left[\frac{n^2}{4}\right]$ и $t > 0$, согласно следствию 4 имеем $\hat{t} \geqq \frac{n}{6}$ и, значит, (38) выполнено.

Итак, доказано следующее предложение:

С л е д с т в и е 7. Если $e \geqq \left[\frac{n^2}{4}\right]$ и $t > 0$, тогда имеет место неравенство (38).

Формулировка следствия 7 опубликована в качестве дополнительного замечания к статье Эдвардса [3], однако его доказательство не было опубликовано до сих пор. Как мы убедились, это было бы лишним, потому что с помощью нашей теоремы 1 оно выводится в качестве простого следствия из справедливости гипотезы Эрдеша, доказанная, как и теорема 1, еще в [2]:

В самой статье [3] ее автор анонсировал 5 теорем и несколько других результатов, намереваясь опубликовать их доказательства впоследствии, что не произошло в прошедшие 10 лет. Все результаты относятся к гипотезе Эрдеша, однако, несмотря на это, нет никакого сдвига к ее решению.

Автор считает основной свою пятую теорему. Формулировку ее здесь приводить не будем, потому что ее предположения абсурдны: между ними значится и отрицание гипотезы Эрдеша.

Его первая теорема гласит: Если $[u,v] \in E$ и $d(u)+d(v) \geqq \frac{7}{6}n$, тогда $\hat{t} \geqq \frac{n}{6}$.

Эта теорема тривиально следует из очевидного неравенства (см. (17))

$$t[u,v] \geqq d(u)+d(v)-n.$$

Теорему 2 здесь приводить не будем, потому что она тривиально извлекается из только что упомянутой теоремы 1.

Из очевидного равенства

$$|A(u) \cup A(v) \cup A(w)| = |A(u)|+|A(v)|+|A(w)|$$
$$-|A(u)\cap A(v)| - |A(v)\cap A(w)| - |A(w)\cap A(u)| + |A(u)\cap A(v)\cap A(w)|$$

следует тривиально, что

$$(39) \qquad 3\hat{t} \geqq t[u,v,w] \geqq d(u)+d(v)+d(w)-n, \text{ если } [u,v,w] \in T.$$

Последнее неравенство с избытком содержит теоремы 3 и 4 Эдвардса. К примеру рассмотрим теорему 4, о которой мы упомянули и в [2] и которая тривиально следует из неравенства (39): если регулярный граф степени d содержит хотя бы один треугольник, тогда $\hat{t} \geqq d - \frac{n}{3}$. В частности, если $d \geqq \frac{n}{2}$, то $\hat{t} \geqq \frac{n}{6}$.

Таким образом закончен разбор теорем из [3]. В [3] выводятся и две следствия из теоремы 5. Мы уже отметили, что эта теорема лишена смысла, так что их на самом деле нельзя вывести из нее.

Следствие 1 гласит: Если

$$(40) \qquad \frac{4e}{n} - n \geqq \frac{n}{9+6\sqrt{2}},$$

тогда

$$(41) \qquad \hat{t} \geqq \max\left(\frac{n}{6}, \frac{4e}{n} - n\right).$$

На самом деле достаточно доказать, что $\hat{t} \geqq \frac{n}{6}$, так как неравенство $\hat{t} \geqq \frac{4e}{n} - n$ выполнено для любого графа (см. лемму 2). А для доказательства неравенства $\hat{t} \geqq \frac{n}{6}$ совершенно излишне предполагать, что выполнено неравенство (40), а только что $\frac{4e}{n} - n > 0$ (см. следствие 3 из п.2).

Следствие 2 гласит: Если

$$(42)\qquad 0<\frac{4e}{n}-n<\frac{n}{9+6\sqrt{2}},$$

тогда

$$(43)\qquad \hat{t}>\frac{n}{8}+\frac{3+\sqrt{74}}{16}\left(\frac{4e}{n}-n\right).$$

Из левой части (42) следует неравенство $\hat{t}>\frac{n}{6}$ (см. следствие 3 из п.2), а

$$\frac{n}{6}>\frac{n}{8}+\frac{3+\sqrt{74}}{16}\frac{n}{9+6\sqrt{2}},$$

так что неравенство (43) действительно имеет место, но явно не интересно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаджииванов, Н. Г. Обобщение теоремы Турана о графах. — Докл. БАН, **29**, №11, 1976, 1567–1570.
2. Хаджииванов, Н., Вл. Никифоров. Решение одной проблемы П. Эрдеша о наибольшем числе треугольников с общим ребром в графе. — Докл. БАН, **32**, №10, 1979, 1315–1318.
3. Edwards, C. S. The largest number of triangles with a common edge in a graph. — In: Colloques internationaux C.N.R.S. 260, Paris, 1978, 123–126.
4. Erdös, P. On a theorem of Rademacher-Turàn. — Illinois Journ. Math., **6**, 1962, 122–127.
5. Erdös, P. On the number of complete subgraphs and circuits contained in graphs. — Časopis pěst. mat., **94**, 1969, 290–296.
6. Bollobas, B., P. Erdös. Unsolved problems. — In: Proceedings v. British. Conf., 1975, Congr. Numer. XV, Utilitas Math., Winipeg, 1976.
7. Mantel, W. Problem 28. — Wiskundig Opgaren, **10**, 1907, 60–61.
8. Nordhaus, E. A., B. M. Stewart. Triangles in an ordinary graph. — Canad. Journ. Math., **15**, 1, 1963, 33–41.
9. Turan, P. On an extremal problem in graph theory. — Mat. Fiz. Lapok, **48**, 1941, 436–452.

ON THE MAXIMAL NUMBER OF TRIANGLES WITH A COMMON EDGE

Nikolay Khadzhiivanov

(Summary)

§1. Let $G=(V,E)$ be a graph, $|V|=n$, $|E|=e$, T is the set of triangles in G, $|T|=t$, and q is the number of tetrahedrons in G. For a vertex v we denote by $A(v)$ the set of its neighbours, so that $d(v)=|A(v)|$ is the degree of v. Put