ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 2 — Механика
Том 82, 1988

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA "ST. KLIMENT OHRIDSKI"
FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 2 — Mécanique
Tome 82, 1988

НЕХОЛОНОМНИ ЗАДАЧИ ОТ ТЪРКАЛЯНЕ НА ТВЪРДО ТЯЛО ВЪРХУ ПОВЪРХНИНА

СОНЯ ДЕНЕВА

Соня Денева. НЕХОЛОНОМНИ ЗАДАЧИ ОТ ТЪРКАЛЯНЕ НА ТВЪРДО ТЯЛО ВЪРХУ ПОВЪРХНИНА

В работе затронуты некоторые аспекты классической неголономной задачи о качении без скольжения тяжелого шара по поверхности.

Sonia Deneva. ON NONHOLONOMIC PROBLEMS FOR THE MOTION OF RIGID BODY ON A ROUGH SURFACE

In the paper some nonholonimic problems for the motion of a heavy ball rolling on absolutely rough surface are considered.

В настоящата работа са засегнати някои аспекти на класическата задача за търкаляне на тежко кълбо върху грапава повърхнина. С помощта на уравненията на Апел са изведени общите уравнения на движение и са разгледани някои частни решения на тези уравнения при търкаляне без хлъзгане на кълбо върху конкретни повърхнини — равнина и ротационен елипсоид. Разгледани са два основни случая — търкаляне без хлъзгане на нехомогенно и хомогенно кълбо. Изискването кълбото да не напуска повърхнината е еквивалентно с наличието на една крайна връзка между параметрите на движението, а условието за търкаляне без хлъзгане води до две зависимости между обобщените скорости.

Задачата за търкаляне на тежко твърдо тяло върху неподвижна хоризонтална равнина е решена само в следните три случая : движещото се тяло е ограничено от цилиндрична повърхнина (задача, разглеждана от Л. Ойлер) или има форма на кълбо или диск (точни решения в последните два случая са дадени от В. Томсън за случая на хомогенно тяло). Решението на задачата за търкаляне на нехомогенно кълбо е намерено при следните ограничения : центърът на тежестта G на кълбото съвпада с геометричния му център и централният инерчен елипсоид има формата на сфероид (задача, разглеждана от Д.К.Бобылев и Н.Е.Жуковски [1, 2]). По-общият случай, когато центърът на масите не съвпада с геометричния център на кълбото и два от главните инерчни моменти са равни, е изследван от С.А.Чаплигин [3]. За триосен централен инерчен елипсоид решения са намерени в някои частни случаи от П.В.Воронец [4] при известни предположения за разположението на масата, липса на тегло и ограничения относно началните условия на движението. През 1958 г. Е.И.Харламова [5] разглежда задачата за търкаляне на кълбо по наклонена равнина при някои ограничения, наложени на началните условия на задачата, и при условие, че кълбото притежава триосен инерчен елипсоид, за центъра на масите, съвпадащ с геометричния му център. При тези ограничения авторката привежда уравненията на движение на кълбото към уравнения, по форма съвпадащи с изследваните от С.А.Чаплигин в задачата за търкаляне на нехомогенно кълбо по хоризонтална равнина, за която споменахме по-горе [3].

В предлаганата работа за получаване на диференциалните уравнения на движението са използвани уравненията на Апел. Едно от предимствата на тази форма уравнения на движение за нехолономни системи в сравнение с многото други предлагани е следното : Доказано е, че енергията на ускорението S напълно характеризира динамиката на нехолономните системи в смисъл, че имайки израза само на функцията S и неразполагайки с други сведения за системата (незнаейки нищо за връзките, наложени на системата), можем да съставим уравненията на движение. По такъв начин за нехолономни системи функцията на ускорението играе такава роля, каквато и кинетичната енергия T за холономни системи. Оттук следва, че познаването само на функцията T е все още недостатъчно за изучаване поведението на дадена нехолономна система. С други думи, ако знаем само израза за кинетичната енергия, то за динамиката на нехолономната система още нищо не можем да кажем. За доказателство на това твърдение е достатъчно да се намерят две различни динамични системи, изразите за T на които са еднакви, а функциите S са различни. Такъв пример е даден от Апел [6]. Авторът разглежда две системи, първата от които представлява диск с радиус a и инерчни моменти A, A и C, който се търкаля по грапава хоризонтална равнина. Втората система е ротационно тяло с радиус a и с такова разпределение на масите, че $A_1 = A$, $C_1 = ma^2$. Последното се движи при следните ограничения :

а) центърът на тялото се хлъзга по вертикална окръжност с уравнение

$$\eta = 0, \qquad \xi^2 + \eta^2 = a^2.$$

б) самото тяло се хлъзга по хоризонтална равнина без триене, при което координатата на центъра на масите е $\zeta = a\sin\theta$.

Ако масите на двете тела се приемат за единици, след несложни пресмятания за енергията на ускорението на първата система се получава

$$S_1 = \frac{1}{2}[(A + a^2)\dot{p}^2 + A\dot{q}^2 + (C + a)\dot{r}^2] + (Aq\text{ctg}\theta - Cr)(p\dot{q} - q\dot{p}) + \dots,$$

докато за втората имаме

$$S_2 = \frac{1}{2}[(A + a^2)\dot{p}^2 + A\dot{q}^2 + C\dot{r}^2] + (Aq\text{ctg}\theta - Cr)(p\dot{q} - q\dot{p}) + \dots$$

Функцията на Лагранж обаче и за двете системи е една и съща :

$$L_1 = L_2 = \frac{1}{2}[A(\dot{p}^2 + \dot{q}^2) + C\dot{r}^2] + (Aq\text{ctg}\theta - Cr)(p\dot{q} - q\dot{p}) + \dots$$

I. УРАВНЕНИЕ НА ДВИЖЕНИЕ НА НЕХОМОГЕННО КЪЛБО, КОЕТО СЕ ТЪРКАЛЯ БЕЗ ХЛЪЗГАНЕ ПО НЕПОДВИЖНА РАВНИНА

Положението на кълбото определяме спрямо две координатни системи — инерциалната координатна система $Oxyz$, чиято ос Oz е насочена вертикално нагоре, и неизменно свързаната с тялото координатна система $C\xi\eta\zeta$, образувана от центъра C на кълбото и главните му инерчни оси. За параметри на движението избираме координатите x_G, y_G на центъра на масите и ойлеровите ъгли φ, ψ, θ на неподвижния триедър $C\xi\eta\zeta$ спрямо $Oxyz$. Радиуса на кълбото означаваме с b, а с H — допирната точка на кълбото с хоризонталната равнина. Ще изведем най-напред уравненията на движение при предположение, че масовият център C на кълбото съвпада с геометричния му център G.

От условието за търкаляне без хлъзгане следва

$$\overline{V}_H = V_C + \overline{\omega} \times \rho_H = \overline{0}, \tag{1}$$

където ω е моменталната ъглова скорост на кълбото, а $\rho_H = CH$. От (1), проектирайки върху неподвижните оси, получаваме

$$\begin{aligned} &\dot{x}_C - b\omega_y = 0, \\ &\dot{y}_C + b\omega_x = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\dot{z}_C = 0.$$

Първите две равенства отразяват нехолономните връзки. Третото се свежда до $z_C = \text{const}$, $z_C = b$.

Поради нехолономните връзки само три от обобщените координати, определящи положението на кълбото, са независими. За такива избираме ойлеровите ъгли ψ, φ и θ. Ще изведем уравненията на движение с помощта на уравненията на Апел във вида

$$\frac{\partial S^*}{\partial \ddot{q}_\sigma} = Q_\sigma \qquad (\sigma = l+1, \dots, m),$$

където $q_1, q_2, \dots, q_m$ са обобщените координати, l — броят на нехолономните връзки, S — енергията на ускорението ($l = 2$, $m = 5$),

$$S^* = S(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_{l+1}, \dots, \dot{q}_m, \ddot{q}_{l+1}, \dots, \ddot{q}_m).$$

Енергията на ускорението на твърдо тяло при произволно движение спрямо главни инерчни оси се задава с формулата

$$S = \frac{m}{2} w_C^2 + \frac{1}{2}(A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2 + C\dot{r}^2) \tag{3}$$

$$+(C-B)\dot{p}qr + (A-C)\dot{q}pr + (B-A)\dot{r}pq + \dots,$$

където с p, q, r са означени проекциите на ω върху $C\xi\eta\zeta$:

$$p = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \tag{4}$$

$$q = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi,$$

$$r = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}.$$

Проекциите на ω върху $Oxyz$ зависят от ойлеровите ъгли по следния начин :

$$\omega_x = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi, \tag{5}$$

$$\omega_y = -\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi,$$

$$\omega_z = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta.$$

Да пресметнем енергията на ускорението на кълбото :

$$\frac{m w_G^2}{2} = \frac{m}{2}(\ddot{x}_C^2 + \ddot{y}_C^2 + \ddot{z}_C^2) \qquad (x_C = x_G,\ y_C = y_G).$$

От (2) и (5) намираме

$$\dot{x}_C = b(-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi),$$

$$\dot{y}_C = -b(\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi),$$

$$\ddot{x}_C = b(-\ddot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\psi$$
$$+\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta\sin\psi + \ddot{\theta}\sin\psi + \dot{\theta}\dot{\psi}\cos\psi),$$
$$\ddot{y}_C = -b(\ddot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\psi$$
$$+\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta\sin\psi + \ddot{\theta}\cos\psi - \dot{\theta}\dot{\psi}\sin\psi).$$

Повдигайки в квадрат $\ddot{x}_C$ и $\ddot{y}_C$, запазваме само членовете, съдържащи $\ddot{\varphi}$ и $\ddot{\theta}$. След известни пресмятания получаваме

$$\ddot{x}_C^2 + \ddot{y}_C^2 = b^2[(\ddot{\varphi}\sin\theta)^2 + \ddot{\theta}^2$$
$$+2\sin\theta(\ddot{\varphi}\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta - \ddot{\varphi}\dot{\theta}\dot{\psi} + \ddot{\theta}\dot{\varphi}\dot{\psi})],$$

откъдето

$$\frac{1}{2}m\omega_C^2 = \frac{1}{2}mb^2[\ddot{\theta} + (\ddot{\varphi}\sin\theta)^2 + 2\sin\theta(\ddot{\varphi}\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta$$
$$-\ddot{\varphi}\dot{\theta}\dot{\psi} + \ddot{\theta}\dot{\varphi}\dot{\psi})].$$

От (4) намираме

(6)
$$\dot{p} = \ddot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi$$
$$+\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi + \ddot{\theta}\cos\varphi - \dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi,$$
$$\dot{q} = \ddot{\psi}\sin\theta\cos\varphi + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi$$
$$-\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi - \ddot{\theta}\sin\varphi - \dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi,$$
$$\dot{r} = \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta + \ddot{\varphi}.$$

Уравненията на Апел ще имат вида

(7)
$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\psi}} = [A\dot{p} + (C-B)qr]\frac{\partial \dot{p}}{\partial \ddot{\psi}} + [B\dot{q} + (A-C)pr]\frac{\partial \dot{q}}{\partial \ddot{\psi}}$$
$$+[C\dot{r} + (B-A)pq]\frac{\partial \dot{r}}{\partial \ddot{\psi}} = 0,$$
$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\varphi}} = mb^2\sin\theta(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}\dot{\psi}) + [A\dot{p} + (C-B)qr]\frac{\partial \dot{p}}{\partial \ddot{\varphi}}$$
$$+[B\dot{q} + (A-C)pr]\frac{\partial \dot{q}}{\partial \ddot{\varphi}} + [C\dot{r} + (B-A)pq]\frac{\partial \dot{r}}{\partial \ddot{\varphi}} = 0,$$
$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\theta}} = mb^2(\ddot{\theta} + \dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta) + [A\dot{p} + (C-B)qr]\frac{\partial \dot{p}}{\partial \ddot{\theta}}$$
$$+[B\dot{q} + (A-C)pr]\frac{\partial \dot{q}}{\partial \ddot{\theta}} + [C\dot{r} + (B-A)pq]\frac{\partial \dot{r}}{\partial \ddot{\theta}} = 0.$$

От (6) и (7) получаваме следните уравнения на движение на нехомогенно кълбо върху неподвижна хоризонтална равнина :

$$[A\dot{p} + (C - B)qr]\sin\theta\sin\varphi + [B\dot{q} + (A - C)pr]\sin\theta\cos\varphi$$
$$+[C\dot{r} + (B - A)pq]\cos\theta = 0,$$

$$(8) \qquad mb^2\sin\theta(\ddot{\varphi}\sin\theta + \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}\dot{\varphi}) + C\dot{r} + (B - A)pq = 0,$$

$$mb^2(\ddot{\theta} + \dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta) + [A\dot{p} + (C - B)qr]\cos\varphi$$
$$-[B\dot{q} + (A - C)pr]\sin\varphi = 0.$$

Ще се спрем на някои частни решения на системата (8).

1. Полагаме $\theta = 0$. Тогава уравненията (8) добиват вида

$$C\dot{r} + (B - A)pq = 0,$$

$$[A\dot{p} + (C - B)qr]\cos\varphi = [B\dot{q} + (A - C)pr]\sin\varphi.$$

От формулите за p, q, r и техните производни след заместване с $\theta = 0$ получаваме

$$p = q = 0,$$
$$r = \dot{\psi} + \dot{\varphi},$$
$$C\dot{r} = 0 \rightarrow r = \dot{\psi} + \dot{\varphi} = r_0, \qquad \psi + \varphi = r_0 t + s_0.$$

За траекторията на допирната точка от (2) в този случай получаваме

$$x = x_0, \qquad y = y_0, \qquad z = b.$$

Сферата ще стои на едно място и ще се върти около вертикална ос, минаваща през центъра ѝ, с постоянна ъглова скорост ω с големина $|\omega| = r_0$.

2. Нека $\psi = \psi_0$ и $\varphi = 0$. Тогава имаме $p = \dot{\theta}$, $q = r = 0$. При тези условия (8) се свежда до уравнението $m(b^2 + A)\ddot{\theta} = 0$ или $\theta = \dot{\theta}_0 t + \theta_0$.

Да определим траекторията на допирната точка :

$$\dot{x} = b\dot{\theta}_0\sin\psi_0, \qquad x = b\dot{\theta}_0\sin\psi_0 t + x_0,$$

$$\dot{y} = -b\dot{\theta}_0\cos\psi_0, \qquad y = -b\dot{\theta}_0\cos\psi_0 t + y_0,$$

откъдето, изключвайки параметъра t, получаваме $y = (x_0 - x)\mathrm{ctg}\psi_0 + y_0$. При направените предположения стигаме до извода, че кълбото се движи с постоянна ъглова скорост $\omega = \dot{\theta}_0\cos\psi_0 i + \dot{\theta}_0\sin\psi_0 j$ и центърът му се движи праволинейно и равномерно със скорост $|v| = b\dot{\theta}_0$.

3. Нека $\theta = \theta_0$. Тогава уравненията на движението ще имат вида

$$\{[A\dot{p} + (C - B)qr]\sin\varphi + [B\dot{q} + (A - C)pr]\cos\varphi\}\sin\theta_0$$
$$+[C\dot{r} + (B - A)pq]\cos\theta_0 = 0,$$

$$(9) \qquad mb^2 \sin^2\theta_0 \ddot{\varphi} + C\dot{r} + (B-A)pq = 0,$$

$$mb^2 \sin\theta_0 \dot{\varphi}\dot{\psi} + [A\dot{p} + (C-B)qr]\cos\varphi$$
$$-[B\dot{q} + (A-C)pr]\sin\varphi = 0.$$

Замествайки p, q, r с техните равни, получаваме уравненията

$$\frac{d}{dt}[Ap\sin\theta_0\sin\varphi + Bq\sin\theta_0\cos\varphi + Cr\cos\theta_0] = 0,$$

$$\frac{d}{dt}[mb^2\sin^2\theta_0\dot{\varphi} + Cr] + (B-A)\sin^2\theta_0\dot{\psi}^2\sin\varphi\cos\varphi = 0,$$

$$\frac{d}{dt}[Ap\cos\varphi - Bq\sin\varphi] = \dot{\psi}[\cos\theta_0(Ap\sin\varphi + Bq\cos\varphi) - \sin\theta_0(Cr + mb^2\dot{\varphi})].$$

Нека още $\psi = \psi_0$. Тогава $p = q = 0$, $r = \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$, $\varphi = \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0$. За траекторията на допирната точка получаваме

$$\begin{aligned} x &= -b\dot{\varphi}_0\sin\theta_0\cos\psi_0 t + x_0, \\ y &= -b\dot{\varphi}_0\sin\theta_0\sin\psi_0 t + y_0. \end{aligned}$$

В случая $\theta = \theta_0$, $\psi = \psi_0$ допирната точка отново описва права и кълбото се търкаля с ъглова скорост $|\bar{\omega}| = \dot{\varphi}_0$,

$$\overline{\omega} = \dot{\varphi}_0\sin\theta_0\sin\psi_0 i - \dot{\varphi}_0\sin\theta_0\cos\psi_0 j + \dot{\varphi}_0\cos\theta_0 k.$$

4. Полагаме $\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0$. В уравненията (9) заместваме $\varphi = \varphi_0$:

$$[A(\sin\varphi_0\sin\theta_0)^2 + B(\sin\theta_0\cos\varphi_0)^2 + C\cos^2\theta_0]\dot{\psi} = C_1,$$

$$C\cos\theta_0\ddot{\psi} = \dot{\psi}^2(A-B)\sin^2\theta_0\sin\varphi_0\cos\varphi_0,$$

$$(A-B)\sin\varphi_0\cos\varphi_0\sin\theta_0\ddot{\psi} = \dot{\psi}^2\sin\theta_0\cos\theta_0(A\sin^2\varphi_0 + B\cos^2\varphi_0 - C).$$

От първото уравнение получаваме $\dot{\psi} = \text{const} = \dot{\psi}_0$. Очевидно $\ddot{\psi} = 0$. За да е изпълнено това условие, коефициентите пред $\ddot{\psi}$ във второто и третото уравнение трябва да са равни на нула. Това е изпълнено например в случая $\varphi_0 = 0$ и $B = C$.

И така, в случая $\theta = \theta_0$, $\varphi = 0$ и $A = B = C$ кълбото ще се върти около вертикална ос с ъглова скорост $\omega = \dot{\psi}_0 k$.

5. Нека $A = B$ — случай на динамична симетрия относно оста $C\zeta$. Уравненията на движение имат вида

$$[A\dot{p} + (C-A)qr]\sin\theta\sin\varphi + [A\dot{q} + (A-C)pr]\sin\theta\cos\varphi$$
$$+C\dot{r}\cos\theta = 0,$$

$$mb^2\sin\theta[\ddot{\varphi}\sin\theta + \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}\dot{\psi}] + C\dot{r} = 0,$$

$$mb^2[\ddot{\theta} + \dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta] + [A\dot{p} + (C-A)qr]\cos\varphi$$

$$-[A\dot{q} + (A - C)pr]\sin\varphi = 0.$$

Нека $\theta = \theta_0$, тогава

$$A\sin^2\theta_0 \frac{d}{dt}\dot{\psi} + C\cos\theta_0 \frac{d}{dt}(\dot{\psi}\cos\theta_0 + \dot{\varphi}) = 0,$$

$$mb^2\sin^2\theta_0 \frac{d}{dt}\dot{\varphi} + \cos\frac{d}{dt}(\dot{\psi}\cos\theta_0 + \dot{\varphi}) = 0,$$

$$[(mb^2 + C)\dot{\varphi}\sin\theta_0 + (C - A)\sin\theta_0\cos\theta_0\dot{\psi}]\dot{\psi} = 0.$$

От третото уравнение получаваме

$$\dot{\psi} = 0, \qquad \dot{\psi} = \frac{mb^2 + C}{(A - C)\cos\theta_0}\dot{\varphi}.$$

Нека $\dot{\psi} \neq 0$ (първият случай е тривиален). Умножаваме второто уравнение с $\cos\theta_0$ и го изваждаме от първото

$$A\frac{d}{dt}\dot{\psi} - mb^2\cos\theta_0\frac{d}{dt}\dot{\varphi} = 0,$$

$$A\dot{\psi} - mb^2\cos\theta_0\dot{\varphi} = C_1$$

или

$$\dot{\psi} = \frac{C_1}{A} - \frac{mb^2\cos\theta_0}{A}\dot{\varphi}.$$

За да съществува решение на системата, интеграционната константа C_1 трябва да е равна на нула и да съществува зависимостта

$$\frac{mb^2 + C}{(A - C)\cos\theta_0} = \frac{mb^2\cos\theta_0}{A}.$$

Тъй като $|\cos\theta_0| < 1$, имаме

$$\frac{A(mb^2 + C)}{mb^2(A - C)} < 1, \quad A > C,$$

$$mb^2A + AC < mb^2A - mb^2C,$$

$$A < -mb^2 < 0 \text{ — противоречие}$$

$$A < C, \quad mb^2A + AC < mb^2C - mb^2A,$$

(10) $$A < \frac{mb^2C}{2mb^2 + C}.$$

И така, при направените предположения $A = B$, $\theta = \theta_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и (10) намираме, че ъглите ψ и φ ще се изменят по линеен закон

$$\psi = \dot{\psi}_0 t + \psi_0, \qquad \varphi = \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0.$$

От

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= b\omega_y = -b\dot{\varphi}_0 \sin\theta_0 \cos(\dot{\psi}_0 t + \psi_0),\\
\dot{y} &= b\omega_x = -b\dot{\varphi}_0 \sin\theta_0 \sin(\dot{\psi}_0 t + \psi_0),\\
x &= -k\sin(\dot{\psi}_0 t + \psi_0), \qquad k = \frac{b\dot{\varphi}_0 \sin\theta_0}{\dot{\psi}_0},\\
y &= k\cos(\dot{\psi}_0 t + \psi_0),
\end{aligned}
$$

за траекторията на допирната точка получаваме окръжност $x^2 + y^2 = k^2$.

6. Нека $A = B = C$ — класическия случай на търкаляне без хлъзгане на хомогенна сфера върху неподвижна равнина. Уравненията на движението са

$$
\ddot{\psi} + \ddot{\varphi}\cos\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta = 0, \tag{11}
$$

$$
mb^2 \sin\theta(\ddot{\varphi}\sin\theta + \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}\dot{\psi}) + A(\ddot{\psi}\cos\theta + \ddot{\varphi} - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta) = 0,
$$

$$
(mb^2 + A)(\ddot{\theta} + \dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta) = 0.
$$

От (11) получаваме

$$
\omega_x = \text{const}, \qquad \omega_y = \text{const}, \qquad \omega_z = \text{const},
$$

откъдето се вижда, че векторът ω е постоянен.

Уравнения на движение на нехомогенно кълбо, когато масовият център G не съвпада с геометричния му център C.

В този случай да въведем подвижна координатна система $G\xi\eta\zeta$ с начало в масовия център. Да означим с ξ_0, η_0, ζ_0 координатите на геометричния център на кълбото спрямо осите на $G\xi\eta\zeta$. Очевидно ξ_0, η_0 и ζ_0 са константи. Векторът

$$
GC = \xi_0 \overline{\xi}^0 + \eta_0 \overline{\eta}^0 + \zeta_0 \overline{\zeta}^0
$$

определя положението на C спрямо главните инерчни оси $G\xi$, $G\eta$ и $G\zeta$. За да изведем уравненията на движение, прилагаме уравненията на Апел в квазикоординати

$$
\frac{\partial S}{\partial \ddot{\mu}_i} = Q_{\mu_i}, \qquad i = 1,\ 2,\ 3,
$$

където квазикоординатите за разглежданата система се определят от равенствата $\dot{\mu}_1 = p$, $\dot{\mu}_2 = q$, $\dot{\mu}_3 = r$. И тук за обобщените сили получаваме $Q_{\mu_1} = Q_{\mu_2} = Q_{\mu_3} = 0$. Енергията на ускорението за този случай е

$$
S = \frac{1}{2}mw_G^2 + \frac{1}{2}(A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2 + C\dot{r}^2)
$$

$$
+\dot{p}qr(C - B) + \dot{q}rp(A - C) + \dot{r}pq(B - A) + \dots,
$$

където както и по-рано с многоточие са означени величините, не жащи $\dot{p}$, $\dot{q}$ и $\dot{r}$. Условието за търкаляне без хлъзгане на допирната приложено за масовия център G, дава

$$v_G + \omega \times GH = 0,$$

откъдето следва

$$w_G = \dot{\omega} \times GH + \omega \times \dot{GH}. \tag{12}$$

Повдигайки (12) в квадрат, получаваме

$$w_G^2 = \dot{\omega}^2 (GH)^2 - (\dot{\omega}.GH)^2 + (\omega.\dot{\omega}) \frac{d}{dt}(GH)^2 \tag{13}$$

$$-2(\omega.GH)(\dot{\omega}.\dot{GH}) + \dots$$

От уравненията на Апел в квазикоординати и (13) намираме

$$\begin{aligned}
&A\dot{p} - (B - C)qr + m\dot{p}(GH)^2 - m(\dot{\omega}.GH)(GH)_\xi \\
&+\frac{m}{2}p\frac{d}{dt}(GH)^2 - m(\dot{\omega}\cdot GH)(\dot{GH})_\xi = mg(\eta_0 a_{33} - \zeta_0 a_{32}), \\
&B\dot{q} - (C - A)rp + m\dot{q}(GH)^2 - m(\dot{\omega}.GH)(GH)_\eta \\
&+\frac{m}{2}q\frac{d}{dt}(GH)^2 - m(\omega.GH)(\dot{GH})_\eta = mg(\zeta_0 a_{31} - \xi_0 a_{33}), \\
&C\dot{r} - (A - B)pq + m\dot{r}(GH)^2 - m(\dot{\omega}.GH)(GH)_\zeta \\
&+\frac{m}{2}r\frac{d}{dt}(GH)^2 - m(\omega.GH)(\dot{GH})_\zeta = mg(\xi_0 a_{32} - \eta_0 a_{31}), \\
&GH = \xi_0\xi^0 + \eta_0\eta^0 + \zeta_0\zeta^0 - bk,
\end{aligned} \tag{14}$$

откъдето за величините в (14) получаваме

$$\begin{aligned}
(GH)^2 &= b^2 + \xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 - 2b\xi_0 a_{31} - 2b\eta_0 a_{32} - 2b\zeta_0 a_{33}, \\
\frac{d}{dt}(GH)^2 &= -2b\xi_0\dot{a}_{31} - 2b\eta_0\dot{a}_{32} - 2b\zeta_0\dot{a}_{33}, \\
(\dot{GH})_\xi &= \zeta_0 q - \eta_0 r - b(\dot{a}_{31} - qa_{33} - ra_{32}), \\
(\dot{GH})_\eta &= \xi_0 r - \zeta_0 p - b(\dot{a}_{32} + ra_{31} - pa_{33}), \\
(\dot{GH})_\zeta &= \eta_0 p - \xi_0 q - b(\dot{a}_{33} - pa_{32} - qa_{31}), \\
\dot{\omega}.GH &= \dot{p}(\xi_0 - ba_{31}) + \dot{q}(\eta_0 - ba_{32}) + \dot{r}(\zeta_0 - ba_{33}), \\
\omega.GH &= p(\xi_0 - ba_{31}) + q(\eta_0 - ba_{32}) + r(\zeta_0 - ba_{33}).
\end{aligned}$$

Интегралът на енергията в този случай ще има вида

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + m\omega^2 GH^2 - m(\omega.GH)^2 = h - 2mgz_G,$$

където

$$z_G = b - \xi_0 a_{31} - \eta_0 a_{32} - \zeta_0 a_{33}.$$

II. УРАВНЕНИЯ НА ДВИЖЕНИЕТО НА НЕХОМОГЕННО КЪЛБО ПРИ ТЪРКАЛЯНЕ БЕЗ ХЛЪЗГАНЕ ВЪРХУ ПРОИЗВОЛНА АБСОЛЮТНО ГРАПАВА ПОВЪРХНИНА, КОЯТО СЕ ВЪРТИ РАВНОМЕРНО ОКОЛО ВЕРТИКАЛНА ОС

Ще предполагаме, че повърхнината, върху която се търкаля кълбото, се върти равномерно около вертикалната ос на неподвижна инерциална дясна координатна система $Oxyz$. Движещото се кълбо в общия случай е нехомогенно, но ще изискваме геометричният му център да съвпада с масовия, в който отново неподвижно с тялото е фиксирана ортогонална координатна система $G\xi\eta\zeta$ от главните инерчни оси за кълбото. Предполагаме, че кълбото се движи и тук по инерция под действие на теглото си.

Ще използваме следните означения :
$R = OH$ — радиус-вектор на допирната точка на кълбото с повърхнината,
n^0 — единичен външен нормален вектор към повърхнината в допирната точка H, $\Omega = \Omega k$ ($\Omega = \mathrm{const}$) — ъглова скорост на повърхнината.

Да изведем уравненията на движение с помощта на уравненията на Апел в квазикоординати.

От формулата за разпределение на скоростите в твърдо тяло отново получаваме

$$v_H = v_G + \omega \times GH, \qquad GH = -bn^0,$$

откъдето

$$v_G = v_H + b(\omega \times n^0).$$

V_H — скорост на допирната точка на кълбото с повърхнината. Ако считаме точката H принадлежаща на повърхнината, то

$$v_H = \Omega \times R,$$

поради което

$$v_G = b(\omega \times n^0) + \Omega \times R \tag{15}$$

са уравненията на нехолономните връзки.

За квазикоординати и тук ще изберем компонентите на ъгловата скорост на кълбото върху подвижните оси :

$$\dot{\mu}_1 = p, \qquad \dot{\mu}_2 = q, \qquad \dot{\mu}_3 = r.$$

За определянето на обобщените сили ще използуваме формулите

$$Q_{\mu_i} = \sum_{\nu=1}^{N} F_\nu a_{\nu_i}, \qquad i = 1,\ 2,\ 3,$$

където F_ν са активните сили.

Скоростите на точките от системата и квазискоростите са свързаı със зависимостта

$$v_\nu = \sum_{i=1}^{3} a_{\nu i}\dot{\mu}_i + b_\nu, \qquad (\nu = 1, \dots, N),$$

където N означава броя на точките на системата.

От формулата за разпределение на скоростите на точките в твър, тяло получаваме $v_\nu = v_G + \omega \times \rho_\nu$, откъдето

$$v_\nu = b(\omega \times n^0) + \Omega \times R + \omega \times \rho_\nu, \tag{16}$$

или в проекции върху неподвижните оси :

$$\dot{\xi}_\nu = b(qn_\zeta - rn_\eta) + q\zeta_\nu - r\eta_\nu + [\Omega \times R]_\xi,$$

$$\dot{\eta}_\nu = b(rn_\xi - pn_\zeta) + r\xi_\nu - p\zeta_\nu + [\Omega \times R]_\eta,$$

$$\dot{\zeta}_\nu = b(pn_\eta - qn_\xi) + p\eta_\nu - q\xi_\nu + [\Omega \times R]_\zeta,$$

където n_ξ, n_η, n_ζ са проекциите на единичния външен нормален вект n^0 върху подвижните оси $G\xi\eta\zeta$, ξ_ν, η_ν, ζ_ν и $\dot{\xi}_\nu$, $\dot{\eta}_\nu$, $\dot{\zeta}_\nu$ — съответно прое циите на радиус-вектора на произволна точка от кълбото и на скорост спрямо същите оси.

От (16) следва

$$\dot{\xi}_\nu = 0\dot{\mu}_1 + (bn_\zeta + \zeta_\nu)\dot{\mu}_2 - (bn_\eta + \eta_\nu)\dot{\mu}_3 + [\Omega \times R]_\xi,$$

$$\dot{\eta}_\nu = -(bn_\zeta + \zeta_\nu)\dot{\mu}_1 + 0\dot{\mu}_2 + -(bn_\xi + \xi_\nu)\dot{\mu}_3 + [\Omega \times R]_\eta,$$

$$\dot{\zeta}_\nu = (bn_\eta + \eta_\nu)\dot{\mu}_1 - (bn_\xi + \xi_\nu)\dot{\mu}_2 + 0\dot{\mu}_3 + [\Omega \times R]_\zeta,$$

$$\Omega \times R = [\Omega \times R]_\xi \xi^0 + [\Omega \times R]_\eta \eta^0 + [\Omega \times R]_\zeta \zeta^0.$$

$$v_\nu = \sum_{i=1}^{3} a_{\nu i}\dot{\mu}_i + b_\nu \qquad (\nu = 1, \dots, N),$$

където

$$\begin{aligned} a_{\nu 1} &= -(bn_\zeta + \zeta_\nu)\eta^0 + (bn_\eta + \eta_\nu)\zeta^0, \\ a_{\nu 2} &= (bn_\xi + \xi_\nu)\zeta^0 - (bn_\zeta + \zeta_\nu)\xi^0, \\ a_{\nu 3} &= -(bn_\eta + \eta_\nu)\xi^0 + (bn_\xi + \xi_\nu)\eta^0. \end{aligned} \tag{17}$$

Отчитайки (17) и факта, че G е масов център на кълбото, а единствената активна сила е теглото, получаваме следните стойности за обобщените сили :

$$(18)\qquad \begin{aligned} Q_{\mu_1} &= mgb(n_\zeta a_{32} - n_\eta a_{33}),\\ Q_{\mu_2} &= mgb(n_\xi a_{33} - n_\zeta a_{31}),\\ Q_{\mu_3} &= mgb(n_\eta a_{31} - n_\xi a_{32}). \end{aligned}$$

За определяне на енергията на ускорението S,

$$S = \frac{1}{2}mw_G^2 + \frac{1}{2}(A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2 + C\dot{r}^2) + (C-B)\dot{p}qr + (A-C)\dot{q}rp + (B-A)\dot{r}pq + \dots$$

ще пресметнем ускорението на масовия център:

$$w_G = \frac{d}{dt}[b(\omega \times n^0) + (\Omega \times R)] = b(\dot{\omega} \times n^0 + \omega \times \dot{n}^0) + \Omega \times \dot{R},$$

$$w_G^2 = b^2(\dot{\omega} \times n^0)^2 + 2b^2(\dot{\omega} \times n^0)(\omega \times \dot{n}^0) + 2b(\Omega \times \dot{R})(\dot{\omega} \times n^0) + \dots,$$

където с многоточие са означени членовете, несъдържащи $\dot{\omega}$. Нека имаме представянето

$$R = R_\xi \xi^0 + R_\eta \eta^0 + R_\zeta \zeta^0.$$

Тогава

$$\dot{n}^0 = (\dot{n}_\xi + qn_\zeta - rn_\eta)\xi^0 + (\dot{n}_\eta + rn_\xi - pn_\zeta)\eta^0 + (\dot{n}_\zeta + pn_\eta - qn_\xi)\zeta^0,$$

$$\dot{R} = (\dot{R}_\xi + qR_\zeta - rR_\eta)\xi^0 + (\dot{R}_\eta + rR_\xi - pR_\zeta)\eta^0 + (\dot{R}_\zeta + pR_\eta - qR_\xi)\zeta^0.$$

След преработване на израза за w_G^2 :

$$(\dot{\omega} \times n^0)^2 = [n^0 \times (\dot{\omega} \times n^0)].\omega = (\dot{\omega})^2 - (\dot{\omega}.n^0)^2,$$

$$(\dot{\omega} \times n^0).(\omega \times \dot{n}^0)] = (\dot{R}.n^0).(\Omega.\dot{\omega}) - (\Omega.n^0)(\dot{R}\dot{\omega}),$$

$$\begin{aligned} w_G^2 = b^2[\dot{\omega}^2 - (\dot{\omega}.n^0)^2] - 2b^2(\omega.n^0)(\dot{\omega}.n^0)\\ +2b[(\dot{R}.n^0)(\Omega.\dot{\omega}) - (\Omega.n^0)(\dot{R}.\dot{\omega})] + \dots \end{aligned}$$

от уравненията на Апел в квазикоординати получаваме следните уравнения на движението :

$$(19)\qquad \begin{aligned} &A\dot{p} - (B-C)qr + mb^2\dot{p} - mb^2 n_\xi(\dot{\omega}.n^0) + mb\Omega_\xi(\dot{R}.n^0)\\ &-mb^2(\omega.n^0)(\dot{n}_\xi + qn_\zeta - rn_\eta) - mb(\Omega.n^0)(\dot{R}_\xi + qR_\zeta - rR_\eta)\\ &= mgb(n_\zeta a_{32} - n_\eta a_{33}),\\ &B\dot{q} - (C-A)rp + mb^2\dot{q} - mb^2 n_\eta(\dot{\omega}.n^0) + mb\Omega_\eta(\dot{R}.n^0)\\ &-mb^2(\omega.n^0)(\dot{n}_\eta + rn_\xi - pn_\zeta) - mb(\Omega.n^0)(\dot{R}_\eta + rR_\xi - pR_\zeta) \end{aligned}$$

$$= mgb(n_\xi a_{33} - n_\zeta a_{31}),$$

$$C\dot{r} - (A-B)pq + mb^2\dot{r} - mb^2 n_\zeta(\dot{\omega}.n^0) + mb\Omega_\zeta(\dot{R}.n^0)$$

$$-mb^2(\omega.n^0)(\dot{n}_\zeta + pn_\eta - qn_\xi) - mb(\Omega.n^0)(\dot{R}_\zeta + pR_\eta - qR_\xi)$$

$$= mgb(n_\eta a_{31} - n_\xi a_{32}),$$

където с Ω_ξ, Ω_η, Ω_ζ сме означили проекциите на ъгловата скорост Ω върху подвижните оси.

Към уравненията (19) прибавяме уравненията на нехолономните връзки (15), с което получаваме пет обикновени диференциални уравнения за определяне на петте обобщени координати x_G, y_G, φ, θ, ψ във функция на времето.

III. ТЪРКАЛЯНЕ НА НЕХОМОГЕННО КЪЛБО ВЪРХУ АБСОЛЮТНО ГРАПАВ РАВНОМЕРНО ВЪРТЯЩ СЕ РОТАЦИОНЕН ЕЛИПСОИД

За да получим диференциалните уравнения, описващи движението на нехомогенно кълбо върху ротационен елипсоид, достатъчно е да заместим векторите R и n^0 с техните стойности за конкретната повърхнина. Нека Oz е ос на ротация на елипсоида. Произволна точка от повърхнината му има следния радиус-вектор :

$$R = a\cos\alpha\sin\beta i + a\sin\alpha\sin\beta j + c\cos\beta k, \tag{20}$$

$$a = \text{const}, \qquad c = \text{const}, \qquad a > c > 0, \qquad \alpha \in [0,\ 2\pi], \qquad \beta \in [0,\ \pi],$$

а външният единичен нормален вектор в тази точка има представянето

$$n^0 = a_1\cos\alpha\sin\beta i + a_1\sin\alpha\sin\beta j + c_1\cos\beta k, \tag{21}$$

където

$$\begin{aligned} a_1 &= c(a^2\cos^2\beta + c^2\sin^2\beta)^{-\frac{1}{2}}, \\ c_1 &= a(a^2\cos^2\beta + c^2\sin^2\beta)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{22}$$

За параметри на движението ще изберем гаусовите ъгли α, β и ойлеровите ъгли φ, θ, ψ, изменящи се в границите $0 \leqq \varphi < 2\pi$, $0 \leqq \psi < 2\pi$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$. Използвайки известните съотношения между директорните косинуси, определящи положението на единичните вектори ξ^0, η^0, ζ^0 спрямо i, j, k и проекциите на ъгловата скорост върху подвижните оси, ще получим от (15) и (19) система обикновени диференциални уравнения относно обобщените координати, интегрирането на която в общия случай е много трудно. Ето защо ще се ограничим с разглеждането на частния случай, в който нехомогенното кълбо притежава динамична ос на симетрия и допирната му точка описва “външен” или “вътрешен паралел” върху елипсоида, използувайки метода, развит в [7]. Ще казваме, че допирната точка на кълбото с елипсоида описва съответно “външен” или “вътрешен паралел”, ако е изпълнено условието

$$\beta = \beta_0 = \text{const} \tag{23}$$

и съответно неравенството

$$GH.n^0 < 0 \qquad \text{или} \qquad GH.n^0 > 0. \tag{24}$$

Да разгледаме поотделно двата случая.

Нека допирната точка описва “външен паралел” върху елипсоида. Тогава

$$GH = -bn^0 \qquad \text{и} \qquad GH.n^0 < 0. \tag{25}$$

В проекции на неподвижните оси нехолономните връзки (15) имат вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_G &= b(\omega_y c_1 \cos\beta_0 - \omega_z a_1 \sin\alpha\sin\beta_0) - \Omega a \sin\alpha\sin\beta_0, \\ \dot{y}_G &= b(\omega_z a_1 \cos\alpha\sin\beta_0 - \omega_x c_1 \cos\beta_0) - \Omega a \cos\alpha\sin\beta_0, \\ \dot{z}_G &= b(\omega_x a_1 \sin\alpha\sin\beta_0 - \omega_y a_1 \cos\alpha\sin\beta_0), \end{aligned} \tag{26}$$

където $\Omega = |\Omega|$ и ω_x, ω_y и ω_z определяме от (5).

От $r_G = R + bn^0$, или в проекции на неподвижните оси:

$$\begin{aligned} x_G &= (a + ba_1)\cos\alpha\sin\beta_0, \\ y_G &= (a + ba_1)\sin\alpha\sin\beta_0, \\ z_G &= (c + bc_1)\cos\beta_0, \end{aligned} \tag{27}$$

откъдето получаваме

$$\begin{aligned} \dot{x}_G &= -\dot{\alpha}(a + ba_1)\sin\alpha\sin\beta_0, \\ \dot{y}_G &= \dot{\alpha}(a + ba_1)\cos\alpha\sin\beta_0, \\ \dot{z}_G &= 0. \end{aligned} \tag{28}$$

От (26), (27) и (28) следва уравнението

$$a_1\dot{\theta}\sin\beta_0\sin(\alpha - \psi) + a_1\dot{\varphi}\sin\beta_0\sin\theta\cos(\alpha - \psi) = 0,$$

което има частно решение

$$\theta = \theta_0 = \text{const}, \qquad \alpha = \psi + \frac{\pi}{2}. \tag{29}$$

Уравненията (26) с отчитане на (27), (28) и (29) водят до зависимостта

$$\dot\psi = \lambda\dot\varphi + \Omega, \tag{30}$$

където

$$\lambda = \frac{b}{a\sin\beta_0}(a_1\cos\theta_0\sin\beta_0 + c_1\sin\theta_0\cos\beta_0),$$

като сме изключили случаите $\beta_0 = 0$ и $\beta_0 = \pi$.

Допускането (23) позволява намирането на пръв интеграл за системата (19), който в този случай има вида

$$Apa_{31} + Bqa_{32} + Cra_{33} + a_1^2b^2\dot\alpha^2\sin^2\beta_0 = c_1, \tag{31}$$

където

$$\begin{aligned} a_{31} &= \sin\varphi\sin\theta, \\ a_{32} &= \cos\varphi\sin\theta, \\ a_{33} &= \cos\theta, \end{aligned} \tag{32}$$

и p, q, r намираме от (4).

Замествайки a_{31}, a_{32}, a_{33} от (32) и p, q, r от (4) в (31) и отчитайки (29) и (30), като допуснем още, че кълбото има динамична ос на симетрия оста $O\zeta$, т.е. е изпълнено равенството $A = B$, стигаме до заключението, че

$$\dot\varphi = \dot\varphi_0 = \text{const}. \tag{33}$$

Получените изрази за обобщените координати е необходимо да удовлетворяват уравненията (19). Последното от тях се изпълнява тъждествено за намереното решение, а всяко едно от първите две се свежда до квадратно уравнение относно $\dot\varphi_0$:

$$L\dot\varphi_0^2 + Q\dot\varphi_0 + W = 0, \tag{34}$$

където

$$L = \lambda^2(C - A)\sin\theta_0\cos\theta_0 + \lambda\Phi, \tag{35}$$

$$Q = \Omega[2\lambda(C - A)\sin\theta_0\cos\theta_0 + mb\lambda c_1(a + ba_1)\sin\beta_0\cos\beta_0 + \Phi],$$

$$W = \Omega^2[(C - A)\sin\theta_0\cos\theta_0 + mbc_1(a + ba_1)\sin\beta_0\cos\beta_0]$$
$$+ mgba_1\sin\beta_0,$$

$$\Phi = C\sin\theta_0 + mb^2\sin\theta_0 + mb^2\lambda c_1a_1\sin\beta_0\cos\beta_0$$
$$+ mb^2a_1\sin\beta_0(c_1\cos\beta_0\cos\theta_0 - a_1\sin\beta_0\sin\theta_0).$$

Необходимо и достатъчно условие (34) да има реално решение е

$$Q^2 - 4LW \geqq 0, \tag{36}$$

което поради (35) ще има вида

$$\Omega^2[mb\lambda c_1(a + ba_1)\sin\beta_0\cos\beta_0 - \Phi]^2 \geqq (4mgba_1\sin\beta_0)L.$$

Следователно, ако горното неравенство е изпълнено, системата (15), (19) допуска следното частно решение :

$$\begin{aligned} \alpha &= \psi + \frac{\pi}{2}, \qquad \beta = \beta_0 = \text{const}, \\ \varphi &= \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0, \\ \psi &= (\lambda\dot{\varphi}_0 + \Omega)t + \psi_0, \\ \theta &= \theta_0 = \text{const}, \end{aligned} \tag{37}$$

където φ_0 и ψ_0 са начални условия, а $\dot{\varphi}_0$ се определя по формулата

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{-Q \pm (Q^2 - 4LW)^{\frac{1}{2}}}{2L} \qquad (L \neq 0). \tag{38}$$

При движение на кълбото по външната стена на елипсоида нормалната реакция в допирната точка ще съвпада с посоката на външната нормала в тази точка, което означава, че кълбото оказва натиск върху повърхнината. За да намерим нормалната реакция, ще приложим теоремата за изменението на количеството на движение, която в нашия случай има вида

$$m\frac{dv_G}{dt} = -mgk + N, \tag{39}$$

където с N сме означили реакцията на връзката в допирната точка. Ще изискваме

$$N.n^0 > 0. \tag{40}$$

Умножавайки скаларно двете страни на (39) с n^0 и отчитайки (40), стигаме до неравенството

$$\dot{v}_G.n^0 < mgc_1\cos\beta,$$

което поради (23) се свежда до

$$\dot{\alpha}^2 < \frac{c_1 g\cos\beta_0}{a_1(a + ba_1)\sin^2\beta_0}, \tag{41}$$

откъдето следва, че $0 < \beta_0 < \frac{\pi}{2}$. От (41) и (30) получаваме

$$(\lambda\dot{\varphi}_0 + \Omega)^2 < \Gamma^2,$$

където сме означили

$$\Gamma = \left[\frac{c_1 g \cos\beta_0}{a_1(ba_1 + a)\sin^2\beta_0}\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad \Gamma > 0.$$

Оттук следват неравенствата

$$-(\Gamma + \Omega) < \lambda\dot{\varphi}_0 < \Gamma - \Omega,$$

или

(42)
$$-\frac{\varepsilon\Gamma + \Omega}{\lambda} < \dot{\varphi}_0 < \frac{\varepsilon\Gamma - \Omega}{\lambda},$$

като предполагаме, че $\lambda \neq 0$,

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \lambda > 0, \\ -1, & \lambda < 0. \end{cases}$$

От (42) следва, че поне един от корените на (34) е необходимо да принадлежи на интервала

$$\left(-\frac{\varepsilon\Gamma + \Omega}{\lambda}, \frac{\varepsilon\Gamma - \Omega}{\lambda}\right),$$

необходимо и достатъчно условие за което е изпълнението на следните системи неравенства :

(43)
$$Q^2 - 4LW > 0,$$

$$L\left[L\left(-\frac{\varepsilon\Gamma + \Omega}{\lambda}\right)^2 + Q\left(-\frac{\varepsilon\Gamma + \Omega}{\lambda}\right) + W\right] > 0,$$

$$L\left[L\left(\frac{\varepsilon\Gamma - \Omega}{\lambda}\right)^2 + Q\left(\frac{\varepsilon\Gamma - \Omega}{\lambda}\right) + W\right] < 0,$$

или

(44)
$$Q^2 - 4LW > 0,$$

$$L\left[L\left(-\frac{\varepsilon\Gamma + \Omega}{\lambda}\right)^2 + Q\left(-\frac{\varepsilon\Gamma + \Omega}{\lambda}\right) + W\right] < 0,$$

$$L\left[L\left(\frac{\varepsilon\Gamma - \Omega}{\lambda}\right)^2 + Q\left(\frac{\varepsilon\Gamma - \Omega}{\lambda}\right) + W\right] > 0,$$

или условието (36) заедно с

$$(45)\qquad L\left[L\left(-\frac{\varepsilon\Gamma+\Omega}{\lambda}\right)^2+Q\left(-\frac{\varepsilon\Gamma+\Omega}{\lambda}\right)+W\right]>0,$$

$$L\left[L\left(\frac{\varepsilon\Gamma-\Omega}{\lambda}\right)^2+Q\left(\frac{\varepsilon\Gamma-\Omega}{\lambda}\right)+W\right]>0,$$

$$-\frac{\varepsilon\Gamma+\Omega}{\lambda}<\frac{-Q}{2L}<\frac{\varepsilon\Gamma-\Omega}{\lambda}.$$

И така, показахме, че достатъчно условие нехомогенно кълбо, притежаващо динамична ос на симетрия, да се търкаля върху абсолютно грапав равномерно въртящ се ротационен елипсоид така, че допирната му точка да описва "външен паралел" за елипсоида, е обобщените координати да удовлетворяват съотношенията (37) и (38) при съблюдаване на системите неравенства (43) или (44), или (36) наред с (45).

Винаги можем да предполагаме, че

$$\lambda\neq 0,\quad L\neq 0,\quad mb\lambda c_1(a+ba_1)\sin\beta_0\cos\beta_0-\varphi=c\sin\theta_0\neq 0$$

поради свободата, която имаме при избора на ъгъла θ.

От формулата за λ следва, че

$$\lambda=0\Leftrightarrow \mathrm{tg}\theta_0=-\frac{c}{a}\mathrm{tg}\beta_0,\qquad \theta_0\neq\frac{\pi}{2}.$$

Тогава ще имаме $L=0$, а условието (41) се свежда до $\Omega^2<\Gamma^2$.

Ще се спрем накратко и на случая на търкаляне на нехомогенно кълбо по вътрешната стена на абсолютно грапав равномерно въртящ се ротационен елипсоид.

В този случай е изпълнено неравенството

$$(46)\qquad GH.n^0>0$$

наред с необходимото условие

$$(47)\qquad b<\frac{c^2}{a}.$$

Уравненията на нехолономните връзки имат следното векторно записване:

$$(48)\qquad v_G=-b(\omega\times n^0)+\Omega\times R,$$

което води до промяна във вида на уравненията (19), които в този случай са:

$$(49)\qquad A\dot p-(B-C)qr+mb^2\dot p-mb^2n_\xi(\dot\omega.n^0)-mb\Omega_\xi(\dot R.n^0)$$

$$-mb^2(\omega.n^0)(\dot{n}_\xi + qn_\zeta - rn_\eta) + mb(\Omega.n^0)(\dot{R}_\xi + qR_\zeta - rR_\eta)$$
$$= mgb(a_{33}n_\eta - a_{32}n_\zeta),$$
$$B\dot{q} - (C - A)rp + mb^2\dot{q} - mb^2n_\eta(\dot{\omega}.n^0) - mb\Omega_\eta(\dot{R}.n^0)$$
$$-mb^2(\omega.n^0)(\dot{n}_\eta + rn_\xi - pn_\zeta) + mb(\Omega.n^0)(\dot{R}_\eta + rR_\xi - pR_\zeta)$$
$$= mgb(a_{31}n_\zeta - a_{33}n_\xi),$$
$$C\dot{r} - (A - B)pq + mb^2\dot{r} - mb^2n_\zeta(\dot{\omega}.n^0) - mb\Omega_\zeta(\dot{R}.n^0)$$
$$-mb^2(\omega.n^0)(\dot{n}_\zeta + pn_\eta - qn_\xi) + mb(\Omega.n^0)(\dot{R}_\zeta + pR_\eta - qR_\xi)$$
$$= mgb(a_{32}n_\xi - a_{31}n_\eta).$$

По определение, ако са налице условията (23), (46) и (47), ще казваме, че допирната точка на кълбото с елипсоида описва "вътрешен паралел" върху него. С разсъждения, аналогични на тези от предишния случай, стигаме до следното частно решение на уравненията (48) и (49) при условията (23), (46), (47) и ограничението $A = B$:

(50)
$$\alpha = \psi + \frac{\pi}{2}, \qquad \beta = \beta_0 = \mathrm{const},$$
$$\varphi = \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0, \qquad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = \mathrm{const},$$
$$\psi = (\lambda_1\dot{\varphi}_0 + \Omega)t + \psi_0,$$
$$\theta = \theta_0 = \mathrm{const},$$

където φ_0 и ψ_0 са началните условия, $\lambda_1 = -\lambda$, а $\dot{\varphi}_0$ се определя от квадратното уравнение
$$L_1\dot{\varphi}_0^2 + Q_1\dot{\varphi}_0 + W_1 = 0,$$
където
$$L_1 = \lambda_1^2(C - A)\sin\theta_0\cos\theta_0 + \lambda_1\Phi_1,$$
$$Q_1 = \Omega[2\lambda_1(C - A)\sin\theta_0\cos\theta_0 - mb\lambda_1c_1(a - ba_1)\sin\beta_0\cos\beta_0 + \Phi_1],$$
$$W_1 = \Omega^2[(C - A)\sin\theta_0\cos\theta_0 - mbc_1(a - ba_1)\sin\beta_0\cos\beta_0]$$
$$-mgba_1\sin\beta_0,$$
$$\Phi_1 = C\sin\theta_0 + mb^2\sin\theta_0 + mb^2\lambda_1c_1a_1\sin\beta_0\cos\beta_0$$
$$+mb^2a_1\sin\beta_0(c_1\cos\theta_0\cos\beta_0 - a_1\sin\beta_0\sin\theta_0),$$
като предполагаме, че $Q_1^2 - 4L_1W_1 \geqq 0$.

Изискването кълбото да оказва натиск върху вътрешната стена на елипсоида, когато са изпълнени (23) и (47), се дава с неравенството

(51)
$$\dot{\alpha}^2 > \frac{gc_1\cos\beta_0}{a_1(a - ba_1)\sin^2\beta_0},$$

като сме изключили случаите $\beta_0 = 0$ и $\beta_0 = \pi$.

Поради условието (51) е удобно да изберем θ_0 съобразно (45). Тогава $\lambda_1 = 0$ и (50) приема вида

$$\alpha = \psi + \frac{\pi}{2}, \quad \beta = \beta_0, \quad \varphi = \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0, \quad \psi = \Omega t + \psi_0, \quad \theta = \theta_0, \tag{52}$$

като $\dot{\varphi}_0$ се определя по формулата (знаменателя считаме различен от нула)

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{mgba_1 \sin\beta_0 - \Omega^2[(C-A)\sin\theta_0\cos\theta_0 - mbc_1(a - ba_1)\sin\beta_0\cos\beta_0]}{\Omega[C\sin\theta_0 + mb^2\sin\theta_0 + mb^2 a_1 \sin\beta_0(c_1\cos\theta_0\cos\beta_0 - a_1\sin\theta_0\sin\beta_0)]} \tag{53}$$

а неравенството (51) се свежда до

$$\Omega^2 > \frac{gc_1\cos\beta_0}{a_1(a + ba_1)\sin^2\beta_0}. \tag{54}$$

При $\beta_0 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ горното неравенство се удовлетворява автоматично, а за $\beta_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ — при достатъчно голяма по абсолютна стойност ъглова скорост Ω.

И така, за да може да се осъществи търкаляне без хлъзгане на нехомогенно кълбо, притежаващо динамична ос на симетрия, върху равномерно въртящ се ротационен елипсоид така, че допирната им точка да описва "вътрешен паралел" върху елипсоида, е достатъчно обобщените координати да удовлетворяват съотношенията (52) и (53), а ъгловата скорост на елипсоида да удовлетворява неравенството (54).

IV. ДВИЖЕНИЕ НА ХОМОГЕННО КЪЛБО ВЪРХУ ВЪРТЯЩА СЕ РАВНИНА

Нека равнината Oxy се върти с постоянна ъглова скорост Ω около оста Oz, а кълбото е хомогенно. Да намерим уравненията на движение. Условието за търкаляне без хлъзгане ще има вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_G - b\omega_y + \Omega y_G = 0, \\ \dot{y}_G + b\omega_x + \Omega x_G = 0. \end{aligned} \tag{55}$$

От

$$S = \frac{1}{2}m(\ddot{x}_G^2 + \ddot{y}_G^2) + \frac{1}{2}A(\dot{p}^2 + \dot{q}^2 + \dot{r}^2)$$

и

$$\ddot{x}_G = b\dot{\omega}_y - \Omega(\Omega x_G - b\omega_x),$$

$$\ddot{y}_G = -b\dot{\omega}_x + \Omega(b\omega_y - \Omega y_G)$$

за енергията на ускорението S получаваме

$$S = \frac{1}{2}m\{b^2(\dot{\omega}_x^2 + \dot{\omega}_y^2) + 2b\Omega[\dot{\omega}_x(\Omega y_G - b\omega_y)$$

$$-\dot{\omega}_y(\Omega x_G - b\omega_x)]\} + \frac{1}{2}A(\dot{\omega}_x^2 + \dot{\omega}_y^2 + \dot{\omega}_z^2),$$

откъдето уравненията на Апел ще имат вида

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\psi}} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial \ddot{\varphi}} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial \ddot{\psi}} = 0, \quad \text{или} \quad A\dot{\omega}_z = 0,$$

(56)
$$\{(mb^2 + A)(\dot{\omega}_x \sin\psi - \dot{\omega}_y \cos\psi) + mb\Omega[\sin\psi(\Omega y_G - b\omega_y)$$

$$+ \cos\psi(\Omega x_G - b\omega_x)]\}\sin\theta = 0,$$

$$\{(mb^2 + A)(\dot{\omega}_x \cos\psi + \dot{\omega}_y \sin\psi) + mb\Omega[\cos\psi(\Omega y_G - b\omega_y)$$

$$- \sin\psi(\Omega x_G - b\omega_x)]\} = 0.$$

Нека $\theta \neq 0$. След известни преобразувания от (56) ще получим уравненията

(57)
$$(mb^2 + A)\dot{\omega}_x + mb\Omega(\Omega y_G - b\omega_y) = 0,$$

$$(mb^2 + A)\dot{\omega}_x - mb\Omega(\Omega x_G - b\omega_x) = 0,$$

$$\dot{\omega}_z = 0.$$

От (55) и (57) намираме

$$(mb^2 + A)\omega_x - mb\Omega x_G = C_1,$$
$$(mb^2 + A)\omega_y - mb\Omega y_G = C_2,$$

където C_1 и C_2 са интеграционни константи. Означаваме с $m' = \dfrac{mb\Omega}{mb^2 + A}$. Тогава

$$\omega_x - m'x_G = C_1', \qquad \omega_y - m'y_G = C_2',$$

където

$$C_1' = \frac{C_1}{mb^2 + A}, \qquad C_2' = \frac{C_2}{mb^2 + A}.$$

Заместваме в (55) и получаваме следните уравнения за определяне на x_G и y_G :

(58)
$$\dot{x}_G - (\Omega - mb)y_G = C_2'b,$$

$$\dot{y}_G - (\Omega - mb)\dot{x}_G = -C_1'b,$$

$$\ddot{x}_G + (\Omega - mb)^2 x_G = C_3,$$

$$\ddot{y}_G + (\Omega - mb)^2 y_G = C_4.$$

От (58) се вижда, че върху грапава въртяща се равнина тежко кълбо описва в общия случай елипса, параметрите на която зависят от началните условия.

В по-общия случай, когато Ω е зададена функция на времето от клас C^1, а на кълбото действуват външни сили, имащи резултанта $F(F_x,\ F_y,\ F_z)$ през центъра на кълбото и двоица $M(M_x,\ M_y,\ M_z)$, от (55) намираме

$$\ddot{x}_G = b\omega_y - \Omega(\Omega x_G - b\omega_x) - \dot{\Omega} y_G,$$

$$\ddot{y}_G = -b\omega_x + \Omega(b\omega_y - \Omega y_G) + \dot{\Omega} x_G.$$

След несложни пресмятания уравненията на движение в този случай получаваме във вида

$$m\ddot{x}_G + \frac{A}{b^2}(\ddot{x}_G + \Omega\ddot{y}_G + \dot{\Omega} y_G) = F_x + \frac{M_y}{b},$$

$$m\ddot{y}_G + \frac{A}{b^2}(\ddot{y}_G - \Omega\ddot{x}_G - \dot{\Omega} x_G) = F_y + \frac{M_x}{b},$$

$$m\dot{\omega}_z = M_z.$$

Задачата за движение на тежко хомогенно кълбо, търкалящо се без хлъзгане върху грапава хоризонтална или наклонена равнина, въртяща се с постоянна ъглова скорост, за първи път е изследвана от Wltner и Л. А. Парс [11]. През 1983 г. Н. А. Фуфаев, а малко по-късно М. А. Abdelkager [13] разглеждат същата задача, отчитайки и силите на триене при търкаляне и вискозитета на средата, при което се установява, че силите на вязко триене довеждат кълбото до състояние на покой, а съпротивителните сили при търкаляне — до движение по развиваща се спирала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бобылев, Д. К. О шаре с жироскопом внутри.— В: Математический сборник. Т. XVI, М., 1892.
2. Жуковский, Н. Е. О гироскопическом шаре Бобылева. — В: Труды Отделения Физ. наук Общества любителей естествознания. Т. VI, 1894.
3. Чаплигин, С. А. Собрание сочинений, Москва – Ленинград, 1948.
4. Воронец, Н. В. Уравнения движения твердого тела, катящегося без скольжения по горизонтальной плоскости. — В: Собрание сочинений, Киев, 1903.
5. Харламова, Е. И. ПММ. Т.XXII, 1958.
6. Аппель, П. Теоретическая механика. Т.1, 2, М., Физматгиз, 1960.
7. Диамандиев, В. Год. Соф. унив., Фак. мат. и мех., 72, 1978.
8. Неймарк, Ф. И., И. А. Фуфаев. Динамика неголономных систем. М., 1967.

9. Д о б р о н р а в о в, В. В. Основы механики неголономных систем. М., 1970.
10. Г а н т м а х е р, Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М., 1966.
11. П а р с, Л. А. Аналитическая динамика. М., Наука, 1971, с. 635.
12. Ф у ф а е в, Н. А. ПММ.Т.47, вып. 1, 1983.
13. A b d e l k a g e r, M. A. — ZAMM, 66, 1986, 11, 563–564.

Поступила 29.03.1989 г.