ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 2 — Механика
Том 82, 1988

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA "ST. KLIMENT OHRIDSKI"
FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 2 — Mécanique
Tome 82, 1988

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ РАДИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА II. НЕЦЕЛЫЕ ОРБИТАЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ

ЙОРДАН МИШЕВ

Йордан Мишев. ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ РАДИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА II. НЕЦЕЛЫЕ ОРБИТАЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ

Получены формулы разложения по произведениям решений двух радиальных уравнений Шредингера с нецелым моментом $l \geqq -1/2$. Рассмотрен случай, когда $x = 0$ — граничная точка и граничная окружность. Результаты являются обобщением ранеé полученных при $l = 0$ и при $l = 1, 2, 3, \ldots$

Jordan Mishev. ON INVERSE PROBLEM IN QUANTUM SCATTERING THEORY FOR RADIAL SCHRÖDINGER EQUATION II. NONINTEGRAL ORBITAL MOMENTUM

Some expansions over products of solutions of two radial Schrödinger equations with nonintegral momentum $l \geqq -1/2$ are obtained. The limit point and limit circle cases for $x = 0$ are considered. The results are generalisation of previously obtained for the cases $l = 0$ and $l = 1, 2, 3$, etc.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрены формулы разложения по произведениям решений (ФРП) двух сингулярных уравнений Штурма — Лиувилля

$$(1)\qquad \frac{d^2}{dx^2}y_n + \left\{k^2 - \left[\frac{l(l+1)}{x^2} + v_n(x)\right]\right\} y_n = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad n = 1,\ 2.$$

Предполагаем, что потенциал $v_n(x)$ — вещественная функция, удовлетворяющая условию

$$\|v_n\|_{X_1} \equiv \int\limits_0^\infty (1+x)|v_n(x)|dx < \infty,$$

а параметр l — вещественная константа, $l \in \left[-\frac{1}{2},\ \infty\right)$.

Как приложение полученных ФРП доказаны теоремы единственности Марченко в соответствующих обратных задачах рассеяния.

При $l = 0,\ 1,\ 2, \ldots$ уравнение (1) называется радиальным уравнением Шредингера (РУШ) и получается, когда потенциал взаимодействия стационарен и сферически симметричен [1, с. 23]. Название РУШ сохраним для (1) и при нецелых l.

Уравнение (1) можно толковать как сингулярную задачу на собственых значениях со спектральным параметром $\lambda = k^2$. Оказывается, что по терминологии Вейля [2, с. 240] $x = \infty$ всегда граничная точка, а $x = 0$ является граничной окружностью при $l \in \left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ и граничной точкой при $l \in \left[\frac{1}{2},\ \infty\right)$.

В п. 2 изучены некоторые решения (1) и граничное условие в $x = 0$. Основным моментом является определение фундаментальной системы решений $g_n(x,\ k)$, $h_n(x,\ k)$, составленной из целых, четных функций переменной k, аналоги решениям при $v_n(x) \equiv 0$

$$(2)\qquad g_0(x,\ k) = \frac{1}{k^{l+1}}\sqrt{\frac{\pi k x}{2}} J_{(l+\frac{1}{2})}(kx), \qquad l \in \left[-\frac{1}{2},\ \infty\right),$$

$$(3)\qquad h_0(x,\ k) = \begin{cases} \dfrac{k^l}{\cos l\pi}\sqrt{\frac{\pi k x}{2}} J_{-(l+\frac{1}{2})}(kx), & l \in \left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) \\ -\sqrt{\dfrac{\pi x}{2}} N_0(kx) + \left[\frac{2}{\pi}\ln k\right]\sqrt{\dfrac{\pi x}{2}} J_0(kx), & l = -\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

$$W(h_0(x,\ k),\ g_0(x,\ k)) = 1 \qquad (W(f,\ g) = fg' - f'g).$$

Трудность состоит в том, что $g_n(x,\ k)$ можно найти однозначно, но $h_n(x,\ k)$ не определяется однозначно из условия $W(h_n,\ g_n) = 1$ и нужно избавиться от примесей функции g_n . При $l \in \left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, $l \neq 0$ дополнительную трудность создает факт, что в общем случае $k = 0$ есть точка ветвления для решения уравнений (1). Иллюстрируем ситуацию при $v_n(x) \equiv 0$. Рассмотрим решение

$$\tilde{h}_0(x,\ k) = ik^l \sqrt{\frac{\pi k x}{2}} H^1_{l+\frac{1}{2}}(kx).$$

Выполнено условие $W(\tilde{h}_0,\ g_0) = 1$, но из представления

$$\tilde{h}_0(x,\ k) = \begin{cases} h_0(x,\ k) + \left[\dfrac{i(-1)^l k^{2l+1}}{\cos l\pi}\right] g_0(x,\ k), & l \in \left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right),\ l \neq 0 \\ h_0(x,\ k) + \left[i - \dfrac{2}{\pi}\ln k\right] g_0(x,\ k), & l = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{4}$$

ясно, что $k = 0$ — точка ветвления и это связано с множителем k^{2l+1} при $l \in \left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, $l \neq 0$ и $\ln k$ при $l = -\frac{1}{2}$.

Результаты п. 2 являются обобщением при $v_n(x) \neq 0$ этих из [12, с. 94] относительно граничного условия в $x = 0$ при $l \in \left[\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$. Так, при $v_n(x) \equiv 0$ после замены констант можно получить формулы 4.11.4 и 4.11.6 из [12].

В п.3 получены два вида ФРП соответственно при вронскианских и при нулевых граничных условиях в $x = 0$. Обозначим эти формулы соответственно ФРП$(l,\ v_1,\ \alpha_1,\ v_2,\ \alpha_2)$, $l \in \left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ и ФРП$(l,\ v_1,\ \infty,\ v_2,\ \infty)$, $l \in \left[-\frac{1}{2},\ \infty\right)$. Отметим, что при $l \in \left[\frac{1}{2},\ \infty\right)$ нулевое граничное условие выделяет решения уравнение (1), которые квадратично интегрируемы в окрестности $x = 0$.

При $l = 0$ ФРП$(0,\ v_1,\ \infty,\ v_2,\ \infty)$ получены в [9], а ФРП$(0,\ v_1,\ \alpha_1,\ v_2,\ \alpha_2)$ получены в [13]. При целых $l = 1,\ 2, \ldots$ ФРП$(l,\ v_1,\ \infty,\ v_2,\ \infty)$ получены в [11]. Настоящая работа отличается от цитируемых тем, что здесь работаем в полной общности Ойлеровой Г функций и Беселевых функций неполуцелого порядка. При целых l работы со специальными функциями можно избежать, как это показано в [9], используя преобразование Крамма — Крейна.

В п. 4 рассмотрено одно приложение полученных в п. 3 ФРП. Доказаны теоремы единственности Марченко в обратной задаче рассеяния для РУШ с нецелым моментом. Более особый момент в этой работе — необходимость в расширении пространств, с которыми работаем в случае вронскианских граничных условий. Это связано с фактом, что граничная задача в случае определяется потенциалом $v_n(x)$ в РУШ и константой

$\alpha_n \in R^1$ в граничном условии. Подобная процедура в крайнем интервале проведена в [10].

2. ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ В НУЛЕ

2.1. Вначале изучим некоторые решения уравнения (1). При $v_n(x) \equiv 0$, кроме функций g_0 и h_0 из (2) и (3), рассмотрим еще решение

$$f_0(x,\ k) = i^{l+1}\sqrt{\frac{\pi k x}{2}} H^1_{(l+\frac{1}{2})}(kx), \qquad l \in \left[-\frac{1}{2}, \infty\right).$$

Функции g_0, h_0 и f_0 характерны асимптотическим поведением

$$(5)\quad g_0(x,\ k) = a_1 x^{l+1}\left[1 + O(x^2)\right], \quad x \to 0, \qquad l \in \left[-\frac{1}{2},\ \infty\right),$$

$$(6)\quad h_0(x,\ k) = \begin{cases} b_1 x^{-l}[1 + O(x^2)], & x \to 0, \quad l \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ c_1\sqrt{x}\ln x[1 + O(x^2)], & x \to 0, \quad l = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$(7)\quad f_0(x,\ k) = e^{ikx}[1 + O(x^{-1})], \quad x \to \infty, \quad \operatorname{Im} k \geqq 0, \quad l \in \left[-\frac{1}{2},\ \infty\right),$$

где константы

$$a_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{l+1}\Gamma(l+\frac{3}{2})}, \qquad b_1 = \frac{2^l\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}, \qquad c_1 = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$

зависят только от l.

Функции g_0 и h_0 — целые, четные функции от k. При $l \in \left(-\frac{1}{2},\ \infty\right)$ функция $f_0(x,\ k)$ аналитична при $\operatorname{Im}k > 0$, а произведение $k^l f_0$ непрерывно при $\operatorname{Im}k \geqq 0$. При $l = 0$ точки $k = 0$ не является особой для f_0; при $l = 1,\ 2,\ 3, \ldots$ $k = 0$ полюс порядка l; при $l \in \left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, $l \neq 0$, $k = 0$ является точкой ветвления для f_0 . При $l = -\frac{1}{2}$ функция $k^l f_0$ имеет особенность вида $\ln k$, при $k = 0$ и $k = 0$ является точкой ветвления.

При $|k| \to \infty$, $\operatorname{Im} k \geqq 0$ справедливы асимптотики [7, с. 785]

$$(8)\qquad g_0(x,\ k) = \frac{1}{k^{l+1}}\sin\left(kx - \frac{l\pi}{2}\right) + O\left(\frac{e^{\operatorname{Im}kx}}{|k|^{l+2}}\right), \quad l \in \left[-\frac{1}{2}, \infty\right),$$

$$(9)\ h_0(x,\ k) = \frac{k^l}{\cos l\pi}\cos\left(kx+\frac{l\pi}{2}\right)+O\left(|k|^{l-1}e^{\mathrm{Im}kx}\right),\quad l\in\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),$$

$$(10)\ h_0(x,\ k) = k^{-\frac{1}{2}}\left[\cos\left(kx+\frac{\pi}{4}\right)+\left(\frac{2}{\pi}\ln k\right)\cos\left(kx-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$+\ O\left(|k|^{-\frac{3}{2}}\ln|k|e^{\mathrm{Im}kx}\right)+O\left(|k|^{-\frac{3}{2}}e^{\mathrm{Im}kx}\right),\quad l=-\frac{1}{2},$$

$$(11)\ f_0(x,\ k) = e^{ikx}+O\left(\frac{e^{-\mathrm{Im}kx}}{|k|}\right),\quad l\in\left[-\frac{1}{2},\ \infty\right).$$

При $v_n(x)\not\equiv 0$ определим решения g_n, h_n и F_n так, чтобы они имели асимптотическое поведение (5), (6) и (7). Дефинируем как обычно решение Йоста f_n [3, p. 14; 1, с. 35] и решение g_n [3, p. 21; 1, с. 34]. Справедливы следующие:

Л е м м а 2.1. Функция f_n аналитична при $\mathrm{Im}k>0$ и непрерывна при $\mathrm{Im}k\geqq 0$, за исключением точки $k=0$, где непрерывно произведение k^lf_n при $l\in(-\frac{1}{2},\ \infty)$. При $l=-\frac{1}{2}$, k^lf_n имеет особенность вида $\ln k$ в $k=0$. Справедливы оценка

$$|f_n(x,\ k)|\leqq \mathrm{const}\left(\frac{|k|x}{1+|k|x}\right)^{-|l|}e^{-\mathrm{Im}kx}$$

и асимптотики

$$(12)\quad \begin{aligned} &f_n(x,\ k)=e^{ikx}[1+o(1)], && x\to\infty\\ &f_n(x,\ k)=e^{ikx}+O\left(\frac{e^{-\mathrm{Im}kx}}{|k|}\right), && |k|\to\infty,\quad \mathrm{Im}\ k\geqq 0.\end{aligned}$$

Л е м м а 2.2. Функция g_n целая, четная функция от k. Справедливы оценка

$$|g_n(x,\ k)|\leqq \mathrm{const}\left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{l+1}e^{\mathrm{Im}kx}$$

и асимптотики

$$(13)\quad \begin{aligned} &g_n(x,\ k)=a_1x^{l+1}[1+O(x)], && x\to 0\\ &g_n(x,\ k)=\frac{\sin\left(kx-\frac{l\pi}{2}\right)}{k^{l+1}}+O\left(\frac{e^{\mathrm{Im}kx}}{|k|^{l+2}}\right), && |k|\to\infty,\quad \mathrm{Im}\ k\geqq 0.\end{aligned}$$

Аналогично случаю $l=0$ [8, с. 16] определим h_n для достаточно малых $x: 0<x\leqq\varepsilon$ как решение интегрального уравнения

$$(14)\qquad h_n(x,\ k)=h_0(x,\ k)-h_0(x,\ k)\int_0^x g_0(t,\ k)v_n(t)h_n(t,\ k)dt$$

$$-g_0(x,\ k)\int\limits_x^\varepsilon h_0(t,\ k)v_n(t)h_n(t,\ k)dt.$$

После этого додефинируем h_n при $\varepsilon \leqq x < \infty$ с помощью значении $h_n(\varepsilon,\ k)$ и $h_n'(\varepsilon,\ k)$. Для $\operatorname{Im} k \geqq 0$ имеем

$$|h_0(x,\ k)| \leqq C_1\left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{-|l|}e^{\operatorname{Im} kx},$$

$$|g_0(x,\ k)| \leqq C_2\left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{l+1}e^{\operatorname{Im} kx}.$$

Пусть $|k| \leqq N$. Выбираем $\varepsilon > 0$ так, чтобы

$$q_n \equiv C_1C_2\exp(2N\varepsilon)N^{-1}\int\limits_0^\varepsilon |v_n(x)|dx < 1. \tag{15}$$

Это возможно, потому что $v_n \in X_1$. Справедлива следующая

Л е м м а 2.3. При $0 < x \leqq \varepsilon$ уравнение (14) имеет решение $h_n(x,\ k)$ которое целая, четная функция от k . Справедливы оценка

$$|h_n(x,\ k)| \leqq \mathrm{const}\left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{-|l|}e^{\operatorname{Im} kx} \tag{16}$$

и асимптотики при $x \to 0$

$$\left|\begin{array}{ll} h_n(x,\ k) = b_1x^{-l}[1+O(x)], & l \in \left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right), \\ h_n(x,\ k) = c_1\sqrt{x}\ln x[1+O(x)], & l = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \tag{17}$$

и при $|k| \to \infty$, $\operatorname{Im} k \geqq 0$

$$\left|\begin{array}{l} h_n(x,\ k) = \dfrac{k^l}{\cos l\pi}\cos(kx+\dfrac{l\pi}{2}) + O(|k|^{l-1}e^{\operatorname{Im} kx}), \quad l \in \left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right), \\ h_n(x,\ k) = k^{-\frac{1}{2}}\left[\cos(kx+\dfrac{\pi}{4}) + (\dfrac{2}{\pi}\ln k)\cos(kx-\dfrac{\pi}{4})\right] \\ \quad +O\left(|k|^{-\frac{3}{2}}\ln|k|e^{\operatorname{Im} kx}\right) + O\left(|k|^{-\frac{3}{2}}e^{\operatorname{Im} kx}\right), \quad l = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right. \tag{18}$$

Доказательство. При ε, определенном в (15), решаем (14) методо последовательных приближений. Положим

$$h_n^{(0)}(x,\ k) = h_0(x,\ k),$$

$$h_n^{(m)}(x,\ k) = -h_0(x,\ k)\int\limits_0^x g_0(t,\ k)v_n(t)h_n^{(m-1)}(t,\ k)dt$$

$$-g_0(x,\ k)\int\limits_x^{\varepsilon} h_0(t,\ k)v_n(t)h_n^{(m-1)}(t,\ k)dt, \qquad m = 1,\ 2, \ldots$$

Тогда при $0 < x \leqq \varepsilon$ имеем

$$\begin{aligned} |h_n^{(0)}(x,\ k)| &\leqq C_1\left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{-|l|} e^{\mathrm{Im}kx}, \\ |h_n^{(1)}(x,\ k)| &\leqq \left[C_1\left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{-|l|} e^{\mathrm{Im}kx}\right] q_n^m. \end{aligned}$$

По индукции легко получить

$$|h_n^{(m)}(x,\ k)| \leqq \left[C_1\left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{-|l|} e^{\mathrm{Im}kx}\right] q_n^m, \qquad m = 2,\ 3, \ldots$$

и, следовательно, ряд $h_n(x,\ k) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} h_n^{(m)}(x,\ k)$ сходится равномерно по $|k| \leqq N,\ x \in (0,\ \varepsilon]$, так как мажорируется рядом

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[C_1\left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{-|l|} e^{\mathrm{Im}kx}\right] q_n^m.$$

Кроме того,

$$|h_n(x,\ k)| \leqq \left[C_1\left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{-|l|} e^{\mathrm{Im}kx}\right] \frac{1}{1-q_n^m},$$

т.е. доказано (16). От уравнения (14) и оценки (16), аналогично [1, с. 35], получаем асимптотики (17) и (18) . От того, что функции $g_0(x,\ k)$ и $h_0(x,\ k)$ — целые, четные от k, следует, что такая $h_n(x,\ k)$ для $x \in (0,\ \varepsilon]$ и, в частности, $h_n(\varepsilon,\ k)$ и $h_n'(\varepsilon,\ k)$. Следовательно, продолжение $h_n(x,\ k)$ в интервале $[\varepsilon,\ \infty)$ тоже целая, четная функция от k. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 2.1. От (12), (13) и (18) видно, что асимптотики функций g_n, h_n и f_n при $|k| \to, \mathrm{Im}k \geqq 0$ совпадают с асимптотиками (8) — (11) функций g_0, h_0 и f_0 .

2.2. Известно [4], что при $\mathrm{Im}k > 0$ имеется только одно, с точностью до множителя, решение уравнения (1), квадратично интегрируемое в бесконечности, и оно убывает как e^{ikx} при $x \to \infty$. По терминологии Вейля, $x = \infty$ является граничной точкой и условие

(19) $$\lim_{x\to\infty}\left\{e^{-ikx}y_n(x,\ k)\right\} < \infty, \qquad \mathrm{Im}\,k \geqq 0$$

$$-g_0(x,\ k)\int\limits_x^{\varepsilon} h_0(t,\ k)v_n(t)h_n(t,\ k)dt.$$

После этого додефинируем h_n при $\varepsilon \leqq x < \infty$ с помощью значении $h_n(\varepsilon,\ k)$ и $h'_n(\varepsilon,\ k)$. Для $\operatorname{Im} k \geqq 0$ имеем

$$|h_0(x,\ k)| \leqq C_1\left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{-|l|} e^{\operatorname{Im} kx},$$

$$|g_0(x,\ k)| \leqq C_2\left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{l+1} e^{\operatorname{Im} kx}.$$

Пусть $|k| \leqq N$. Выбираем $\varepsilon > 0$ так, чтобы

$$q_n \equiv C_1C_2\exp(2N\varepsilon)N^{-1}\int\limits_0^{\varepsilon}|v_n(x)|dx < 1. \tag{15}$$

Это возможно, потому что $v_n \in X_1$. Справедлива следующая

Л е м м а 2.3. При $0 < x \leqq \varepsilon$ уравнение (14) имеет решение $h_n(x,\ k)$, которое целая, четная функция от k. Справедливы оценка

$$|h_n(x,\ k)| \leqq \mathrm{const}\left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{-|l|} e^{\operatorname{Im} kx} \tag{16}$$

и асимптотики при $x \to 0$

$$\left|\begin{array}{ll} h_n(x,\ k) = b_1x^{-l}[1+O(x)], & l\in\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right),\\ h_n(x,\ k) = c_1\sqrt{x}\ln x[1+O(x)], & l = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \tag{17}$$

и при $|k| \to \infty$, $\operatorname{Im} k \geqq 0$

$$\left|\begin{array}{l} h_n(x,\ k) = \dfrac{k^l}{\cos l\pi}\cos(kx+\dfrac{l\pi}{2}) + O(|k|^{l-1}e^{\operatorname{Im} kx}),\quad l\in\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right),\\ h_n(x,\ k) = k^{-\frac{1}{2}}\left[\cos(kx+\dfrac{\pi}{4}) + (\dfrac{2}{\pi}\ln k)\cos(kx-\dfrac{\pi}{4})\right]\\ \qquad +O\left(|k|^{-\frac{3}{2}}\ln|k|e^{\operatorname{Im} kx}\right) + O\left(|k|^{-\frac{3}{2}}e^{\operatorname{Im} kx}\right),\quad l = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right. \tag{18}$$

Доказательство. При ε, определенном в (15), решаем (14) методом последовательных приближений. Положим

$$h_n^{(0)}(x,\ k) = h_0(x,\ k),$$

$$h_n^{(m)}(x,\ k) = -h_0(x,\ k)\int\limits_0^x g_0(t,\ k)v_n(t)h_n^{(m-1)}(t,\ k)dt$$

$$-g_0(x,\ k)\int\limits_x^\varepsilon h_0(t,\ k)v_n(t)h_n^{(m-1)}(t,\ k)dt, \qquad m = 1,\ 2,\dots$$

Тогда при $0 < x \leqq \varepsilon$ имеем

$$|h_n^{(0)}(x,\ k)| \leqq C_1\left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{-|l|} e^{\mathrm{Im}kx},$$

$$|h_n^{(1)}(x,\ k)| \leqq \left[C_1\left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{-|l|} e^{\mathrm{Im}kx}\right] q_n^m.$$

По индукции легко получить

$$|h_n^{(m)}(x,\ k)| \leqq \left[C_1\left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{-|l|} e^{\mathrm{Im}kx}\right] q_n^m, \qquad m = 2,\ 3,\dots$$

и, следовательно, ряд $h_n(x,\ k) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} h_n^{(m)}(x,\ k)$ сходится равномерно по $|k| \leqq N$, $x \in (0,\ \varepsilon]$, так как мажорируется рядом

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[C_1\left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{-|l|} e^{\mathrm{Im}kx}\right] q_n^m.$$

Кроме того,

$$|h_n(x,\ k)| \leqq \left[C_1\left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{-|l|} e^{\mathrm{Im}kx}\right] \frac{1}{1-q_n^m},$$

т.е. доказано (16). От уравнения (14) и оценки (16), аналогично [1, с. 35], получаем асимптотики (17) и (18) . От того, что функции $g_0(x,\ k)$ и $h_0(x,\ k)$ — целые, четные от k, следует, что такая $h_n(x,\ k)$ для $x \in (0,\ \varepsilon]$ и, в частности, $h_n(\varepsilon,\ k)$ и $h_n'(\varepsilon,\ k)$. Следовательно, продолжение $h_n(x,\ k)$ в интервале $[\varepsilon,\ \infty)$ тоже целая, четная функция от k. Лемма доказана.

Замечание 2.1. От (12), (13) и (18) видно, что асимптотики функций g_n, h_n и f_n при $|k| \to, \mathrm{Im}k \geq 0$ совпадают с асимптотиками (8) — (11) функций g_0, h_0 и f_0 .

2.2. Известно [4], что при $\mathrm{Im}k > 0$ имеется только одно, с точностью до множителя, решение уравнения (1), квадратично интегрируемое в бесконечности, и оно убывает как e^{ikx} при $x \to \infty$. По терминологии Вейля, $x = \infty$ является граничной точкой и условие

(19) $$\lim_{x\to\infty}\left\{e^{-ikx}y_n(x,\ k)\right\} < \infty, \qquad \mathrm{Im}\,k \geqq 0$$

выделяет эти решения. Из (12) видно, что решение Йоста f_n удовлетворяет (19).

Из (13) и (17) видно, что при $l \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$: $g_n \in L_2(0,.)$, $h_n \notin L_2(0,.)$, т.е. $x = 0$ — граничная точка и граничное условие в $x = 0$

$$\lim_{x\to 0}\{x^{-(l+1)}y_n(x,\ k)\} < \infty. \tag{20}$$

При $l \in [-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$: $g_n \in L_2(0,.)$ и $h_n \in L_2(0,.)$, т.е. $x = 0$ является граничной окружностью. Граничное условие можно [2, с. 264] записать в виде

$$\lim_{x\to 0} W(\xi_n(x),\ y_n(x,\ k)) = 0, \tag{21}$$

где $\xi_n(x)$ — фиксированное решение (1) при $k = 0$. Пусть

$$\xi_n(x) = \gamma_n[\cos\beta_n g_n(x,\ 0) + \sin\beta_n h_n(x,\ 0)],$$

$$y_n(x,\ k) = A_n(k)g_n(x,\ k) + B_n(k)h_n(x,\ k).$$

Используя очевидное $W(x^{-l},\ x^{l+1}) = 2l+1, W(\sqrt{x}\ln x,\ \sqrt{x}) = -1$, получаем при $x \to 0$

$$W(\xi_n,\ y_n) \sim \text{const}\,[A_n\sin\beta_n - B_n\cos\beta_n], \quad \text{const} \neq 0.$$

Следовательно, условие (21) эквивалентно

$$y_n(x,\ k) = \rho_n(k)[\cos\beta_n g_n(x,\ k) + \sin\beta_n h_n(x,\ k)], \quad \rho_n \neq 0,$$

т.е. (21) выделяет решения (1), пропорциональные решению

$$y_n^{(\beta_n)}(x,\ k) = \cos\beta_n g_n(x,\ k) + \sin\beta_n h_n(x,\ k).$$

При $\sin\beta_n \neq 0$ обозначим $y_n^{(\beta_n)}(x,\ k)$ в виде

$$\varphi_n(\alpha_n;\ x,\ k) = h_n(x,\ k) + \alpha_n g_n(x,\ k),$$

где $\alpha_n = \operatorname{cotg}\beta_n$, а при $\sin\beta_n = 0$ обозначим $y_n^{(\beta_n)}(x,\ k)$ в виде

$$\varphi_n(\infty;\ x,\ k) = g_n(x,\ k).$$

Решение $\varphi_n(\alpha_n;\ x,\ k)$, $\alpha_n \in R^1$, $\alpha_n = \infty$ называем регулярным решением. Ясно, что $\varphi_n(\alpha_n;\ x,\ k)$ удовлетворяет (21). Запишем (21) в виде

$$\lim_{x\to 0} W(\varphi_n(\alpha_n;\ x,\ 0),\ y_n(x,\ k)) = 0. \tag{22}$$

Так как $\varphi_n(\infty;\ x,\ k) \sim a_1 x^{l+1}$, $x \to 0$, то при $l \in \left[\frac{1}{2},\ \infty\right)$ (20) принимает вид

$$\lim_{x\to 0} W(\varphi_n(\infty;\ x,\ 0),\ y_n(x,\ k)) = 0, \tag{23}$$

и это условие выделяет решения (1), пропорциональные $g_n(x, k)$. По аналогии при $l \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ можно выделить (23) из остальных условий и назвать каким-то образом. Так в [5] при $l = 0$ условие (23), т.е. $y_n(0, k) = 0$ называется нулевым, а (22) — вронскианским и задаче приписывается параметр $l = -1$. Мы придерживаемся этой терминологии.

2.3. В заключении п. 2 дефинируем некоторые функции и константы, связанные с граничными задачами (1), (22) и (1), (23). Пусть

$$
(24) \qquad \left|\begin{array}{l} \psi_n(\alpha_n;\ x,\ k) = \dfrac{-\alpha_n}{1+\alpha_n^2} h_n(x,\ k) + \dfrac{1}{1+\alpha_n^2} g_n(x,\ k) \\ \psi_n(\infty;\ x,\ k)) = -h_n(x,\ k). \end{array}\right.
$$

От того, что $W(h_n, g_n) = 1$, следует $W(\varphi_n, \psi_n) = 1$, $\alpha_n \in R^1$, $\alpha_n = \infty$. Из леммы 2.2 и 2.3 получаем, что $\varphi_n(\alpha_n;\ x,\ k)$ и $\psi_n(\alpha_n;\ x,\ k)$, $\alpha_n \in R^1$, $\alpha_n = \infty$ целые, четные функции от k. Дефинируем

$$
\left|\begin{array}{l} e_n(\alpha_n;\ k) = (-ik)^l W(\varphi_n(\alpha_n;\ x,\ k),\ f_n(x,\ k)), \quad \alpha_n \in R^1 \\ e_n(\infty;\ k) = (-ik)^l W(f_n(x,\ k),\ \varphi_n(\infty;\ x,\ k)). \end{array}\right.
$$

Видно, что

$$
e_n(\alpha_n;\ k) = e_n(0;\ k) - \alpha_n e_n(\infty;\ k),
$$

$$
(25) \qquad f_n(x,\ k) = \frac{e_n(\infty;\ k)}{(-ik)^l} h_n(x,\ k) + \frac{e_n(0;\ k)}{(-ik)^l} g_n(x,\ k).
$$

Из леммы 2.1, 2.2 и 2.3 следует, что $e_n(\alpha_n;\ k)$, $\alpha_n \in R^1$, $\alpha_n = \infty$ аналитична при $\operatorname{Im} k > 0$ и непрерывна при $\operatorname{Im} k \geqq 0$. Всегда можно найти такое $\alpha_n = \alpha_n^*$, что $e_n(\alpha_n^*;\ 0) = 0$. При $e_n(\infty;\ 0) = 0$: $\alpha_n^* = \infty$, а при $e_n(\infty;\ 0) \neq 0$: $\alpha_n^* = e_n(0;\ 0)[e_n(\infty;\ 0)]^{-1}$. Для простоты изложения, далее будем предполагать, что $e_n(\infty;\ 0) \neq 0$, $e_n(\alpha_n;\ 0) \neq 0$.

От того, что $\varphi_n(\alpha_n;\ x,\ k)$ четная функция от k, аналогично [1, с. 25] получаем для вещественных $k \neq 0$

$$
\begin{aligned}
\varphi_n(\alpha_n;\ x,\ k) &= -\frac{1}{2ik}\frac{1}{(ik)^l}[e_n(\alpha_n;\ -k)f_n(x,\ k) - (-1)^l e_n(\alpha_n;\ k) f_n(x,\ -k)], \\
\varphi_n(\infty;\ x,\ k) &= \frac{1}{2ik}\frac{1}{(ik)^l}[e_n(\infty;\ -k)f_n(x,\ k) - (-1)^l e_n(\infty;\ k) f_n(x,\ -k)].
\end{aligned}
$$

Отсюда следует, что для $k \in R^1$, $k \neq 0$: $e_n(\alpha_n,\ k) \neq 0$, $\alpha_n \in R^1$, $\alpha_n = \infty$. Из асимптотик (13), (18) находим при $|k| \to \infty$, $\operatorname{Im} k \geqq 0$

$$
(26) \qquad \varphi_n(\infty;\ x,\ k) = \frac{\sin(kx - \frac{l\pi}{2})}{k^{l+1}} + O\left(\frac{e^{\operatorname{Im} kx}}{|k|^{l+2}}\right), \quad l \in \left[-\frac{1}{2},\ \infty\right),
$$

$$\varphi_n(\alpha_n;\ x,\ k)=\begin{cases}\dfrac{k^l}{\cos l\pi}\cos(kx+\dfrac{l\pi}{2})+O\left(|k|^{l-1}e^{\operatorname{Im}kx}\right), & l\in\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)\\ k^{-\frac{1}{2}}\left[\cos\left(kx+\dfrac{\pi}{4}\right)+\alpha_n\sin\left(kx+\dfrac{\pi}{4}\right)+\left(\dfrac{2}{\pi}\ln k\right)\cos\left(kx-\dfrac{\pi}{4}\right)\right] & \\ +O\left(|k|^{-\frac{3}{2}}\ln|k|e^{\operatorname{Im}kx}\right)+O\left(|k|^{-\frac{3}{2}}e^{\operatorname{Im}kx}\right), & l=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Отсюда для $e_n(\alpha_n;\ k)$, $\alpha_n\in R^1$, $\alpha_n=\infty$ имеем при $|k|\to\infty$, $\operatorname{Im}k\geqq 0$

$$e_n(\infty;\ k)=1+O(|k|^{-1}),\qquad l\in\left[-\frac{1}{2},\ \infty\right),\tag{27}$$

$$e_n(\alpha_n;\ k)=\begin{cases}\dfrac{i(-1)^l k^{2l+1}}{\cos l\pi}[1+O(|k|^{-1})], & l\in\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)\\ \left[i-\left(\alpha_n+\dfrac{2}{\pi}\ln k\right)\right][1+O(|k|^{-1})], & l=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}\tag{28}$$

З а м е ч а н и е 2.2. Из (27), (28), (25) и (4) видно, что асимптотики функции $e_n(\infty;\ k)$, $e_n(\alpha_n;\ k)$ при $|k|\to\infty$, $\operatorname{Im}k\geqq 0$ совпадают со значениями этих функций при $v_n(x)\equiv 0$.

Из асимптотик (27), (28) видно, что число нулей функций $e_n(\alpha_n;\ k)$, $\alpha_n\in R^1$, $\alpha_n=\infty$ в области $\operatorname{Im}k\geqq 0$ конечное. Стандартно [1, с. 42] получается, что эти нули чисто мнимые. Докажем, что они простые.

Пусть $e_n(\alpha_n;\ k_1)=0$, $\alpha_n\in R^1$; $e_n(\infty;\ k_2)=0$, $k_n=i\kappa_n$, $\kappa_n>0$. Тогда $f_n(x,\ k_1)=D_1(v_n,\ \alpha_n)\varphi_n(\alpha_n;\ x,\ k_1)$. Обозначим

$$M_1^{-1}(v_n,\ \alpha_n)=\int_0^\infty f_n^2(x,\ k_1)dx,\qquad M_2^{-1}(v_n,\ \infty)=\int_0^\infty f_n^2(x,\ k_2)dx,$$

$$C_1^{-1}(v_n,\ \alpha_n)=\int_0^\infty \varphi_n^2(\alpha_n;\ x,\ k_1)dx,\quad C_2^{-1}(v_n,\ \infty)=\int_0^\infty \varphi_n^2(\infty;\ x,\ k_2)dx.$$

Справедлива следующая

Л е м м а 2.4. Имеют место представления

$$D_1(v_n,\ \alpha_n)=\frac{e_n(\infty;\ k_1)}{(-ik_1)^l},\qquad D_2(v_n,\ \infty)=\frac{e_n(0;\ k_2)}{(-ik_2)^l},\tag{29}$$

$$\begin{aligned}M_1^{-1}(v_n,\ \alpha_n)&=\frac{e_n(\infty;\ k_1)\dot e_n(\alpha_n;\ k_1)}{2(-1)^l(k_1)^{2l+1}},\\ M_2^{-1}(v_n,\ \infty)&=-\frac{e_n(0;\ k_2)\dot e_n(\infty;\ k_2)}{2(-1)^l(k_2)^{2l+1}},\end{aligned}\tag{30}$$

$$\begin{aligned}C_1^{-1}(v_n,\ \alpha_n)&=\frac{\dot e_n(\alpha_n;\ k_1)}{2k_1 e_n(\infty;\ k_1)},\\ C_2^{-1}(v_n,\ \infty)&=-\frac{\dot e_n(\infty;\ k_2)}{2k_2 e_n(0;\ k_2)}.\end{aligned}\tag{31}$$

Доказательство получается аналогично [1, с. 44], [9], используя функцию $\psi_n(\alpha_n;\ x,\ k)$ из (24) и тождество

$$\frac{d}{dx}W(f_n(x,\ k),\ \dot{f}_n(x,\ k)) = -2kf_n^2(x,\ k).$$

Следствие 2.1. Функции $e_n(\alpha_n;\ k)$, $\alpha_n \in R^1$ и $e_n(\infty;\ k)$ имеют простые нули.

Следуя [9], [13], можно получить при $x \to \infty$

$$(32)\qquad \left|\begin{aligned} \dot{\varphi}_n(\alpha_n;\ x,\ k_1) &= \frac{(-1)^l}{(2ik_1)(ik_1)^l}\dot{e}_n(\alpha_n;\ k_1)e^{\kappa_1 x}[1+o(1)] \\ \dot{\varphi}_n(\infty;\ x,\ k_2) &= -\frac{(-1)^l}{(2ik_2)(ik_2)^l}\dot{e}_n(\infty;\ k_2)e^{\kappa_2 x}[1+o(1)]. \end{aligned}\right.$$

3. ФОРМУЛЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ПРОИЗВЕДЕНИЯМ

3.1. Сначала получим ФРП $(l,\ v_1,\ \infty,\ v_2,\ \infty)$ при $l \in \left[-\frac{1}{2},\ \infty\right)$. Рассмотрим две РУШ

$$(33)\quad \frac{d^2}{dx^2}y_n + \left\{k^2 - \left[\frac{l(l+1)}{x^2} + v_n(x)\right]\right\}y_n = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad n = 1,\ 2,$$

с нулевыми граничными условиями

$$(34)\qquad \lim_{x\to 0} W(\varphi_n(\infty;\ x,\ 0),\ y_n(x,\ k)) = 0.$$

Предполагаем, что $v_n \in X_1$ и $l \in \left[-\frac{1}{2},\ \infty\right)$. Обозначим произведения

$$\Phi(\infty;\ x,\ k) = \varphi_1(\infty;\ x,\ k)\varphi_2(\infty;\ x,\ k),$$

$$F(x,\ k) = f_1(x,\ k)f_2(x,\ k),$$

$$E(\infty;\ k) = e_1(\infty;\ k)e_2(\infty;\ k)$$

и множества собственных значений

$$\sigma_n(\infty) = \{k_{n_j} : e_n(\infty;\ k_{n_j}) = 0, \quad j = 1, \ldots,\ N_n\},$$

$$\sigma(\infty) = \sigma_1(\infty) \cup \sigma_2(\infty), \quad \sigma'(\infty) = \sigma_1(\infty) \cap \sigma_2(\infty), \quad \sigma''(\infty) = \sigma(\infty)\backslash\sigma'(\infty).$$

Введем систему функций $\{\widetilde{F}(\infty)\}$

$$(35)\quad \widetilde{F}(\infty;\ x,\ k) = -\frac{4}{\pi}(-1)^l k^{2l+1}\operatorname{Im}\left(\frac{F(x,\ k)}{E(\infty;\ k)}\right), \qquad k \in (0,\ \infty),$$

$$(36)\quad \begin{cases} \widetilde{F}_{n,j}(\infty;\ x) = a_{n,\ j}(\infty)F(x,\ k_{n,j}), \qquad k_{n,j} \in \sigma''(\infty) \\ a_{n,j}(\infty) = \dfrac{4(-1)^l (k_{n,j})^{2l+1}}{\dot{E}(\infty;\ k_{n,j})}, \end{cases}$$

$$(37)\quad \begin{cases} \widetilde{F}_{j,1}(\infty;\ x) = b_j(\infty)[\dot{F}(x,\ k_j) + d_j(\infty)F(x,\ k_j)], \\ \widetilde{F}_{j,2}(\infty;\ x) = b_j(\infty)F(x,\ k_j), \qquad k_j \in \sigma'(\infty) \\ b_j(\infty) = \dfrac{8(-1)^l (k_j)^{2l+1}}{\ddot{E}(\infty;\ k_j)}, \qquad d_j(\infty) = \dfrac{2l+1}{k_j} - \dfrac{\dddot{E}(\infty;\ k_j)}{3\ddot{E}(\infty;\ k_j)}. \end{cases}$$

Для произвольной функции $u(x) \in L(0,\ \infty)$ обозначим интегралы

$$(38)\quad \left| \begin{array}{l} \langle \Phi(\infty;\ k),\ u\rangle = \displaystyle\int_0^\infty \Phi(\infty;\ x,\ k)u(x)dx, \qquad k \in (0,\ \infty) \cup \sigma(\infty) \\ \langle \dot{\Phi}(\infty;\ k_j),\ u\rangle = \displaystyle\int_0^\infty \dot{\Phi}(\infty;\ x,\ k_j)u(x)dx, \quad k_j \in \sigma'(\infty). \end{array} \right.$$

Как в [9], [13], используя (32), доказываем

Л е м м а 3.1. *Для каждой $u \in L(0,\ \infty)$ интегралы* (38) *сходятся абсолютно.*

ФРП($l,\ v_1,\ \infty,\ v_2,\ \infty$) устанавливается в следующей

Т е о р е м а 3.1. *Для каждой функции $u \in L(0,\ \infty)$ при $x >$ справедливо разложение*

$$(39)\quad -\int_x^\infty u(t)dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \widetilde{F}(\infty;\ x,\ k)\langle \Phi(\infty;\ k),\ u\rangle dk$$

$$+ \sum_{\sigma''(\infty)} \widetilde{F}_{n,j}(\infty;\ x)\langle \Phi(\infty;\ k_{n,j}),\ u\rangle$$

$$+ \sum_{\sigma'(\infty)} \left[\widetilde{F}_{j,1}(\infty;\ x)\langle \Phi(\infty;\ k_j),\ u\rangle + \widetilde{F}_{j,2}(\infty;\ x)\langle \dot{\Phi}(\infty;\ k_j),\ u\rangle\right].$$

Доказательство. Оно проводится по схеме [9], [13]: Строим функци

$$(40)$$

$$G(\infty;\ x,\ t,\ k) = \frac{4(-1)^l k^{2l+1}}{E(\infty;\ k)} = \begin{cases} F(x,\ k)\Phi(\infty;\ t,\ k) \qquad \text{при } 0 < t \leqq x \\ f_1(x,\ k)\varphi_2(\infty;\ x,\ k)\varphi_1(\infty;\ t,\ k)f_2(t,k) \\ +\varphi_1(\infty;\ x,\ k)f_2(x,\ k)f_1(t,\ k)\varphi_2(\infty;\ t,\ k) \\ -\Phi(\infty;\ x,\ k)F(t,\ k) \qquad \text{при } x < t < \infty, \end{cases}$$

$$U(\infty;\ x,\ k) = \int_0^\infty G(\infty;\ x,\ t,\ k)u(t)dt, \quad I_R(\infty;\ x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_R} U(\infty;\ x,\ k)dk,$$

где контур

$$\gamma_R = \{-R \leqq k \leqq R\} \bigcup \Gamma_R,\ \Gamma_R = \{k = Re^{i\theta},\ 0 \leqq \theta \leqq \pi\},\ R > \max|k_{n,j}|$$

обходится в положительном направлении. Контурный интеграл подсчитывается двумя способами, сперва по теореме о вычетах, а потом, используя асимптотики (12), (26) и (27) при $|k| \to \infty$, $\mathrm{Im}k \geqq 0$ находится асимптотика $I_R(\infty;\ x)$ при $R \to \infty$.

3.2. Сейчас остановимся на ФРП($l,\ v_1,\ \alpha_1,\ v_2,\ \alpha_2$) при $l \in \left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$. Рассмотрим (33) с вронскианскими граничными условиями

$$\lim_{x\to 0} W(\varphi_n(\alpha_n;\ x,\ 0),\ y_n(x,\ k)) = 0. \tag{41}$$

Обозначим произведения

$$\begin{aligned}
\Phi(\alpha;\ x,\ k) &= \varphi_1(\alpha_1;\ x,\ k)\varphi_2(\alpha_2;\ x,\ k),\\
\tilde{\Phi}(\alpha;\ x,\ k) &= \Phi(\alpha;\ x,\ k) - \frac{1}{2}\frac{k^{2l}}{\cos^2 l\pi},\\
E(\alpha;\ k) &= e_1(\alpha_1;\ k)e_2(\alpha_2;\ k)
\end{aligned}$$

и множества собственных значений

$$\sigma_n(\alpha_n) = \{k_{n,j}:\ e_n(\alpha_n;\ k_{n,j}) = 0,\quad j = 1,\dots,\ N_n\},\qquad n = 1,\ 2,$$

$$\sigma(\alpha) = \sigma_1(\alpha_1) \cup \sigma_2(\alpha_2),\quad \sigma'(\alpha) = \sigma_1(\alpha_1) \cap \sigma_2(\alpha_2),\quad \sigma''(\alpha) = \sigma(\alpha) \setminus \sigma'(\alpha),$$

Введем систему функций $\{\tilde{F}(\alpha)\}$, аналогично (35), (36), (37). Для произвольной $u(x) \in L(0,\ \infty)$ обозначим интегралы

$$\begin{aligned}
\langle\tilde{\Phi}(\alpha;\ k),\ u\rangle &= \int_0^\infty \tilde{\Phi}(\alpha;\ x,\ k)u(x)dx, \qquad k \in (0,\ \infty) \cup \sigma(\alpha)\\
\langle\dot{\tilde{\Phi}}(\alpha;\ k_j),\ u\rangle &= \int_0^\infty \dot{\tilde{\Phi}}(\alpha;\ x,\ k_j)u(x)dx, \quad k_j \in \sigma'(\alpha).
\end{aligned} \tag{42}$$

Справедлива следующая

Л е м м а 3.2. *Для каждой $u \in L(0,\ \infty)$ интегралы (42) сходятся абсолютно.*

ФРП($l,\ v_1,\ \alpha_1,\ v_2,\ \alpha_2$) устанавливается в

Т е о р е м а 3.2. *Для каждой функции* $u \in L(0, \infty)$ *при* $x > 0$ *справедливо разложение*

$$(43)\qquad -\int_x^{\infty} u(t)dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \widetilde{F}(\alpha;\ x,\ k)\langle\widetilde{\Phi}(\alpha;\ k),\ u\rangle dk$$

$$+\sum_{\sigma''(\alpha)} \widetilde{F}_{n,j}(\alpha;\ x)\langle\widetilde{\Phi}(\alpha;\ k_{n,j}),\ u\rangle$$

$$+\sum_{\sigma'(\alpha)}\left[\widetilde{F}_{j,1}(\alpha;\ x)\langle\widetilde{\Phi}(\alpha;\ k_j),\ u\rangle + \widetilde{F}_{j,2}(\alpha;\ x)\langle\dot{\widetilde{\Phi}}(\alpha;\ k_j),\ u\rangle\right].$$

Доказательство. Строим функцию $G(\alpha;\ x,\ t,\ k)$ аналогично (40). Пусть

$$G_1(\alpha;\ x,\ t,\ k) = G(\alpha;\ x,\ t,\ k) - \frac{2(-1)^l k^{2l+1}}{E(\alpha;\ k)}\frac{k^{2l}}{\cos^2 l\pi}F(x,\ k),$$

$$U(\alpha;\ x,\ k) = \int_0^{\infty} G(\alpha;\ x,\ t,\ k)u(t)dt,$$

$$I_R(\alpha;\ x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_R} U(\alpha;\ x,\ k)dk,$$

где контур γ_R тот же как в теореме 3.1. Доказательство проводится аналогично.

Как частный случай при $v_n(x) \equiv 0$ из (41) и (43) можно получить формулы разложения по квадратам функций Бесселя. В этом случае

$$g_n(x,\ k) = g_0(x,\ k),\quad h_n(x,\ k) = h_0(x,\ k),\quad f_n(x,\ k) = f_0(x,\ k),$$

$$e_n(\infty;\ k) = 1,$$

$$e_n(\alpha_n;\ k) = \begin{cases} 1 - \alpha_n\dfrac{i(-1)^l k^{2l+1}}{\cos l\pi}, & l \in \left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right) \\ i - \left(\alpha_n + \dfrac{\pi}{2}\ln k\right), & l = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

4. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ

Как следствие из теорем 3.1 и 3.2 легко получаем

Л е м м а 4.1. *Пусть для граничных задач* (33), (34) *и* (33), (41) *имеем* $E(\alpha,\ 0) \neq 0$, $E(\infty,\ 0) \neq 0$. *Тогда из условий*

$$\langle\Phi(\infty,\ k),\ u\rangle = 0,\quad k \in (0,\ \infty)\cup\sigma(\infty),$$

$$\langle\dot{\Phi}(\infty,\ k_j),\ u\rangle = 0,\quad k_j \in \sigma'(\infty).$$

или из условий

$$(44)\qquad \begin{aligned} &\langle\tilde{\Phi}(\alpha;\ k),\ u\rangle = 0, \quad k \in (0,\ \infty)\cup\sigma(\alpha),\\ &\langle\dot{\tilde{\Phi}}(\alpha;\ k_j),\ u\rangle = 0, \quad k_j \in \sigma'(\alpha) \end{aligned}$$

следует, что $U(x) = 0$ в $L(0,\ \infty)$.

В дальнейшем нам нужно расширение пространства $L(0,\ \infty)$ [10]. Обозначим пространство $W_1 = L(0,\ \infty)\oplus R^1$ и билинейную форму

$$\langle\hat{f}_1,\ \hat{f}_2\rangle_1 = \int\limits_0^\infty f_1(x)f_2(x)dx + \mu_1\mu_2,$$

$$\hat{f}_n = (f_n(x),\ \mu_n) \in W_1, \qquad n = 1,\ 2.$$

Обозначим элементы пространства W_1 :

$$\hat{\Phi}(k) = (\Phi(\alpha;\ x,\ k),\ 1), \qquad k \in (0,\ \infty)\cup\sigma(\alpha),$$

$$\dot{\hat{\Phi}}(k_j) = (\dot{\Phi}(\alpha;\ x,\ k_j),\ 0), \qquad k_j \in \sigma'(\alpha).$$

Справедлива следующая

Л е м м а 4.2. Пусть $\hat{u} = (u(x),\ \mu) \in W_1$. Если выполнено

$$(45)\qquad \left|\begin{aligned} &\langle\hat{\Phi}(k),\ \hat{u}\rangle_1 = 0, \quad k \in (0,\ \infty)\cup\sigma(\alpha),\\ &\langle\dot{\hat{\Phi}}(k_j),\ \hat{u}\rangle_1 = 0, \quad k_j \in \sigma'(\alpha), \end{aligned}\right.$$

то $\hat{u} = \hat{0}$, т.е. $u(x) = 0$, $\mu = 0$.

Доказательство. Рассуждения аналогичны [10]. То, что $\langle\hat{\Phi}(k),\ \hat{u}\rangle_1 = 0$, $k \in (0,\ \infty)$ введет к $\int\limits_0^\infty \Phi(\alpha;\ x,\ k)u(x)dx + \mu = 0$, $k \in (0,\ \infty)$, т.е.

$$(46)\qquad \int\limits_0^\infty \left[\frac{\cos^2 l\pi}{k^{2l+1}}\Phi(\alpha;\ x,\ k)\right]u(x)dx + \left[\frac{\cos^2 l\pi}{k^{2l}}\right]\mu = 0, \qquad k \in (0,\ \infty).$$

При $k \to \infty$ имеем

$$(47)\qquad \frac{\cos^2 l\pi}{k^{2l}}\Phi(\alpha;\ x,\ k) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2kx + l\pi).$$

а) Пусть $l = 0$. Тогда из (47) и леммы Римана — Лебега получаем

$$(48)\qquad \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty u(t)dt + \mu = 0.$$

Из (48) и (45) следует (44) и из леммы 4.1 получаем $u(x) = 0$. Тогда из (48) имеем $\mu = 0$.

б) Пусть $l \in \left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$. Из (47), (48) и леммы Римана — Лебега имеем

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty u(x)dx + \lim_{k\to\infty}\left[\frac{\cos^2 l\pi}{k^{2l}}\right]\mu = 0. \tag{49}$$

Но $\lim\limits_{k\to\infty}\left[\frac{\cos^2 l\pi}{k^{2l}}\right] = \infty$, а $\frac{1}{2}\int_0^\infty u(x)dx < \infty$. Следовательно, если справедливо (49), то необходимо $\mu = 0$. Тогда $\frac{1}{2}\int_0^\infty u(x)dx = 0$ и снова из леммы 4.1 получаем $u(x) = 0$.

в) Пусть $l \in \left(0,\ \frac{1}{2}\right)$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty}\left[\frac{\cos^2 l\pi}{k^{2l}}\right] = 0$. Следовательно, для любого $\mu \in R^1$ из (49) следует $\frac{1}{2}\int_0^\infty u(x)dx = 0$, т.е. для любого μ справедливо $\int_0^\infty \Phi(\alpha;\ x,\ k)u(x)dx + \mu = 0$ В частности, при $\mu = 0$ имеем

$$\int_0^\infty \Phi(\alpha;\ x,\ k)u(x)dx = 0, \quad k \in (0,\ \infty).$$

Аналогично получаем

$$\int_0^\infty \Phi(\alpha;\ x,\ k_{n,j})u(x)dx = 0, \qquad k_{n,j} \in \sigma(\alpha),$$

$$\int_0^\infty \dot\Phi(\alpha;\ x,\ k_j)u(x)dx = 0, \qquad k_j \in \sigma'(\alpha).$$

Тогда из леммы 4.1 следует $u(x) = 0$. Следовательно $\mu = 0$.

Рассмотрим краевую задачу (33), (34). Сопоставим задачи фазы рассеяния

$$\eta(v_n,\ \infty;\ k) = \arg e_n(\infty;\ k), \qquad 0 < k < \infty(\eta \to 0,\ k \to \infty),$$

нормировочные константы (см. (30))

$$M_j^{-1}(v_n,\ \infty) \equiv \int_0^\infty f_n^2(x,\ k_{n,j})dx = -\frac{e_n(0;\ k_{n,j})\dot e_n(\infty;\ k_{n,j})}{2(-1)^l(k_{n,j})^{2l+1}}$$

и данные рассеяния

$$Sc(v_n,\ \infty) = \{S(v_n,\ \infty;\ k),\ -\infty < k < +\infty;\ \lambda_{n,j} = (k_{n,j})^2,\ M_j(v_n,\ \infty)\},$$

где функция рассеяния

$$S(v_n,\ \infty;\ k) = \exp(-2i\eta(v_n,\ \infty;\ k)), \qquad 0 < k < \infty,$$
$$S(v_n,\ \infty;\ -k) = \overline{S(v_n,\ \infty;\ k)}.$$

Аналогично сопоставим краевой задачи (33), (41) ее данные рассеяния. Обозначим

$$\Delta\hat{v} = (\Delta v(x),\ \Delta\alpha), \qquad \Delta v(x) = v_1(x) - v_2(x), \qquad \Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2.$$

Л е м м а 4.3. Справедливы равенства

$$(50) \qquad \langle\Phi(\infty;\ k),\ \Delta v\rangle = \frac{|E(\infty;\ k)|}{k^{2l+1}}\sin[\eta(v_1,\ \infty;\ k) - \eta(v_2,\ \infty;\ k)],$$

$$\langle\Phi(\infty;\ k),\ \Delta v\rangle = -\frac{|E(\infty;\ k)|}{2ik^{2l+1}}[S(v_1,\ \infty;\ k) - S(v_2,\ \infty;\ k)], \quad k \in (0,\ \infty),$$

$$(51) \quad \langle\Phi(\infty;\ k_{n,j}),\ \Delta v\rangle = (-1)^n 2(a_{n,j}(\infty))^{-1}M_j(v_n,\ \infty), \quad k_{n,j} \in \sigma''(\infty),$$

$$(52) \qquad \langle\Phi(\infty;\ k_j),\ \Delta v\rangle = 0,$$

$$\langle\dot{\Phi}(\infty;\ k_j),\ \Delta v\rangle = 2(b_j(\infty))^{-1}[M_j(v_1,\ \infty) - M_j(v_2,\ \infty)], \quad k_j \in \sigma'(\infty),$$

$$(53) \qquad \langle\hat{\Phi}(k),\ \Delta\hat{v}\rangle_1 = \frac{|E(\alpha;\ k)|}{k^{2l+1}}\sin[\eta(v_1,\ \alpha_1;\ k) - \eta(v_2,\ \alpha_2;\ k)],$$

$$\langle\hat{\Phi}(k),\ \Delta\hat{v}\rangle_1 = -\frac{E(\alpha;\ k)}{2ik^{2l+1}}[S(v_1,\ \alpha_1;\ k) - S(v_2,\ \alpha_2;\ k)], \quad k \in (0,\ \infty),$$

$$(54) \quad \langle\hat{\Phi}(k_{n,j}),\ \Delta\hat{v}\rangle_1 = (-1)^n 2(a_{n,j}(\alpha))^{-1}M_j(v_n,\ \alpha_n), \quad k_{n,j} \in \sigma''(\infty),$$

$$(55) \qquad \langle\Phi(k_j),\ \Delta\hat{v}\rangle_1 = 0,$$

$$\langle\dot{\hat{\Phi}}(k_j),\ \Delta v\rangle_1 = 2(b_j(\alpha))^{-1}[M_j(v_1,\ \alpha_1) - M_j(v_2,\ \alpha_2)], \quad k_j \in \sigma'(\alpha).$$

Доказательство, как известно [9], получается при помощи тождества

$$
(56)\quad
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}W(\varphi_2(\alpha_2;\ x,\ k),\ \varphi_1(\alpha_1;\ x,\ k)) = [v_1(x) - v_2(x)]\Phi(\alpha;\ x,\ k)\\
&\frac{d}{dx}W(\varphi_2(\infty;\ x,\ k),\ \varphi_1(\infty;\ x,\ k)) = [v_1(x) - v_2(x)]\Phi(\infty;\ x,\ k).
\end{aligned}
$$

Интегрируя по x от 0 до ∞ для $k \in (0,\ \infty) \cup \sigma(\infty)$ и соответственно, $k \in (0,\ \infty) \cup \sigma(\alpha)$ получаем (50), (51) и (53), (54). Дифференцируя (56) по k при $k_j \in \sigma'(\infty)$, $k_j \in \sigma'(\alpha)$ и интегрируя по x от 0 до ∞, получаем (52) и (55). Характерное отличие при (53), (54) и (55), что

$$
\lim_{x\to 0} W(\varphi_2(\alpha_2;\ x,\ k),\ \varphi_1(\alpha_1;\ x,\ k)) = \Delta\alpha, \qquad k \in (0,\ \infty) \cup \sigma(\alpha).
$$

Этот факт приводит к необходимости расширения пространства $L(0,\ \infty)$ до W_1. Как уже отметили в п. 1, такое расширение естественно, потому что задача (33), (41) определяется потенциалом $v_n(x)$ и константой $\alpha_n \in R^1$ в краевом условии.

Как следствие лемм 4.1, 4.2 и 4.3 получаем

Т е о р е м а 4.1. Пусть для краевых задач (33), (34) известно, что $Sc(v_1,\ \infty) = Sc(v_2,\ \infty)$. Тогда $v_1(x) \equiv v_2(x)$.

Т е о р е м а 4.2. Пусть для краевых задач (33), (41) известно, что $Sc(v_1,\ \alpha_1) = Sc(v_2,\ \alpha_2)$. Тогда $v_1(x) \equiv v_2(x)$ и $\alpha_1 = \alpha_2$.

Автор выражает глубокую благодарность проф. д-р Е. Христову за внимание к этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ш а д а н, К., П. С а б а т ь е. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния, М., Мир, 1980.
2. К о д д и н г т о н, Э.А., А. Л е в и н с о н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., ИЛ, 1958.
3. N e w t o n, R. The complex j-plane, W.A. Benjamin, N.Y., Amsterdam, 1964.
4. С о х и н, А. Обратная задача рассеяния для уравнения с особенностью. — Труды ФТИНТ АН УССР, Мат. физ. и функц. анализ, вып. II, Харьков, 1971.
5. К о р о н, В. Обратная задача рассеяния для уравнения с особенностью. Сиб. мат. журнал, 11, 1961, №5, 672–693.
6. Л е в и т а н, Б. Обратные задачи Штурма – Лиувилля, М., Наука, 1984.
7. К о р н, Г., Т. К о р н. Справочник по математике. М., Наука, 1984.
8. А г р а н о в и ч, З., В. М а р ч е н к о. Обратная задача теории рассеяния. Харьков, 1960.
9. Х р и с т о в, Е. О спектральных свойствах операторов, связанных с разложениями по произведениям решений двух радиальных уравнений Шредингера I. Формулы разложения. II. Спектральная теория. – Год. Соф. унив., Фак. мат. и мех., 75, 1981, кн. 2 – Механика.

10. К и р ч е в, К., Е. Х р и с т о в. О разложениях, связанных с произведениями решений двух регулярных задач Штурма–Лиувилля. — Сиб. мат. журнал, 21, 1980, 98–109.

11. М и ш е в, Й., Е. Х р и с т о в. Об обратной задаче квантовой теории рассеяния для радиального уравнения Шредингера I. Спектральная теория операторов $\Lambda_0^{(l)}$ и $\Lambda_\infty^{(l)}$. — Год. Соф. унив., Фак. [illegible] 98[illegible], кн. 2 — Механика.

12. Т и т ч м а р ш, Э.Ч. Разложения [illegible] функциям [illegible], М., ИЛ, 1961.

13. Х р и с т о в, Е. О разложениях по произведениям решений двух задач Штурма–Лиувилля на полуоси. — Дифф. уравн., 16, 1980, 2023–2029.

Поступила на 14. IV. 1989 г.