

ГОДИШНИК

НА

СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА
И ИНФОРМАТИКА

КНИГА 1 — МАТЕМАТИКА
КНИГА 2 — МЕХАНИКА

Том 84
1990

ANNUAIRE

DE

L'UNIVERSITE DE SOFIA
“ST. KLIMENT OHRIDSKI”

FACULTE DE MATHEMATIQUES
ET INFORMATIQUE

LIVRE 1 — MATHEMATIQUES
LIVRE 2 — MECANIQUE

Tome 84
1990



ГОДИШНИК

НА

СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА
И ИНФОРМАТИКА

КНИГА 1 — МАТЕМАТИКА

Том 84

1990

ANNUAIRE

DE

L'UNIVERSITE DE SOFIA
"ST. KLIMENT OHRIDSKI"

FACULTE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

LIVRE 1 — MATHÉMATIQUES

Tome 84

1990

СОФИЯ, 1993, SOFIA

УНИВЕРСИТЕТСКО ИЗДАТЕЛСТВО „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
PRESSES UNIVERSITAIRES "ST. KLIMENT OHRIDSKI"

РЕДАКЦИОННА КОЛЕГИЯ

НИКОЛАЙ ХАДЖИИВАНОВ (главен редактор), ТИНКО ТИНЧЕВ (научен секретар),
АНГЕЛ ПОПОВ, ВЕСКО ВЪЛОВ, ИВАН СОСКОВ, ИВАНКА ИВАНОВА-КАРАТОП-
РАКЛИЕВА, ЙОРДАН ДЕНЕВ, ПЛАМЕН ДЖАКОВ, ТАТЯНА АРГИРОВА

MT
1993/94

INTERPOLATION OF SOME PROPERTIES OF OPERATORS ACTING IN FAMILIES OF BANACH SPACES

LYUDMILA NIKOLOVA

Людмила Николова. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВ ОПЕРАТОРОВ,
ДЕЙСТВУЮЩИХ В СЕМЕЙСТВАХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пусть T — оператор, действующий из семейства A_t в семейство B_t , обладающий некотором из свойств: компактность, положительная мера некомпактности или лимитность, как оператор действующий из A_t в B_t для t из некоторого подмножества положительной меры. В случае, когда одно из семейств постоянно, представлены некоторые результаты о поведении T как оператора из A в B , где A и B — интерполяционные пространства, построенные по A_t и B_t . Показано как некоторые геометрические свойства наследуются интерполяционным пространством.

Ljudmila Nikolova. INTERPOLATION OF SOME PROPERTIES OF OPERATORS ACTING
IN FAMILIES OF BANACH SPACES

Let T be an operator acting from family A_t into family B_t , possessing some properties like compactness, positive measure of noncompactness or being limited when it acts from A_t into B_t for t from some positive measure subset. In the case when one of the families is constant some results are presented about the behaviour of T like an operator acting from A into B , where A and B are interpolation spaces constructed for the families A_t and B_t . It is shown how some geometric properties are inherited by the interpolation spaces.

The theory of interpolation spaces usually deals with a couple of Banach spaces and a space is constructed, which has appropriate interpolation properties. Some problems that appear in analysis show that it is interesting to consider the case when more than two spaces are given. Though some additional difficulties occur, most of the results of the "classical" interpolation theory have been carried out

for the case of n -tuples by different authors (G. Sparr, A. Yoshikawa, A. Favini, D. L. Fernandez, F. Cobos, J. Peetre and L. Nikolova) or even, more generally, for the case of infinite family $A_t, t \in \Gamma$ of Banach spaces all of them being continuously embedded in a containing space — that is, on the one hand, the St. Louis group: R. Coifman, M. Cwikel, R. Rochberg, Y. Sagher, G. Weiss and, on the other hand, S. G. Krein and L. Nikolova. A work by M. Cwikel and S. Jansson has appeared, in which a general construction is given that enables to develop in particular the real method of Sparr and the complex method of Favini–Lions to the case of infinite families of spaces (cf. [1]). Let us describe briefly the situation in [1], namely the family considered there.

After [1] the “inequality” $E \leq F$ between two Banach spaces E and F means that $E \subset F$ (namely, that E is algebraically embedded in F and $\|x\|_F \leq \|x\|_E, x \in E$). We consider a family $\{A_t, t \in \Gamma\}$ of Banach spaces and inquire the existence of a Banach space U , such that $A_t \leq U$ for all $t \in \Gamma$, (Γ, Y, Z) being an arbitrary measure space, where Z is a probability measure (corresponding to the harmonic measure on Γ at θ in the case when $\Gamma = \{z : |z| = 1\}, |\theta| < 1$.) Such a family is called bounded family on Γ . In [1] the spaces $L_M(A, Z), U_M(A, Z)$ and $\Lambda_M(A, Z)$ are defined, where for M one of the following interpolation methods is used: FL — the complex method of Favini–Lions [2]; St.L — the complex method of St. Louis group [3]; J,p and K,p — the real method introduced by Sparr [4]. In the following we use the notation $\sum_{t \in \Gamma} A_t = \sum_{t \in \Gamma} A_t$ instead of $\sup_{t \in \Gamma} A_t$ from [1] and

$$\Delta A_t = \Delta_{t \in \Gamma} A_t \text{ instead of } \inf_{t \in \Gamma} A_t.$$

Let $h(t)$ be a Z -measurable bounded function. Let after [5] $K(h(t), a, A_t)$ denotes the generalized K -functional, namely

$$K(h(t), a, A_t) = \inf_{\substack{\sum_{t_j} a_{t_j} = a \\ a_{t_j} \in A_{t_j} \\ \sum \|a_{t_j}\|_{A_{t_j}} < \infty}} \sum h(t_j) \|a_{t_j}\|_{A_{t_j}}.$$

Definition. We say that a Banach space E belongs to the class $K(A, Z)$ iff $E \subset \sum A_t$ and for any Z -measurable function $h(t)$, bounded from above and below by positive constants, the inequality

$$(1) \quad K(h(t), a, A_t) \leq C \exp \left(\int_{\Gamma} \log h(t) dZ(t) \right) \|a\|_E$$

holds.

Theorem 1. A Banach space E belongs to the class $K(A, Z)$ iff $E \subset \sum A_t$ and for an arbitrary Banach space B and an arbitrary linear operator $S : \sum A_t \rightarrow B$, for which

$$\|Sa\|_B \leq M(t) \|a\|_{A_t} \quad (a \in A_t)$$

with $M(t)$ bounded by two positive constants and measurable with respect to $dZ(t)$, the following inequality

$$(2) \quad \|S/E\|_{E \rightarrow B} \leq C \exp \left(\int_{\Gamma} \log M(t) dZ(t) \right)$$

holds.

Proof. Let $S: \sum A_t \rightarrow B$ and $\|Sa\|_B \leq M(t)\|a\|_{A_t}$ for $a \in A_t$. We consider the inequality (1) with $h(t) = M(t)$. It is clear that in the definition of K -functional there are only countable many summands a_{t_j} , different from zero. Let $a \in E$, for given $\varepsilon > 0$ we can find $a_j \in A_{t_j}$ such that $\sum a_j = a$ and

$$\sum h(t_j)\|a_j\|_{A_{t_j}} \leq (1 + \varepsilon)K(h(t), a, A_t).$$

Let us estimate

$$\begin{aligned} \|Sa\|_B &= \|S(\sum a_j)\|_B \leq \sum M(t_j)\|a_j\|_{A_{t_j}}, \\ &\leq (1 + \varepsilon)K(M(t), a, A_t) \leq (1 + \varepsilon)C \exp\left(\int_{\Gamma} \log M(t) dZ(t)\right) \|a\|_E. \end{aligned}$$

As ε is arbitrary small, the inequality (2) holds.

Let now prove the opposite assertion. As $m \leq h(t) \leq M$, then for every $t \in \Gamma$ we have the embedding $h(t)A_t \subset mU$ and the space $B = \sum h(t)A_t$ can be defined. On the other hand, $\sum A_t \subset B$ (as $\|a\|_B \leq M\|a\|_{\sum A_t}$). Let us consider the canonical embedding of the space $\sum A_t$ into the space B and estimate

$$\|S\|_{A_{t_0} \rightarrow B} = \sup_{a \in A_{t_0}} \frac{\|a\|_{\sum h(t)A_t}}{\|a\|_{A_{t_0}}} \leq \sup_{a \in A_{t_0}} \frac{\|a\|_{h(t_0)A_{t_0}}}{\|a\|_{A_{t_0}}} = h(t_0).$$

Now we can use the inequality (2) with $M(t) = h(t)$. For $a \in E$ we get

$$K(h(t), a, A_t) = \|Sa\|_B \leq C \exp\left(\int_{\Gamma} \log h(t) dZ(t)\right) \|a\|_E.$$

The theorem is proved.

Having in mind that $L_M(B, Z) = \Lambda_M(B, Z) = U_M(B, Z) = B$ in the case $B_t \equiv B$, we get from [1], Theorem 2.2.1, the following fact:

Theorem ([1]). Let $A_t, t \in \Gamma$, be a bounded family of Banach spaces ($A_t \leq U$). Let S be a bounded linear operator from U into B whose restriction to A_t is a map into B with $\|S\|_{A_t \rightarrow B} \leq M(t)$ for all $t \in \Gamma$. Suppose that $M(t)$ is bounded and Z -measurable on Γ . Then S maps $L_M(A, Z)$, $\Lambda_M(A, Z)$ and $U_M(A, Z)$ into B and

$$\|S\| \leq \exp\left(\int_{\Gamma} \log M(t) dZ(t)\right)$$

(cf. [1]).

Let now E is one of the spaces $L_M(A, Z)$ and $U_M(A, Z)$. We have $E \subset \sum A_t$ and from the above theorem it follows that the inequality (2) with $C = 1$ holds. This means that when $U = \sum A_t$, the interpolation spaces $L_M(A, Z)$ and $U_M(A, Z)$ belong to the class $K(A, Z)$. ($\Lambda(A, Z)$ in general is not complete.)

Definition. The generalized J -functional is defined by

$$J(h(t), a, A_t) = \sup_{t \in \Gamma} h(t)\|a\|_{A_t} \quad \text{for } a \in \Delta A_t.$$

We say that a Banach space F belongs to the class $J(A, Z)$ iff $\Delta A_t \dot{\subset} F$ and

$$\|a\|_F \leq C \exp \left(\int_{\Gamma} \log h^{-1}(t) dZ(t) \right) J(h(t), a, A_t)$$

for all $a \in \Delta A_t$, Z -measurable and bounded by two positive constants.

It is possible to prove a theorem which characterizes the class $J(A, Z)$ and generalizes Theorem 2 from [5]. Here we need only the following

Proposition. *Let $\Delta B_t \dot{\subset} F$. From the conditions that S is a linear operator from an arbitrary Banach space A into B_t with $\|Sa\|_{B_t} \leq M(t)\|a\|_A$, $M(t)$ being a bounded by positive constants Z -measurable function, the inequality*

$$\|S\|_{A \rightarrow F} \leq C \exp \left(\int_{\Gamma} \log M(t) dZ(t) \right)$$

holds. Then $F \in J(B, Z)$.

Proof. Let S be the identity operator in $A = \Delta h(t)B_t$. Let us estimate $\|S\|_{A \rightarrow B_{t_0}}$. We have

$$\sup_{a \in A} \frac{\|a\|_{B_{t_0}}}{\|a\|_{\Delta h(t)B_t}} \leq \sup_{a \in A} \frac{\|a\|_{B_{t_0}}}{\|a\|_{B_{t_0}} h(t_0)} = \frac{1}{h(t_0)},$$

where $\frac{1}{h(t)}$ is a bounded by two positive constants Z -measurable function. Then

$$\begin{aligned} \|a\|_F &\leq \|Sa\|_F \leq C \exp \left(\int_{\Gamma} \log h^{-1}(t) dZ(t) \right) \|a\|_A \\ &= C \exp \left(\int_{\Gamma} \log h^{-1}(t) dZ(t) \right) J(h(t), a, B_t). \end{aligned}$$

It follows from this proposition and Theorem 2.2.1 from [1], used for a constant family $A_t \equiv A$, that $L_M(B, Z)$ and $U_M(B, Z)$ belong to the class $J(B, Z)$.

Definition. Let A be a Banach space. A subset E of A is called limited (or more precisely, limited in A) if

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} |x_n^*(x)| = 0$$

for every weak $*$ -null sequence x_n^* in A^* , the dual space to A (cf. [6]).

Definition [6]. A bounded linear operator $T : A \rightarrow B$ is called limited if T maps U_A (the unit ball of A , and thus every bounded subset of A) to a limited subset of B .

We shall use here the following abbreviations: $\sum_{\gamma} A_t = \sum_{t \in \gamma} A_t$ and $\Delta_{\gamma} A_t =$

$\Delta_{t \in \gamma} A_t$. The notation $T \in L(\overline{A_t}, \overline{B_t})$ means that $T : \sum A_t \rightarrow \sum B_t$ and $\sup \|T/A_t\|_{A_t \rightarrow B_t} < \infty$.

Theorem 2. Let $A_t, t \in \Gamma$, be a bounded family of Banach spaces, B — an arbitrary Banach space and let the Banach space A belongs to the class $K(A, Z)$. Let γ be a subset of Γ with positive Z -measure. Suppose that $T \in L(\bar{A}_t, B)$ and T is a limited operator from $\sum_{\gamma} A_t$ into B . Then T is a limited operator as an operator, acting from A into B .

Proof. Let $M(t)$ be a bounded by positive constants Z -measurable function such that $M(t) \geq \|T/A_t\|_{A_t \rightarrow B}$. Let $M(t) \geq m$ and an arbitrary $\varepsilon > 0$ is given. We define a function

$$h(t) = \begin{cases} M(t), & t \in \gamma \\ M(t)/\varepsilon, & t \in \Gamma \setminus \gamma. \end{cases}$$

Let $x \in U_A$. According to the definition of generalized K -functional there exists a representation $x = \sum x_{t_j}, x_{t_j} \in A_{t_j}$, such that

$$\sum_{t_j \in \Gamma} h(t_j) \|x_{t_j}\|_{A_{t_j}} \leq 2K(h(t), x, A_t).$$

Having in mind that $A \in K(A, Z)$, we get that

$$\sum_{t_j \in \Gamma} h(t_j) \|x_{t_j}\|_{A_{t_j}} \leq 2C \exp \left(\int_{\Gamma} \log h(t) dZ(t) \right)$$

Let y_n^* be a weak *-null sequence in B^* , then there exists a constant $C_1 > 0$ such that $\sup \|y_n^*\|_{B^*} \leq C_1$. We are going to show that $T(U_A)$ is a limited set in B . We have to estimate

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in T(U_A)} |y_n^*(y)| \\ & \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in U_A} \left| y_n^* \left(T \sum_{t_j \in \gamma} x_{t_j} \right) \right| + \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in U_A} \left| y_n^* \left(\sum_{t_j \in \Gamma \setminus \gamma} T x_{t_j} \right) \right|. \end{aligned}$$

Let $x^0 = \sum_{t_j \in \gamma} x_{t_j}, x^0 \in \sum_{t_j \in \gamma} A_{t_j}$, and its norm there could be estimated:

$$\begin{aligned} \|x^0\|_{\sum_{t_j \in \gamma} A_{t_j}} & \leq \sum_{t_j \in \gamma} \|x_{t_j}\|_{A_{t_j}} \leq \frac{1}{m} \sum_{t_j \in \gamma} h(t_j) \|x_{t_j}\|_{A_{t_j}} \\ & \leq \frac{2}{m} C \exp \left(\int_{\Gamma} \log h(t) dZ(t) \right) = K. \end{aligned}$$

The image of the ball $U_{\sum_{t_j \in \gamma} A_{t_j}}(K)$ (of radius K) is a limited set in B and hence

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in U_A} \left| y_n^* \left(T \left(\sum_{t_j \in \gamma} x_{t_j} \right) \right) \right| < \varepsilon.$$

On the other hand,

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in U_A} \left| y_n^* \left(\sum_{t_j \in \Gamma \setminus \gamma} T x_{t_j} \right) \right| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in U_A} \sum_{t_j \in \Gamma \setminus \gamma} |y_n^*(T x_{t_j})| \\
 & \leq \sum_{t_j \in \Gamma \setminus \gamma} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in U_A} |y_n^*(T x_{t_j})| \leq C_1 \varepsilon \sum_{t_j \in \Gamma \setminus \gamma} \|T\|_{A_{t_j} \rightarrow B} \|x_{t_j}\|_{A_{t_j}} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \\
 & \leq C_1 \varepsilon \sum_{t_j \in \Gamma \setminus \gamma} \frac{M(t_j)}{\varepsilon} \|x_{t_j}\|_{A_{t_j}} \leq C_1 \varepsilon \sum_{t_j \in \Gamma} h(t_j) \|x_{t_j}\|_{A_{t_j}} \\
 & \leq C_1 \varepsilon 2K(h(t), x, A_t) \leq C_1 \varepsilon \exp \left(\int_{\Gamma} \log h(t) dZ(t) \right).
 \end{aligned}$$

Let us estimate $\int_{\Gamma} \log h(t) dZ(t)$:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \log h(t) dZ(t) &= \int_{\gamma} \log M(t) dZ(t) + \int_{\Gamma \setminus \gamma} \log M(t) dZ(t) - \int_{\Gamma \setminus \gamma} \log \varepsilon dZ(t) \\
 &\leq \log \sup_{t \in \Gamma} M(t) \int_{\Gamma} dZ(t) - \log \varepsilon \int_{\Gamma \setminus \gamma} dZ(t) \\
 &= \log \sup_{t \in \Gamma} M(t) - (1 - \mu_Z(\gamma)) \log \varepsilon, \quad \text{where } \mu_Z(\gamma) = \int_{\gamma} dZ(t).
 \end{aligned}$$

Hence

$$C_1 \varepsilon \exp \left(\int_{\Gamma} \log h(t) dZ(t) \right) = C_2 \varepsilon \varepsilon^{\mu_Z(\gamma) - 1} = C_2 \varepsilon^{\mu_Z(\gamma)}.$$

Since ε is arbitrary small we obtain $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in U_A} |y_n^*(y)| = 0$ and hence TU_A is a limited set in B .

Definition. Let A be a complex Banach space and let E be a bounded subset of A . The measure of noncompactness of E , $\Psi_A(E)$ is defined by

$$\Psi_A(E) = \inf \{ \varepsilon > 0 : E \text{ can be covered by finitely many sets of diameter } \varepsilon \}.$$

Let $k \geq 0$, then a map $T \in L(A, B)$ is called a K -set contraction iff

$$\Psi_B(T(E)) \leq k \Psi_A(E)$$

for all bounded sets E and

$$\beta(T) = \min \{ k : T \text{ is a } K\text{-set contraction} \}$$

is called the measure of noncompactness of T .

The following assertion is a generalization of Theorem 1 from [7].

Theorem 3. 1) Let $A_t, t \in \Gamma$, be a bounded family of Banach spaces, \bar{B} — an arbitrary Banach space and the Banach space A belongs to the class $K(A, Z)$. Let γ_i be Z -measurable subsets of Γ such that $\bigcup_{i=1}^n \gamma_i = \Gamma$. Suppose that $T \in L(\bar{B}, \bar{A}_t)$. Then

$$\beta(T_{A \rightarrow B}) \leq C \prod_{i=1}^n [\mu_Z(\gamma_i)]^{-\mu_Z(\gamma_i)} \left[\beta \left(T_{\sum_{\gamma_i} A_t \rightarrow B} \right) \right]^{\mu_Z(\gamma_i)},$$

where $\mu_Z(\gamma_i) = \int_{\gamma_i} dZ(t)$.

2) Let $A_t, t \in \Gamma$, be a bounded family of Banach spaces, B — an arbitrary Banach space and the Banach space A belongs to the class $J(A, Z)$. Let $T \in L(\bar{B}, \bar{A}_t)$. Then

$$\beta(T_{B \rightarrow A}) \leq C \prod_{i=1}^n \left[\beta \left(T_{B \rightarrow \Delta_{\gamma_i} A_t} \right) \right]^{\mu_Z(\gamma_i)}.$$

Proof. Denote $K_i = \beta \left(T_{\sum_{\gamma_i} A_t \rightarrow B} \right)$ and let $h(t)$ be a step function admitting values $m_i = k_i / \mu_Z(\gamma_i)$ on γ_i , Ω — a bounded subset of A and ε — an arbitrary positive number. Since $A \in K(A, Z)$, there exists a representation $a = \sum_{t_j \in \Gamma} a_{t_j}$, $a_{t_j} \in A_{t_j}$, such that

$$\begin{aligned} \sum_{t_j \in \Gamma} h(t_j) \|a_{t_j}\|_{A_{t_j}} &\leq (1 + \varepsilon) K(h(t), a, A_t) \\ &\leq (1 + \varepsilon) C \exp \left(\int_{\Gamma} \log h(t) dZ(t) \right) \|a\|_A = M \|a\|_A, \end{aligned}$$

where

$$M = (1 + \varepsilon) C \prod_{i=1}^n m_i^{\mu_Z(\gamma_i)}.$$

Denote by Ω_i the set of all elements a_i of the form $a_i = \sum_{t_j \in \gamma_i} a_{t_j}$, $a_{t_j} \in A_{t_j}$.

Obviously $\Omega_i \subset \sum_{\gamma_i} A_t$. Let us note that

$$\Psi_B(T(\Omega_i)) \leq k_i \Psi_{\sum_{\gamma_i} A_t}(\Omega_i).$$

From the inequality

$$\|a_i\|_{\sum_{\gamma_i} A_t} = \inf_{\substack{a_{t_j} \in A_{t_j} \\ t_j \in \gamma_i}} \sum \|a_{t_j}\|_{A_{t_j}} \leq \frac{1}{m_i} \sum_{t_j \in \gamma_i} h(t_j) \|a_{t_j}\|_{A_{t_j}} \leq \frac{1}{m_i} M \|a\|_A$$

we get that

$$\Psi_{\sum_{\gamma_i} A_t}(\Omega_i) \leq \frac{M}{m_i} \Psi_A(\Omega).$$

Then

$$\begin{aligned}\Psi_B(T(\Omega)) &\leq \sum_{i=1}^n k_i \frac{M}{m_i} \Psi_A(\Omega) = \sum_{i=1}^n \mu_Z(\gamma_i) M = M \\ &= (1 + \varepsilon) C \prod_{i=1}^n \left(\frac{k_i}{\mu_Z(\gamma_i)} \right)^{\mu_Z(\gamma_i)}\end{aligned}$$

Since ε is arbitrary, the proof is over.

2) Let now Ω be a bounded subset of B . We use the abbreviations $k_i = \beta(T_{B \rightarrow \Delta_{\gamma_i} A_t})$, $\delta = \Psi_B(\Omega)$. Thus we have the inequalities $\Psi_{\Delta_{\gamma_i} A_t} \leq k_i \delta$. Let $U_1^i, \dots, U_{s_i}^i$ be sets with $\text{diam}_{\Delta_{\gamma_i} A_t} U_j^i \leq k_i \delta$ such that $T(\Omega) = \bigcup_{j=1}^{s_i} U_j^i$ and let $W_{j,k,\dots,m} = U_j^1 \cap U_k^2 \cap \dots \cap U_m^n$ runs the set of all possible intersections of the sets mentioned above.

Then $T(\Omega) \subset \Delta A_t \subset A$ because $\sup_{t \in \Gamma} \|Tz\|_{A_t} \leq \sup_{t \in \Gamma} \|T\|_{B \rightarrow A_t} \|z\|_B < \infty$. For all $a, a' \in A$ the condition $A \in J(A, Z)$ gives the inequality

$$\|a - a'\|_{A_t} \leq C \exp \left(\int \log h^{-1}(t) dZ(t) \right) J(h(t), a - a', A_t),$$

where $h(t)$ is the step function admitting values $M_i = \|a - a'\|_{\Delta_{\gamma_i} A_t}^{-1}$ on the sets γ_i correspondingly. Hence

$$\|a - a'\|_A \leq C \prod_{i=1}^n \|a - a'\|_{\Delta_{\gamma_i} A_t}^{\mu_Z(\gamma_i)} \sup_{t \in \Gamma} \{M(t) \|a - a'\|_{A_t}\} \leq C \prod_{i=1}^n \|a - a'\|_{\Delta_{\gamma_i} A_t}^{\mu_Z(\gamma_i)}$$

and the diameter of the set $W_{j,k,\dots,m}$ in the norm of A does not exceed

$$C \prod_{i=1}^n (\text{diam } W_{j,k,\dots,m})^{\mu_Z(\gamma_i)} \leq C \prod_{i=1}^n (k_i \delta)^{\mu_Z(\gamma_i)}.$$

Therefore

$$\Psi_B(T(\Omega)) \leq C \prod_{i=1}^n k_i^{\mu_Z(\gamma_i)} \Psi_A(\Omega)$$

and the theorem is proved.

Since $\beta(T) = 0$ iff T is a compact operator, Theorem 3 is a generalization of Theorem 1 from [8]. Namely, we get the following

Corollary. 1) Let A_t , $t \in \Gamma$, be a bounded family of Banach spaces, B — an arbitrary Banach space and let the Banach space A belongs to the class $K(A, Z)$. Let γ be a subset of Γ with a positive Z -measure. Suppose that $T \in L(\overline{A}_t, B)$ and T is a compact operator from $\sum_{\gamma} A_t$ into B . Then $T : A \rightarrow B$ is a compact operator.

2) Let A_t , $t \in \Gamma$ be a bounded family of Banach spaces, B — an arbitrary Banach space and the Banach space A belongs to the class $J(A, Z)$. Let $T \in L(\overline{B}, \overline{A}_t)$. Suppose that $T : B \rightarrow \Delta_{\gamma} A_t$ is a compact operator. Then $T : B \rightarrow A$ is a compact operator.

Here we shall note that in [8], Theorem 1 (in its first part), the requirement concerning $\|T/A_t\|_{A_t \rightarrow B}$ is weaker than $\sup_{t \in \Gamma} \|T/A_t\|_{A_t \rightarrow B} < \infty$, namely it

is enough to suppose that there exists a Z -measurable function $M(t)$, satisfying $M(t) \geq \|T/A_t\|_{A_t \rightarrow B}$, and $\log M(t)$ is Z -integrable. We need the boundedness of $\|T/A_t\|_{A_t \rightarrow B}$ in the first part of Theorem 3 to be sure that T is a bounded operator from $\sum_{\gamma_i} A_i$ into B ($i = 1, \dots, n$). Let us note that in the definition of the class $K_\theta(A_t)$ from [8] (analogous to our class $K(A, Z)$) the function $M(t)$ (corresponding to our function $h(t)$) is not necessarily bounded, but $\log M(t) \in L_1$ and this explains the difference between the conditions in the corollary and Theorem 1 from [8]. In the second part of Theorem 3 (of the corollary, correspondingly) the requirement $T \in L(\overline{B}, \overline{A}_t)$ can be replaced by $T \in L(B, \Delta A_t)$. Indeed, it follows by the uniformly boundedness principle that $\sup_{t \in \Gamma} \|T\|_{B \rightarrow A_t} < \infty$ ($F_t(x) = \|Tx\|_{A_t}$

is a family of semiadditive continuous functionals, uniformly bounded on $t \in \Gamma$: $F_t(x) \leq \|T\|_{B \rightarrow \Delta A_t} \|x\|_B$). It is sufficient even to require that $T \in L(B, A_t)$ for $t \in \Gamma$ and that the image of $T(B)$ is a subset of the space ΔA_t .

Our next purpose is to generalize some facts concerning H_θ -spaces ($0 \leq \theta \leq 1$), known for couples of Banach spaces to the case of infinite families of Banach spaces. When we speak about families, θ will denote a point of $D = \{z : |z| < 1\}$, γ — a subinterval of $I = [0, 2\pi)$ with $0 < \mu_\theta(\gamma) < 1$, where $\mu_\theta(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma P(\theta, t) dt$,

$P(\theta, t)$ being Poisson kernel.

Definition [9]. Let $0 \leq \theta < 1$, $1 \leq p < \infty$. An operator T between the Banach spaces A and B is called (p, θ) -absolutely continuous iff there exists an absolutely p -summing operator from A into a suitable Banach spaces C such that the inequality $\|Tx\| \leq \|Sx\|^\theta \|x\|^{1-\theta}$ holds for all $x \in A$.

In other words, the class of all (p, θ) -absolutely continuous operators coincides with "interpolation procedure ideal" $(\Pi_p)_\theta$, where Π_p is the class of all absolutely p -summing operators ([9]). Let us remember that $T \in \overline{\Pi}_1^{inj}$ iff there exists a Banach space C and an absolutely summing operator S such that $\|Tx\| \leq N(\varepsilon) \|Sx\| + \varepsilon \|x\|$ for any $x \in A$ and any $\varepsilon > 0$, where $N : R^+ \rightarrow R^+$. The operators from $\overline{\Pi}_1^{inj}$ are called absolutely continuous.

Let (cf. [9]) H_1 be the class of all Banach spaces A for which any bounded linear operator, acting from l_1 into A , is absolutely continuous operator. When $0 < \theta < 1$ suppose H_θ be the class of all Banach spaces A for which any bounded linear operator, acting from l_1 into A , belongs to the class $(\Pi_2)_\theta$ (of $(2, \theta)$ -absolutely continuous operators). Indeed $(\Pi_2)_\theta$ can be replaced by any class $(\Pi_p)_\theta$, $1 \leq p \leq 2$.

Before formulating the next results we have to give the definition of St. Louis interpolation spaces. Instead of writing $A(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, Γ being the boundary of D as it is in [3], we write A_t , $t \in I$.

Definition. Let A_t , $t \in I$ be a family of Banach spaces over the complex field. We say (cf. [3]) that A_t , $t \in I$, is an interpolation family if:

1) There exists a Banach space U such that A_t is continuously embedded in U ;

2) For every $a \in \cap A_t$, $\|a\|_{A_t}$ is a measurable function;

3) Let $\beta = \left\{ b \in \cap A_t, \int_0^{2\pi} \log^+ \|a\|_{A_t} P(\theta, t) dt < \infty \right\}$, β is called log-intersection space for A_t , $t \in I$, and there exists a measurable function $k(t)$, satisfying

$$\int_0^{2\pi} \log^+ k(t) P(\theta, t) dt < \infty,$$

such that for each $b \in \beta$: $\|b\|_{\mathcal{U}} \leq k(t) \|b\|_{A_t}$.

Let A_t , $t \in I$ be an interpolation family and \mathcal{G} be the set of all functions of the type $\sum_{j=1}^n \psi_j(z) b_j$, where $b_j \in \beta$ and $\psi_j(z)$ belongs to the positive Nevalinna class

$N^+(D)$ (let us remember that $f \in N^+(D)$ means that

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{it})| dt = \int_0^{2\pi} \log^+ |f(e^{it})| dt)$$

such that $\text{ess sup}_{t \in \gamma} \|g(e^{it})\|_{A_t} < \infty$. Let \mathcal{F} be the completion of \mathcal{G} in the norm

$$\|g\|_{\infty} = \text{ess sup}_{t \in \gamma} \|g(e^{it})\|_{A_t}.$$

For $|\theta| < 1$ in [3] a space $A[\theta]$ is defined which has interpolation properties, namely the space $A[\theta]$ is defined like the quotient space of $\mathcal{F} = \mathcal{F}(A_t, I)$ modulo the subspaces of functions in \mathcal{F} vanishing at θ and

$$\|a\|_{A[\theta]} = \inf \{ \|f(\cdot)\|_{\mathcal{G}}, f(\theta) = a \}.$$

Now we need a construction connected with a concrete family A_t , $t \in I$, where $A_t = H_t$ for $t \in \gamma$, H_t being Hilbert space, namely we want to construct $L_{\gamma}^2(H_t)$.

Let \mathcal{G}^1 denotes the set of functions of the form $x(t) = \sum_{i=1}^n h_i(t) a_i$, $n \in \mathbf{N}$ ($h_i(t)$

— measurable functions on $t \in \gamma$, $a_i \in \beta^1$ — the log-intersection of the family H_t , $t \in \gamma$), such that $\text{ess sup}_{t \in \gamma} \|x(t)\|_{H_t} < \infty$. Let $x(t), y(t) \in \mathcal{G}^1$, $y(t) = \sum_{j=1}^n l_j(t) b_j$. As a_i, b_j belong to each H_t , the scalar product $(a_i, b_j)_{H_t}$ is defined. Since

$$(a, b)_{H_t} = \frac{1}{2} [\|a + b\|_{H_t}^2 - \|ia + b\|_{H_t}^2 + (i-1) (\|a\|_{H_t}^2 + \|b\|_{H_t}^2)],$$

it follows that $(a_i, b_j)_{H_t}$ is a measurable function on $t \in \gamma$. The same is true for $\sum_{i,j} h_i(t) l_j(t) (a_i, b_j)_{H_t}$ and hence $(x(t), y(t))_{H_t}$ is a measurable function. For

$x, y \in \mathcal{G}^1$ we can define $(x, y) = \int_{\gamma} (x(t), y(t))_{H_t} dt$. It is easy to see that this

is a scalar product and $(x, x) = 0$ iff $\|x(t)\|_{H_t} = 0$, i. e. on $t \in \gamma$. As usual

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \left(\int_{\gamma} \|x(t)\|_{H_t}^2 dt \right)^{1/2}. \text{ Let us denote by } L_{\gamma}^2(H_t) \text{ the completion of}$$

\mathcal{G}^1 in this norm. It is clear that if $x, y \in L_{\gamma}^2(H_t)$, then there exist two sequences $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ of elements of \mathcal{G}^1 such that $(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n)$ and hence $L_{\gamma}^2(H_t)$ is a Hilbert space. If $f \in \mathcal{F}$, then $x(t) = f(e^{it})$, $t \in \gamma$, can be considered as an element of $L_{\gamma}^2(H_t)$. (If $A_t = H_t$ on γ .)

Theorem 4. *Let A_t be an interpolation family of Banach spaces such that $A_t = H_t$ on γ , H_t being Hilbert spaces. Then the interpolation space $A[\theta]$ belongs to the class $H_{1-\mu_{\theta}(\gamma)}$.*

Proof. Let x_1, \dots, x_n be elements of the unit ball $U_{A[\theta]}$ of the space $A[\theta]$, ε — an arbitrary positive number. We can find functions $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathcal{F}$ such that

$$\|f_k\|_{\mathcal{G}} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in I} \|f_k(e^{it})\|_{A_t} \leq 1 + \varepsilon, \quad f_k(\theta) = x_k.$$

Let $\xi_n \in U_{I_1^{(n)}}$. Then the function $g(z) = \sum_{k=1}^n \xi_k f_k(z)$ is from \mathcal{F} again and $\|g\|_{\mathcal{G}} \leq 1 + \varepsilon$.

Now we are going to use the inequality (2.4a) from [3], namely

$$\|g(\theta)\|_{A[\theta]} \leq \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \|g(e^{it})\|_{A_t} P(\theta, t) dt \right).$$

In this way we obtain

$$\|g(\theta)\|_{A[\theta]} \leq C(\varepsilon) \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \ln \|g(e^{it})\|_{H_t} P(\theta, t) dt \right),$$

where

$$C(\varepsilon) = \exp \left(\ln(1 + \varepsilon) \frac{1}{2\pi} \int_{I \setminus \gamma} P(\theta, t) dt \right) = (1 + \varepsilon)^{1 - \mu_{\theta}(\gamma)}.$$

For estimating

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \ln \|g(e^{it})\|_{H_t} \frac{P(\theta, t)}{\mu_{\theta}(\gamma)} dt \cdot \mu_{\theta}(\gamma)$$

we use Jensen's inequality for "exp" and we get

$$\| \sum \xi_k x_k \|_{A[\theta]} \leq C(\varepsilon) \left[\frac{\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \|g(e^{it})\|_{H_t} P(\theta, t) dt}{\mu_{\theta}(\gamma)} \right]^{\mu_{\theta}(\gamma)}$$

To estimate the latest integral (let us call it I) we use Hölder's inequality with $p = p' = \frac{1}{2}$, namely

$$\begin{aligned} I &\leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} P(\theta, t) dt \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} (\|g(e^{it})\|_{H_t} \sqrt{P(\theta, t)})^2 dt \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{\mu_{\theta}(\gamma)}(1 + \varepsilon) \sqrt{\mu_{\theta}(\gamma)} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \left\| \frac{\sum_{k=1}^n f_k(e^{it}) \xi_k \sqrt{P(\theta, t)}}{(1 + \varepsilon) \sqrt{\mu_{\theta}(\gamma)}} \right\|_{H_t}^2 dt \right)^{1/2} \\ &= \mu_{\theta}(\gamma)(1 + \varepsilon) \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k y_k \right\|_{L^2_{\gamma}(H_t)}, \end{aligned}$$

where $y_k(t) = \frac{f_k(e^{it}) \sqrt{P(\theta, t)}}{2\pi(1 + \varepsilon) \sqrt{\mu_{\theta}(\gamma)}}$ belongs to $U L^2_{\gamma}(H_t)$. Thus we have obtained that

$$\left\| \sum_{k=1}^n \xi_k x_k \right\|_{A[\theta]} \leq (1 + \varepsilon) \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k y_k \right\|_{L^2_{\gamma}(H_t)}^{\mu_{\theta}(\gamma)}$$

Using Theorem 7.1 from [9], we get that $A[\theta] \in H_{1-\mu_{\theta}(\gamma)}$. The theorem is proved.

Let \mathcal{G}^2 be the set of functions of the form $x(t) = \sum_{i=1}^n h_i(t) a_i$ ($h_i(t)$ — measurable functions on $t \in \gamma$, $a_i \in \beta^2$ — the log-intersection of A_t , $t \in \gamma$), such that

$\text{ess sup}_{t \in \gamma} \|x(t)\|_{A_t} < \infty$. We denote by $L^p_{\gamma}(A_t)$ ($1 \leq p < \infty$) the completion of \mathcal{G}^2 in

the norm $\left(\int_{\gamma} \|x(t)\|_{A_t}^p dt \right)^{1/p}$.

Proposition. Let A_t , $t \in I$, be an interpolation family of Banach spaces, $0 < \alpha < 1$, $|\theta| < 1$, $\gamma \subset I$ with $0 < \mu_{\theta}(\gamma) < 1$. If $L^2_{\gamma}(A_t) \in H_{\alpha}$, then $A[\theta] \in H_{1+\alpha\mu_{\theta}(\gamma)-\mu_{\theta}(\gamma)}$.

Proof. In the same way as it is done in Theorem 4, we fix $\varepsilon > 0$, take $x_1, x_2, \dots, x_n \in A[\theta]$ and construct $y_k(t)$ with $\|y_k(t)\|_{L^2_{\gamma}(A_t)} \leq 1$, satisfying the inequality

$$\left\| \sum_{k=1}^n \xi_k x_k \right\|_{A[\theta]} \leq C \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k y_k \right\|_{L^2_{\gamma}(A_t)}^{\mu_{\theta}(\gamma)}$$

As $L_\gamma^2(A_t) \in H_\alpha$, after Theorem 7.1 from [9] we can find $z_1, z_2, \dots, z_n \in U_{l_2}$ such that

$$\left\| \sum_{k=1}^n \xi_k y_k \right\|_{L_\gamma^2(A_t)} \leq C_1 \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k z_k \right\|_{l_2}^{1-\alpha},$$

i. e.

$$\left\| \sum_{k=1}^n \xi_k x_k \right\|_{A[\theta]} \leq C_2 \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k z_k \right\|_{l_2}^{(1-\alpha)\mu_\theta(\gamma)}$$

Using again Theorem 7.1 from [9] we find that the space $A[\theta]$ belongs to H_β , where $\beta = 1 - (1 - \alpha)\mu_\theta(\gamma) = 1 - \mu_\theta(\gamma) + \alpha\mu_\theta(\gamma)$. The proposition is proved.

Let us note that it is possible to prove the proposition with the requirement $L_\gamma^p(A_t) \in H_\alpha$, $1 \leq p < \infty$ instead of $L_\gamma^2(A_t) \in H_\alpha$. More precisely, for proving the inequality

$$\left\| \sum_{k=1}^n \xi_k x_k \right\|_{A[\theta]} \leq C \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k y_k \right\|_{L_\gamma^p(A_t)}^{\mu_\theta(\gamma)}$$

we use Hölder's inequality with power p , $1 \leq p < \infty$, and the inequalities

$$\frac{1 - |\theta|}{1 + |\theta|} \leq P(\theta, t) \leq \frac{1 + |\theta|}{1 - |\theta|},$$

and finally

$$\|g(\theta)\|_{A[\theta]} \leq C(\varepsilon, \theta) \left(\frac{1}{2\pi} \int_\gamma \|g(e^{it})\|_{A_t}^p P(\theta, t) dt \right)^{1/p}.$$

Let note also that in the same way as it is done in the above proposition, we could prove that if $L_{[0, 2\pi]}^2(A_t) \in H_\alpha$ (or $L_{[0, 2\pi]}^p(A_t) \in H_\alpha$, $1 \leq p < \infty$), then $A[\theta] \in H_\alpha$.

Let after [9] note that belonging to the class H_α is a super property, every H_α -space is a superreflexive space, moreover, if $1 \leq p < \frac{2}{1+\alpha}$ or $\frac{2}{1-\alpha} < p \leq \infty$, then H_α -space can not contain $l_p^{(n),s}$ uniformly. As a corollary from Theorem 4 we get that if $|\theta| < 1$, $\gamma \subset I$, $0 < \mu_\theta(\gamma) < 1$, A_t , $t \in I$ — an interpolation family, $A_t = H_t$ on γ , H_t being Hilbert spaces, then $A[\theta]$ does not contain $l_p^{(n),s}$ uniformly when $1 \leq p < \frac{2}{2 - \mu_\theta(\gamma)}$ or $\frac{2}{\mu_\theta(\gamma)} < p \leq \infty$.

Let remember that for $0 < \varepsilon \leq 2$ an $(1, \varepsilon)$ -tree in a Banach space A consists of 2 points x_1, x_2 with $\|x_1 - x_2\| \geq \varepsilon$. An (n, ε) -tree, $n \geq 2$, consists of 2^n points $x_1, x_2, \dots, x_{2^n} \in A$, such that:

- a) $\|x_{2i-1} - x_{2i}\| \geq \varepsilon$, $i = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$;
- b) the mid-points $\frac{1}{2}(x_{2i-1} - x_{2i})$, $i = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$, form an $(n-1, \varepsilon)$ -tree.

For a given Banach space A the following characteristic $b_A(\varepsilon)$ is defined like $b_A(\varepsilon) = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \exists(n, \varepsilon)\text{-tree in } U_A\}$. Let $d_n^A(x_i) = \{\inf\{\|\sum \xi_i x_i\|_A, \sum \xi_i = 1\}$ be the distance between the origin and the "absolutely convex sphere" of $\{x_1, \dots, x_n\}$. As it is done in [9], we get some quantitative estimates for $b_{A[\theta]}(\varepsilon)$ and $d_n^{A[\theta]}(x_i)$, namely

$$b_{A[\theta]}(\varepsilon) \leq C\varepsilon^{-\frac{2}{\mu_\theta(\gamma)}}, \quad 0 < \varepsilon < 2,$$

$$d_n^{A[\theta]}(x_i) = Cn^{-\frac{\mu_\theta(\gamma)}{2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

when the family A_t has the properties required in Theorem 4.

REFERENCES

1. C w i k e l, M., S. J a n s o n. Real and complex interpolation methods for finite and infinite families of Banach spaces. — Adv. in Math., **66**, 1987, 234–290.
2. F a v i n i, A. Su una estensione del metodo d'interpolazione complesso. — Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **47**, 1972, 243–298.
3. C o i f m a n, R., M. C w i k e l, R. R o c h b e r g, Y. S a g h e r, G. W e i s s. A theory of complex interpolation for families of Banach spaces. — Adv. in Math., **43**, 1982, 203–229.
4. S p a r r, G. Interpolation of several Banach spaces. — Ann. Mat. Pura Appl., **99**, 1974, 247–316.
5. N i k o l o v a, L. I. On classes K_θ and J_θ in the case of interpolation in family of Banach spaces. — C. R. Acad. Sci. Bulg., **41**, No 3, 1988, 9–12.
6. M a s t y l o, M. On interpolation spaces with Gelfand–Phillips property. — Math. Nachr., **137**, 1988, 27–34.
7. T e i x e i r a, M. F., D. E. E d m u n d s. Interpolation theory and measure of noncompactness. — Math. Nachr., **104**, 1981, 129–135.
8. N i k o l o v a, L. I. On interpolation of compactness property in families of Banach spaces. — Research reports 1990-14, ISSN: 1101–1327, Lulea University.
9. M a t t e r, U. Absolutely continuous operators and super-reflexivity. — Math. Nachr., **130**, 1987, 193–216.

Received 20.03.1991

ЕКСТРЕМАЛНИ ЛОКАЛНО ДЪРВООБРАЗНИ ГРАФИ

НИКОЛА МАРТИНОВ

Никола Мартинов. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЛОКАЛЬНО-ДЕРЕВООБРАЗНЫЕ ГРАФЫ

Рассматривается множество LT_1 тех локально-деревообразных графов, которые имеют минимальное число ребер по отношению к числу вершин. Найдены несколько характеристик класса LT_1 . Для произвольного графа G из LT_1 определена его линейная древесность $\Xi(G)$, т. е. минимальное число систем вершинно-непересекающихся

простых цепей, покрывающих G . Доказано, что $\Xi(G) = \left\lfloor \frac{\Delta(G) + 1}{2} \right\rfloor$.

Nikola Martinov. EXTERNAL LOCALLY-TREE-LIKE GRAPHS

We deal with the set LT_1 of those locally-tree-like graphs, which have a minimal number of edges according to the number of the vertices. Different characteristics of the class LT_1 are found. If G is an arbitrary graph in LT_1 , we find its linear arboricity $\Xi(G)$, i.e. the minimal number of

vertex disjoint systems of simple chains covering G . It is proved that $\Xi(G) = \left\lfloor \frac{\Delta(G) + 1}{2} \right\rfloor$.

1. ВЪВЕДЕНИЕ И ТЕРМИНОЛОГИЯ

Разглеждаме крайни и неориентирани графи без възли и кратни ръбове, придържайки се към терминологията и означенията на Харари [3]. Ако G е граф, с $V(G)$ и $E(G)$ означаваме съответно съвкупностите на върховете и ръбовете му; за краткост вместо $|V(G)|$ ще пишем $|G|$. С $V_m(G)$ означаваме съвкупността на върховете със степен m . Подграф на G , който е изоморфен на пълния граф K_n с n върха, наричаме n -клика. Нека $X_n(G)$ е съвкупността на n -кликите. Подмножеството $U \subset V(G)$ е разделящо, когато графът $G - U$ (породен от $V(G) \setminus U$, т. е. максималният

подграф с тези върхове) е несвързан. Минималните (относно включване) разделящи множества наричаме върхови разрези. С $R(G)$ означаваме съвкупността на върховите разрези, а с $\hat{R}(G)$ — съвкупността от подграфите на G , породени от елементите на $R(G)$. Ако $v \in V(G)$, с G_v ще означим подграфа на G , породен от съседните на v върхове. Нека $\Delta(G)$ е максималната степен на върховете на G . Когато всички върхове имат една и съща степен (m), G е *регулярен граф* (m -регулярен). Графът G се нарича *локално дървообразен*, когато за всеки негов връх v подграфът G_v е дърво, т. е. свързан граф без цикли. С LT означаваме съвкупността на свързаните локално дървообразни графи. Графите от класа LT са изследвани в [1, 2, 5] относно връзките между броя на върховете и ръбовете им и относно конструктивното им описание. С LT_1 означаваме съвкупността на графите от LT , които имат минимален брой ръбове (спрямо броя на върховете им). В тази статия, като се използват някои известни резултати за LT , се дават различни характеристики на класа LT_1 и се определят някои негови инварианти.

Всяко обединение на върхово непресичащи се прости вериги се нарича *линейна гора*. Линейната дървесност $\Xi(G)$ на графа G е минималният брой линейни гори, чието обединение е G . Този инвариант, посещ големи възможности за приложения, се определя доста трудно. Почти непосредствено се съобразява, че $\Xi(G) \geq \left\lfloor \frac{\Delta(G) + 1}{2} \right\rfloor$, но не са намерени всички графи, за които се достига равенство. Хипотезата, издигната в [4], че ако G е m -регулярен граф, то $\Xi(G) = \left\lfloor \frac{\Delta(G) + 2}{2} \right\rfloor$ досега е потвърдена само за някои стойности на m . Линейната дървесност на граф с произволни степени на върховете е определена в съвсем малко случаи. Когато G е дърво, изпълнено е

$$(1) \quad \Xi(G) = \left\lfloor \frac{\Delta(G) + 1}{2} \right\rfloor,$$

което се съобразява лесно, защото G няма цикли. Когато всеки ръб на G може да се съдържа най-много в един цикъл, т. е. когато G е кактус, равенството (1) продължава да е в сила (вж. [6]). Тук доказваме, че (1) е изпълнено за всеки граф от LT_1 ; тогава ръб на G може да се съдържа в произволен брой цикли.

2. КОНСТРУКТИВНО ХАРАКТЕРИЗИРАНЕ НА КЛАСА LT_1

В [2] се изследва клас графи, обхващащ съвкупността LT , но от доказаната там теорема 1 непосредствено следва, че за LT е в сила

Лема 1. Следните три твърдения са еквивалентни:

а) $G \in LT$ и $|E(G)| = 2|G| - 3$;

б) G се получава от K_2 чрез последователно прилагане на операцията „добавяне на нов връх и свързване на този връх с два съседни върха“;

в) $G \in LT_1$.

Ще докажем

Теорема 1. Нека $G \in LT$. Тогава следните условия са еквивалентни:

а) $\hat{R}(G) \subset E(G)$;

б) $|E(G)| = 2|G| - 3$;

в) G се получава от K_2 чрез последователно прилагане на операцията „добавяне на нов връх и свързване на този връх с два съседни върха“.

Доказателство. 1. От а) следва б). Доказателството на този пункт ще извършим чрез индукция по броя на върховете. Минималният граф от LT , който има върхови разрези, е $K_4 - x$ и за него е изпълнено б). Нека $|G| > 4$ и $a \in R(G)$, като u и v са върховете в a , които са съседни. Означаваме с G_0 една от компонентите на $G - a$. Нека G' е обединението на G_0 с ръба uv , а G'' — допълнението на G_0 до G . Тъй като u е връх на G_v (и v е връх на G_u), то G' и G'' са графи от LT и съгласно индукционното предположение

$$|E(G')| = 2|G'| - 3, \quad |E(G'')| = 2|G''| - 3.$$

Оттук, като вземем предвид, че

$$|G| = |G'| + |G''| - 2, \quad |E(G)| = |E(G')| + |E(G'')| - 1,$$

получаваме б).

2. От в) следва а). Отново ще приложим индукция по броя на върховете. За $K_4 - x$ е изпълнено а). Предполагаме $|G| > 4$. Съгласно в) графът G е получен от граф G_1 чрез добавяне на нов връх и съединяването му с два съседни върха u и v . Съгласно индукционното предположение $\hat{R}(G_1) \subset E(G_1)$. Но $\hat{R}(G)$ се състои от $\hat{R}(G_1)$ и ръба uv , следователно и за G е изпълнено а).

От твърденията 1 и 2 и от лема 1 следва еквивалентността на всеки две от твърденията а), б) и в). От твърдението в) на тази теорема непосредствено получаваме следните две следствия:

Следствие 1. Всеки граф от LT_1 е еднозначно 3-оцветим.

Следствие 2. Всеки граф от LT_1 е планарен.

3. ЛИНЕЙНА ДЪРВЕСНОСТ НА ГРАФИТЕ ОТ LT_1

Лема 2. За всеки граф от LT_1 е изпълнено поне едно от следните две твърдения:

а) има връх със степен 2, на който поне единият от съседите не е с максимална степен;

б) има връх с максимална степен, на който поне два от съседите са със степен 2.

Доказателство. Ще приложим индукция по броя n на върховете. Единственият граф от LT_1 с 4 върха е $K_4 - x$ и за него лемата е изпълнена. Предполагаме, че $n > 4$ и че лемата е изпълнена за всеки граф от LT_1 с $n - 1$ върха, като ще я докажем за графа G от LT_1 с n върха. Съгласно лема 1 графът G се получава от граф $H \in LT_1$ чрез

добавяне на нов връх v и свързване на v с два съседни върха v_1 и v_2 на H . Съгласно индукционното предположение, за H е изпълнено поне едно от твърденията а) и б).

Нека за H е изпълнено а). Това означава, че H съдържа триъгълник $u_1 u_2$, като u е със степен 2, а u_1 — със степен, по-малка от максималната степен $m = \Delta(H)$. От $|H| \geq 4$ следва, че $m > 3$. Да допуснем, че за G не е изпълнено а). От това следва, че v не е съседен с u и че съседите на u и v са с максималната степен на G (спрямо G). Оттук получаваме $\deg_H u_1 = m - 1$, $v_1 = u_1$, което означава, че за G е изпълнено б): u_1 е с максималната степен m на G , а съседите u и v на u_1 са със степен 2 спрямо G .

Нека за H е изпълнено б), но не е изпълнено а). Тогава H ще има два триъгълника $u w_1 w_2$ и $u w_3 w_4$, като w_2 и w_4 са със степен 2, а u, w_1, w_3 — със степен $m = \Delta(H)$. Ако $w_1 = w_3 = v_1$ и $w = v_2$, то за G ще е изпълнено б). Ако пък това твърдение не е изпълнено, но пак $\Delta(G) = m + 1$, тъй като поне единият от несъседните върхове w_2 и w_4 ще има степен 2 (спрямо G), то за G ще е изпълнено а). Поради това предполагаме $\Delta(G) = m$. Тогава съгласно свойството в) на теорема 1 връхът v не може да бъде съседен с никой от w_1, w_2, w_3, w_4, w и следователно за G ще е изпълнено б). С това доказателството на лемата е завършено.

Ще въведем още някои означения. Нека подграфът h на графа H е линейна гора, т. е. обединение на върхово непресичащи се прости вериги. Ако връхът v на H е вътрешен или е край на верига от h , или не принадлежи на никоя от веригите на h , означаваме съответно

$$v \in h, \quad v \in_0 h, \quad v \notin h.$$

Теорема 2. Ако $G \in LT_1$, $|G| \geq 4$ и $\Delta(G) = m$, то $\Xi(G) = \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$.

Доказателство. Ще приложим индукция по броя на върховете. Ако $|G| = 4$, то $G = K_4 - x$ и $\Xi(G) = 2$, т. е. теоремата е изпълнена. Предполагаме, че $|G| > 4$ и теоремата е изпълнена за всеки граф от LT_1 с $|G| - 1$ върха. Съгласно лема 2 за G е изпълнено поне едно от твърденията а) и б) в нея.

1. Нека е изпълнено а), т. е. G има триъгълник $uv_1 v_2$, като $\deg v = 2$, а $\deg v_1 \leq m - 1$. Графът $G - v = H \in LT_1$ и съгласно индукционното предположение $\Xi(H) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$, където $n = \Delta(H)$. Класовете вериги (линейни гори) на H , чийто брой е $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$, означаваме съответно

$$(2) \quad h_1, h_2, \dots, h_s, \quad s = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor.$$

Очевидно $n \leq m$ и е възможно само или $n = m$, или $n = m - 1$.

1.1. Нека $n = m$. Тогава $\deg_H v_1 = \deg_G v_1 - 1 \leq n - 2$. Оттук следва, че или v_1 не е връх на никоя от веригите на поне един клас от (2), или е

край на вериги от поне два класа. Следователно можем да предпологаеме, че е изпълнен поне един от следните два случая:

а') $v_1 \not\sim h_1$;

б') $v_1 Z_0 h_1$ и $v_1 Z_0 h_2$.

Освен това $\deg_H v_2 = \deg_G v_2 - 1 \leq n - 1$, което означава, че за поне един клас h от (2) не е изпълнено $v_2 Z h$. Тогава прибавяме ръба $v_2 v$ към класа h ; в случая а') прибавяме ръба $v_1 v$ към класа h_1 , а в случая б') — към този от класовете h_1 и h_2 , който е различен от h . Така коригираните и запазени по брой класове от (2) образуват покритие на G от линейни гори. Следователно $\Xi(G) = \Xi(H) = \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$.

1.2. Нека $n = m - 1$. Това означава, че само v_2 има степен m . Сега ще разгледаме отделно случаите, когато m е четно или нечетно.

1.2.1. Нека $m = 2k$ (k — цяло). От $\deg_H v_2 = n$ и n — нечетно следва, че v_2 е край на верига от клас h от (2). От $\deg_H v_1 \leq n - 1$ и n — нечетно следва, че v_1 или не е връх на никоя верига от някой клас от (2), или е край на вериги от поне два класа от (2). Следователно отново попадаме в разгледания случай 1.1.

1.2.2. Нека $m = 2k + 1$. Сега $\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor = k + 1$, а $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = k$. Следователно, ако към класовете (2) прибавим нов клас h_{k+1} , съдържащ единствено веригата $v_1 v v_2$, ще получим точно $\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$ линейни гори, покриващи G . С това изчерпахме всички подслучаи на случай 1.

2. Нека за G е изпълнено твърдението б) на лема 2, т. е. G има два триъгълника $vv_1 v_2$ и $uv_1 v_2$, като $\deg v = \deg u = 2$ и $\deg v_2 = m$. Предполагаме още, че за G не е изпълнено твърдението а) на лема 2, т. е. $\{u_1, v_1\} \not\subset V_m(G)$. Отново означаваме $G - v = H$, $\Delta(H) = n$. За графа H е в сила теорема 2, поради което предпологаеме, че този граф е разбит на $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ непресичащи се линейни гори, означени с (2). И сега за n е изпълнено или $n = m$, или $n = m - 1$.

2.1. Нека $n = m$. Ще разгледаме отделно случаите, когато m е четно или нечетно.

2.1.1. Нека $m = 2k$. Тогава $\deg_H v_1 = \deg_H v_2 = 2k - 1$, откъдето следва, че v_1 и v_2 са краища на вериги от два класа от (2), които могат и да съвпадат.

2.1.1а) Нека $v_1 Z_0 h_1$, $v_2 Z_0 h_2$. Тогава причисляваме ръбовете vv_1 и vv_2 съответно към h_1 и h_2 и получаваме същия брой $\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$ непресичащи се линейни гори, покриващи G .

2.1.1б) Нека $v_1 Z_0 h_1$, $v_2 Z_0 h_1$. Ако ръбът vv_2 не принадлежи на h_1 (т. е. ако е от h_2), прехвърляме го към h_1 и получаваме, че v_1 и v_2 са краища на вериги от различни класове. Така свеждаме случая към разгледания вече случай 2.1.1а).

Нека ръбът uv_2 е от класа h_1 . Ако $u \in Z_0 h_1$, като причислим ръбовете vv_1 и vv_2 към h_1 , няма да получим цикъл, а покритие на G от същия брой $\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$ непресичащи се линейни гори. Нека $u \in Z h_1$. Тогава ръбът u_1v_2 е извън h_1 ; нека е от h_2 . Правим следната промяна: прехвърляме ръба u_1v_2 към h_2 , а u_1v_1 към h_1 . За така коригираните линейни гори върховете v_1 и v_2 са краища на вериги от различни класове и отново свеждаме случая към 2.1.1а). С това случаят 2.1.1 е напълно изчерпан.

2.1.2. Нека $m = 2k + 1$. Тогава $\deg_H v_1 = \deg_H v_2 = 2k$. Това означава, че всеки от върховете v_1 и v_2 или е извън някой от класовете (2), или е край на две вериги от тези класове. Следователно изпълнено е:

$$v_1 \notin h_1 \text{ или } v_1 \in Z_0 h_1 \text{ и } v_1 \in Z_0 h_2; \quad v_2 \notin h'_1 \text{ или } v_2 \in Z_0 h'_1 \text{ и } v_2 \in Z_0 h'_2,$$

като $h'_1 \neq h'_2$, но е възможно съвпадение на някой от h_1, h_2 с някой от h'_1, h'_2 . Причисляваме ръба vv_1 към h_1 . Ръба vv_2 причисляваме към h'_1 , когато $v_2 \notin h'_1$, и към този от h'_1, h'_2 , който е различен от h_1 , когато $v_2 \in Z_0 h'_1$. Така допълнените класове не съдържат цикли, т. е. са непресичащи се линейни гори, покриващи G . Следователно в този случай $\Xi(G) = \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$.

По този начин е изчерпан случай 2.1.

2.2. Нека $n = m - 1$. Оттук следва, че $u_1 = v_1$ и v_1 и v_2 са единствените върхове със степен m . При $m = 2k + 1$ ще бъде изпълнено $\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor = k + 1$ и $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = k$. Тогава, като добавим към линейните гори (2) още една, съдържаща само веригата v_1v_2 , ще получим $k + 1$ непресичащи се линейни гори, покриващи G , т. е. $\Xi(G) = \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$.

Нека $m = 2k$. Тогава $\deg_H v_1 = \deg_H v_2 = 2k - 1$ и отново попадаме на случай 2.1.1. С това доказателството на теоремата е завършено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартинов, Н. Върху един клас графи. — Год. Соф. унив., Фак. мат. и мех., 71, 1976-77, 119-129.
2. Мартинов, Н. Локално дървообразные графы и их обобщения. — Докл. БАН, 39, № 7, 1986, 45-48.
3. Харари, Ф. Теория графов. М., 1973.
4. Akiyama, J., G. Exoo, F. Harary. Covering and packing in graphs III: Cyclic and acyclic invariants. — Math. Slovaca, 30, 1980, 401-417.
5. Zelinka, B. Locally-tree-like graphs. — Gas. pest. mat., 108, 1983, 230-238.
6. Zelinka, B. Domatic number and linear arboricity of cacti. — Math. Slovaca, 36, 1986, № 1, 49-54.

Получена 21.03.1991

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Книга 1 — Математика

Том 84, 1990

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Livre 1 — Mathématiques

Tome 84, 1990

LEAST FIXED POINTS IN MONOIDAL CATEGORIES WITH CARTESIAN STRUCTURE ON OBJECTS

JORDAN ZASHEV

Йордан Зашев. НАИМЕНЬШИЕ НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ В МОНОИДАЛЬНЫХ КАТЕГОРИЯХ С ДЕКАРТОВОЙ СТРУКТУРЕ НА ОБЪЕКТАХ

В работе предложено обобщение теории рекурсии в итеративных оперативных пространствах Иванова. Обобщение состоит в замены частичного порядка на стрелках в категориях. Для этой цели введено понятие DM-категории. Описан пример DM-категории, в котором третируются некоторые идеализованные недетерминистические программы с доказательствами корректности их работ. Развита теория неподвижных точек определенных функторов в DM-категориях, которая содержит категорных аналогов всех основных результатов абстрактной теории рекурсии в итеративных оперативных пространствах.

Jordan Zashev. LEAST FIXED POINTS IN MONOIDAL CATEGORIES WITH CARTESIAN STRUCTURE ON OBJECTS

The paper contains a generalization of the recursion theory in iterative operative spaces. The generalization consists in replacing the partial order in an operative space with arrows in a category. For that purpose the notion of a DM-category is introduced. An example of a DM-category is described which deals with some kind of idealized nondeterministic programs together with proofs of the correctness of their work. A theory of fixed points of definable functors in DM-categories is developed which contains categorial analogues of all principal results of the abstract recursion theory in iterative operative spaces.

We present a generalization of the recursion theory in iterative operative spaces in the sense of Ivanov [1]. The generalization consists in replacing the partial order in operative spaces by arrows in a suitable category. The structures obtained in

this way are called DM-categories. The method we use is based on an unpublished proof of the first recursion theorem in iterative operative spaces and is essentially a proper generalization of the usual method of coding in the ordinary recursion theory.

1. DEFINITIONS

1.1. DM-CATEGORIES

A DM-category will be a category \mathcal{F} with two bifunctors $\mathbb{M} : \mathcal{F}^2 \rightarrow \mathcal{F}$ and $\mathbb{D} : \mathcal{F}^2 \rightarrow \mathcal{F}$, three objects I, L, R , and six natural isomorphisms $\alpha, \lambda, \rho, l, r, i$, satisfying (DM1)–(DM8) below. We shall call \mathbb{M} “multiplication” and we shall write xy for $\mathbb{M}(x, y)$, where x and y are objects or arrows in \mathcal{F} . Similarly, we shall call \mathbb{D} “cartesian functor”, and we shall write $\langle x, y \rangle$ for $\mathbb{D}(x, y)$. Composition of arrows f, g in \mathcal{F} will be denoted by $f \circ g$. Conditions defining a DM-category are the following ones:

(DM1) α is an isomorphism $\alpha(\varphi, \psi, \chi) : (\varphi\psi)\chi \cong \varphi(\psi\chi)$, natural in φ, ψ, χ ;

(DM2) λ is an isomorphism $\lambda(\varphi) : I\varphi \cong \varphi$, natural in φ ;

(DM3) ρ is an isomorphism $\rho(\varphi) : \varphi I \cong \varphi$, natural in φ ;

(DM4) l is an isomorphism $l(\varphi, \psi) : \langle \varphi, \psi \rangle L \cong \varphi$, natural in φ, ψ ;

(DM5) r is an isomorphism $r(\varphi, \psi) : \langle \varphi, \psi \rangle R \cong \psi$, natural in φ, ψ ;

(DM6) i is an isomorphism $i(\varphi, \psi, \chi) : \varphi\langle \psi, \chi \rangle \cong \langle \varphi\psi, \varphi\chi \rangle$, natural in φ, ψ, χ ;

(DM7) $\alpha(\varphi, \psi, \chi\vartheta) \circ \alpha(\varphi\psi, \chi, \vartheta) = (1_\varphi \alpha(\psi, \chi, \vartheta)) \circ \alpha(\varphi, \psi\chi, \vartheta) \circ (\alpha(\varphi, \psi, \chi) 1_\vartheta)$;

(DM8) $i(\varphi\psi, \chi, \vartheta) \circ \bar{\alpha}(\varphi, \psi, \langle \chi, \vartheta \rangle)$
 $= \langle \bar{\alpha}(\varphi, \psi, \chi), \bar{\alpha}(\varphi, \psi, \vartheta) \rangle \circ i(\varphi, \psi\chi, \psi\vartheta) \circ (1_\varphi i(\psi, \chi, \vartheta))$,

where $\varphi, \psi, \chi, \vartheta$ range over objects of \mathcal{F} and $\bar{\alpha}$ is α^{-1} .

Note that condition (DM7) is something less than the usual coherence axioms for monoidal categories (cf. [2] ch. VII). It is rather unexpected that full coherence properties of the functors \mathbb{M} and \mathbb{D} are not necessary for the main Theorem 2.1 below. But since (DM7) seems to be the most essential among the coherence axioms for monoidal categories, we preferred to keep the term “monoidal category” in the title of the paper.

For posets \mathcal{F} the notion of DM-category coincides with that of operative space [1]. A properly categorial example of a DM-category is described below in 1.3.

1.2. SOME NOTATIONAL CONVENTIONS

By \mathcal{F} we shall denote usually a DM-category; $\varphi, \psi, \chi, \xi, \eta$ etc. will be objects, and f, g, h, x, y etc. — arrows in \mathcal{F} . In expressions involving arrows we shall usually write φ for 1_φ , so if $f : \varphi \rightarrow \psi$, then $f\varphi = f = \psi f$, and since \mathbb{M} is a functor we have

$$(1) \quad (\varphi'g) \circ (f\psi) = fg = (f\psi') \circ (\varphi g)$$

for all $f \in \mathcal{F}(\varphi, \varphi')$ and $g \in \mathcal{F}(\psi, \psi')$. We shall often omit brackets in expressions like (1), so in this sense the multiplication is treated as “faster” than the composition “ \circ ”. An expression, constructed by means of \mathbb{D} , \mathbb{M} and objects of \mathcal{F} , defines

a functor for both objects and arrows uniformly, the object constants φ being interpreted as 1_φ , so in the sequel we shall write such definitions for objects only. We shall write $\bar{a}, \bar{\lambda}, \bar{\rho}, \bar{l}, \bar{r}, \bar{i}$ for $a^{-1}, \lambda^{-1}, \rho^{-1}, l^{-1}, r^{-1}, i^{-1}$ respectively and we shall usually omit expressions in brackets after a, λ etc., so the conditions (DM1)–(DM8) can be written shortly as follows:

- (2) $a \circ (fg)h = f(gh) \circ a$;
- (3) $\lambda \circ If = f \circ \lambda$;
- (4) $\rho \circ fI = f \circ \rho$;
- (5) $l \circ \langle f, g \rangle L = f \circ l$;
- (6) $r \circ \langle f, g \rangle R = g \circ r$;
- (7) $i \circ f \langle g, h \rangle = \langle fg, fh \rangle \circ i$;
- (8) $a \circ a = \varphi a \circ a \circ a \vartheta$;
- (9) $i \circ \bar{a} = \langle \bar{a}, \bar{a} \rangle \circ i \circ \varphi i$;

where $f \in \mathcal{F}(\varphi, \varphi')$, $g \in \mathcal{F}(\psi, \psi')$, $h \in \mathcal{F}(\chi, \chi')$. Define

$$\langle X_0, \dots, X_{n-1} \rangle = \langle X_0, \langle X_1, \dots, \langle X_{n-2}, X_{n-1} \rangle \dots \rangle \rangle,$$

where X_0, \dots, X_{n-1} are objects in \mathcal{F} or arrows as well, and for $n = 0$ let $\langle X_0, \dots, X_{n-1} \rangle = I$ (respectively $\langle X_0, \dots, X_{n-1} \rangle = 1_I$), and for $n = 1$ let $\langle X_0, \dots, X_{n-1} \rangle = X_0$.

1.3. EXAMPLE

Define *types* inductively as follows:

- 1) 0 is a type;
- 2) If a and b are types, then $a \rightarrow b$ and $a \times b$ are types;
- 3) If a_0, a_1, \dots , is an infinite sequence of types, then $a_0 \times a_1 \times a_2 \dots$ (or shortly $\prod i.a_i$) is a type.

Let M be a set with two disjoint subsets M_0 and M_1 and three mappings $d_0, d_1, d : M \rightarrow M$, s.t. $d_i(x) \in M_i$ and $d(d_i(x)) = x$ for all $x \in M$ and $i < 2$. Denote by F_a the set of all hereditary partial functionals of type a over M , i.e. define F_a by induction on a as follows: F_0 is M ; $F_{a \rightarrow b}$ — the set of all partial functions from F_a to F_b ; $F_{a \times b}$ is $F_a \times F_b$; $F_{\prod i.a_i}$ — the product $\prod_{i=0}^{\infty} F_{a_i}$.

Let \mathcal{F} be the set of all relations $\varphi \subseteq F_a \times M \times M$ for all types a ; $\varphi \in \mathcal{F}$ will be called to be of type a iff $\varphi \subseteq F_a \times M \times M$. An arrow from $\varphi \in \mathcal{F}$ of type a to $\psi \in \mathcal{F}$ of type b will be called a functional $f \in F_{a \rightarrow (0 \rightarrow (0 \rightarrow b))}$, s.t. *fuzzy* is defined iff $\varphi(u, x, y)$ (we are writing *fuzzy* for $f(u)(x)(y)$ etc.), and

$$\forall u, x, y (\varphi(u, x, y) \implies \psi(\text{fuzzy}, x, y)).$$

Composition $g \circ f$ of arrows f from φ to ψ and g from ψ to χ is defined by $(g \circ f)uxy = g(\text{fuzzy})xy$, and for every $\varphi \in \mathcal{F}$ let $1_\varphi uxy = u$ if $\varphi(u, x, y)$ and let $1_\varphi uxy$ be not defined otherwise. Then \mathcal{F} is a category w.r.t. the sets of objects and arrows as described, and define functors \mathbb{M} and \mathbb{D} as follows:

$$(\varphi\psi)(w, x, y) = \exists z, u, v (w = \langle z, \langle u, v \rangle \rangle \& \varphi(u, z, y) \& \psi(v, x, z)),$$

so the type of $\varphi\psi$ is $0 \times (a \times b)$ if a and b are the types of φ and ψ respectively;

$$(fg)\langle z, \langle u, v \rangle \rangle xy = \langle z, \langle \text{fuzzy}, gvzx \rangle \rangle,$$

where $f \in \mathcal{F}(\varphi, \varphi')$, $g \in \mathcal{F}(\psi, \psi')$ and $(\varphi\psi)(\langle z, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \rangle, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ and $(fg)(z, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)xy$ is undefined otherwise;

$$\langle \varphi, \psi \rangle(\mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \exists \mathbf{u}, \mathbf{v} (\mathbf{w} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \& ((\mathbf{x} \in M_0 \& \mathbf{v} = \mathbf{o}_b \& \varphi(\mathbf{u}, d(\mathbf{x}), \mathbf{y})) \vee (\mathbf{x} \in M_1 \& \mathbf{u} = \mathbf{o}_a \& \psi(\mathbf{v}, d(\mathbf{x}), \mathbf{y}))),$$

where φ and ψ are objects of types a and b respectively, $\mathbf{o}_c \in \mathbb{F}_c$ is any fixed functional for each type c ; the type of $\langle \varphi, \psi \rangle$ is $a \times b$;

$$\langle f, g \rangle \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle xy = \begin{cases} \langle fud(\mathbf{x}), \mathbf{o}_b \rangle & \text{if } \mathbf{x} \in M_0 \& \mathbf{v} = \mathbf{o}_b \& \varphi(\mathbf{u}, d(\mathbf{x}), \mathbf{y}) \\ \langle \mathbf{o}_a, gvd(\mathbf{x}) \rangle & \text{if } \mathbf{x} \in M_1 \& \mathbf{u} = \mathbf{o}_a \& \psi(\mathbf{v}, d(\mathbf{x}), \mathbf{y}), \end{cases}$$

and $\langle f, g \rangle \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle xy$ is undefined otherwise. Let I be the object of type 0 defined by $I(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o}_0 \& \mathbf{x} = \mathbf{y}$, and let $L(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \Leftrightarrow I(\mathbf{u}, d_0(\mathbf{x}), \mathbf{y})$ and $R(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \Leftrightarrow I(\mathbf{u}, d_1(\mathbf{x}), \mathbf{y})$. Then it is straightforward to see that \mathcal{F} is a DM-category w.r.t. $\mathbb{M}, \mathbb{D}, I, L, R$ and properly defined $\mathbf{a}, \lambda, \rho, l, r, i$.

Informally, this example arises at an attempt to give a more detailed description of some examples of operative spaces, the elements of which represent some idealized programs working on inputs from M and giving for each input a set of outputs from M , by taking account for the correctness of the work of the program. In the notations above, while the input-output relation for such a program φ is represented by $\exists \mathbf{u} \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$, the relation $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ is to be conceived as “ \mathbf{u} is a proof that given the input \mathbf{x} to φ , \mathbf{y} will be given as an output”.

1.4. LEAST FIXED POINTS

Let \mathcal{C} be a category and let $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ be an endofunctor. By $(F \Rightarrow \mathcal{C})$ we shall denote the category of pairs $(X; x)$ s.t. $X \in \mathcal{C}$ and $x \in \mathcal{C}(F(X), X)$; morphisms $f : (X; x) \rightarrow (Y; y)$ in $(F \Rightarrow \mathcal{C})$ are the arrows $f : X \rightarrow Y$ in \mathcal{C} s.t. $f \circ x = y \circ F(f)$. Then a *least fixed point* or a “minimal fixed point” (m.f.p.) of F is by definition an initial object $(M; m)$ of $(F \Rightarrow \mathcal{C})$. Some elementary properties of m.f.p. will be used below without special reference. They partially appear in Lambek [3], let us list them:

(i) Suppose an endofunctor $F = F(A)$ in \mathcal{C} depends on a parameter $A \in \mathcal{C}$, i.e. F is a functor from \mathcal{C}^2 to \mathcal{C} , and $(M(A); m(A))$ is a m.f.p. of $F(A)$ for all $A \in \mathcal{C}$. Then M is a functor from \mathcal{C} to \mathcal{C} , where $M(a)$ for $a : A \rightarrow B$ is determined uniquely by

$$M(a) \circ m(A) = m(B) \circ F(a, M(a)),$$

since $(M(B); m(B) \circ F(a, M(B))) \in (F(A) \Rightarrow \mathcal{C})$. The same holds for several parameters instead one.

(ii) If $(M; m)$ and $(N; n)$ are two m.f.p. of $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, then there is an isomorphism $(M; m) \cong (N; n)$, natural in parameters.

(iii) If $(M(A); m(A))$ is a m.f.p. of an endofunctor $F(A)$ in \mathcal{C} depending on a parameter A , then $m(A) : F(A, M(A)) \cong M(A)$ is an isomorphism natural in A , and similarly for several parameters.

1.5. ITERATIVELY CLOSED DM-CATEGORIES

Let \mathcal{F} be a DM-category, and consider the power category \mathcal{F}^N , where N is the set of all natural numbers. A normal functor will be called a functor $H : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^N$ of the form $H(\xi) = \lambda i. \varphi(\xi \nu_i)$, where $\nu_i \in \mathcal{F}_0$ for all $i \in N$ and \mathcal{F}_0 is the set of all objects of \mathcal{F} , produced from $\{L, R\}$ by means of multiplication. Then the category \mathcal{F} will be called an *iteratively closed* DM-category, iff:

(ic1) every normal functor $H : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^N$ has right adjoint; and

(ic2) every functor $\Gamma : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ of the form $\Gamma(\xi) = \langle I, \xi \rangle \varphi$ has a m.f.p. $(\mathbb{I}(\varphi); j_\varphi)$ in \mathcal{F} .

Condition (ic1) will be used below in the following form:

(ic3) for all $\varphi \in \mathcal{F}$ and all sequences of objects $\psi_i \in \mathcal{F}$ and $\nu_i \in \mathcal{F}_0$ ($i \in N$) there is $\xi \in \mathcal{F}$ and a sequence of arrows $x_i : \varphi(\xi \nu_i) \rightarrow \psi_i$, which is universal in the sense that for every $\eta \in \mathcal{F}$ and all sequences of arrows $y_i : \varphi(\eta \nu_i) \rightarrow \psi_i$ there is unique arrow $h : \eta \rightarrow \xi$ in \mathcal{F} s.t. $y_i = x_i \circ \varphi(h \nu_i)$ for all $i \in N$.

Note that condition (ic1) follows easily from next two ones:

(ic4) all functors M_φ, M^L and M^R of the form $M_\varphi(\xi) = \varphi\xi$, $M^L(\xi) = \xi L$ and $M^R(\xi) = \xi R$ have right adjoints;

(ic5) all products $\prod_{i \in N} \varphi_i$ exist in \mathcal{F} .

The category \mathcal{F} from 1.3 is an iteratively closed DM-category. Conditions (ic4) and (ic5) can be shown to hold for this category in more or less a straightforward way. A m.f.p. in it for a functor Γ of the form of (ic2) can be constructed directly by a proper generalization of the usual method of constructing of iteration, as, for instance, in [4].

1.6. TERMS AND VALUES

Let c_0, \dots, c_{l-1} be a list of symbols called *parameter symbols*, and let we have an infinite list of variables denoted usually by x, y, z etc. The symbols I, L, R will be called basic constants, and parameter symbols and basic constants together will be called *constants*. Define *terms* inductively as follows:

- a) all constants and variables are terms; they are called *simple terms*;
- b) if t and s are terms, then (ts) and $\langle t, s \rangle$ are terms.

If \mathcal{X} is a set of variables, then by $\mathbf{Term}(\mathcal{X})$ we shall denote the set of all terms whose variables belong to \mathcal{X} , and \mathbf{Term} will be the set of all terms.

Let \mathcal{F} be a DM-category and suppose we have an interpretation assigning to each parameter symbol c_i an object (called a parameter) $\gamma_i \in \mathcal{F}$. This interpretation will be fixed throughout the paper. Let $\bar{x} \equiv x_0, \dots, x_{n-1}$ be a list of distinct variables. Then each term $t \in \mathbf{Term}(\{\bar{x}\})$ defines a functor $[\lambda \bar{x}. t] : \mathcal{F}^n \rightarrow \mathcal{F}$ called value of t in an obvious way, namely:

- 1) if t is a variable x_i , $i < n$, then $[\lambda \bar{x}. t](\bar{\xi}) = \xi_i$;
- 2) if t is a parameter symbol c_i , $i < l$, then $[\lambda \bar{x}. t](\bar{\xi}) = \gamma_i$;
- 3) if t is I, L or R then $[\lambda \bar{x}. t](\bar{\xi})$ is I, L or R , respectively;
- 4) if $t \equiv (sr)$, then $[\lambda \bar{x}. t](\bar{\xi}) = [\lambda \bar{x}. s](\bar{\xi})[\lambda \bar{x}. r](\bar{\xi})$;
- 5) if $t \equiv \langle s, r \rangle$, then $[\lambda \bar{x}. t](\bar{\xi}) = \langle [\lambda \bar{x}. s](\bar{\xi}), [\lambda \bar{x}. r](\bar{\xi}) \rangle$,

where $\bar{\xi}$ is an arbitrary object of \mathcal{F}^n , and the definition of the functor $[\lambda\bar{x}.t]$ for arrows is the same when replacing ξ_i, γ_i, I, L, R with $1_{\xi_i}, 1_{\gamma_i}, 1_I, 1_L, 1_R$, respectively.

Sometimes we shall write $t_0 t_1 \dots t_n$ for $(\dots(t_0 t_1) \dots t_{n-1}) t_n$, where t_0, \dots, t_n are terms.

1.7. REDUCTIONS AND B-NORMAL TERMS

A formal expression of one of the forms

$$(a) t(sr) \rightarrow (ts)r$$

or

$$(i) t\langle s, r \rangle \rightarrow \langle ts, tr \rangle,$$

where t, s, r are terms, will be called a basic contraction. As usual the notion of basic contraction gives rise to a reduction notion: we shall write $t \mapsto s$ for "s is obtained by replacing an occurrence in t on the left hand side of a basic contraction with the corresponding occurrence on the right hand side of the same basic contraction" and the symbol " \mapsto " for the reflexive transitive closure of the relation " \mapsto ". A term t will be called b-normal (or simply normal), if $t \mapsto s$ is impossible for any s ; s will be called b-normal form of t iff $t \mapsto s$ and s is normal.

Lemma 1. For every term t there is unique b-normal form t^b of t .

Indeed, let $\text{lh}(t)$ be the length of the term t , and let $\text{lh}'(t)$ be the number $\text{lh}(s_0) + \dots + \text{lh}(s_{n-1})$, where $t = (\dots(ps_0) \dots s_{n-2})s_{n-1}$ and p is a term which is not of the form $p_0 p_1$ for some terms p_0 and p_1 . Define $\mu(t) = \text{lh}(t)\omega + \text{lh}'(t)$. Then using induction on the ordinal $\mu(t)$ we may see that the following equalities define uniquely a total operation on terms denoted by t^b for a term t :

- (1) $t^b = t$, if t is a simple term;
- (2) $t^b = p^b s$, if $t = ps$ and s is simple;
- (3) $t^b = ((ps)r)^b$, if $t = p(sr)$;
- (4) $t^b = \langle (ps)^b, (pr)^b \rangle$, if $t = p\langle s, r \rangle$;
- (5) $t^b = \langle t_0^b, t_1^b \rangle$, if $t = \langle t_0, t_1 \rangle$.

Again, we have for all terms t and s :

- (6) t^b is b-normal;
- (7) $t \mapsto t^b$;
- (8) if $t \mapsto s$, then $t^b = s^b$;

which can be seen straightforwardly by induction on $\mu(t)$. ■

Now we shall define for every term $t \in \text{Term}(\{x_0, \dots, x_{n-1}\})$ an isomorphism

$$(9) b_t(\bar{\xi}) : [\lambda\bar{x}.t](\bar{\xi}) \cong [\lambda\bar{x}.t^b](\bar{\xi}),$$

natural in $\bar{\xi}$, where $\bar{\xi} = (\xi_0, \dots, \xi_{n-1})$ and $\bar{x} = (x_0, \dots, x_{n-1})$.

Writing for short $b(t)$ for $b_t(\bar{\xi})$ and t^* for $[\lambda\bar{x}.t](\bar{\xi})$ for any $t \in \text{Term}(\{x_0, \dots, x_{n-1}\})$, define $b_t(\bar{\xi})$ as follows:

- (b1) $b(t) = t^*$ if t is normal;
- (b2) $b(ts) = b(t)s^*$ if s is simple and t is not normal;
- (b3) $b(ts) = b(tp)q^* \circ \bar{a}$ if $s = pq$ is normal;
- (b4) $b(ts) = \langle b(ts_0), b(ts_1) \rangle \circ i$, if $s = \langle s_0, s_1 \rangle$ is normal;
- (b5) $b(ts) = b(ts^b) \circ t^* b(s)$ if s is not normal;

(b6) $\mathbf{b}(\langle t_0, t_1 \rangle) = \langle \mathbf{b}(t_0), \mathbf{b}(t_1) \rangle$ if $\langle t_0, t_1 \rangle$ is not normal.

Note that (b2), (b5) and (b6) hold for any terms t, t_0, t_1 . In (b3) and (b4) $\bar{\mathbf{a}}$ is $\bar{\mathbf{a}}(t^*, p^*, q^*)$ and \mathbf{i} is $\mathbf{i}(t^*, s_0^*, s_1^*)$.

Lemma 2. For all terms t, r and every normal s we have:

$$(10) \quad \mathbf{b}(ts) = \mathbf{b}(t^b s) \circ \mathbf{b}(t)s^*,$$

and

$$(11) \quad \mathbf{b}(t(rs)) = \mathbf{b}((tr)s) \circ \bar{\mathbf{a}}.$$

Proof. Induction on s for both (10) and (11). If s is simple, then

$$\mathbf{b}(t^b s) \circ \mathbf{b}(t)s^* = (t^b)^* s^* \circ \mathbf{b}(t)s^* = \mathbf{b}(ts).$$

If $s = pq$, then q is simple since s is normal, and by (b3), 1.2.(2) and the induction hypothesis for p we get:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(t^b s) \circ \mathbf{b}(t)s^* &= \mathbf{b}(t^b p)q^* \circ \bar{\mathbf{a}} \circ \mathbf{b}(t)(p^* q^*) = \mathbf{b}(t^b p)q^* \circ \mathbf{b}(t)p^* q^* \circ \bar{\mathbf{a}} \\ &= \mathbf{b}(tp)q^* \circ \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{b}(ts). \end{aligned}$$

If $s = \langle s_0, s_1 \rangle$ then similarly

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(t^b s) \circ \mathbf{b}(t)s^* &= \langle \mathbf{b}(t^b s_0), \mathbf{b}(t^b s_1) \rangle \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{b}(t)(s_0^*, s_1^*) \\ &= \langle \mathbf{b}(t^b s_0) \circ \mathbf{b}(t)s_0^*, \mathbf{b}(t^b s_1) \circ \mathbf{b}(t)s_1^* \rangle \circ \mathbf{i} \\ &= \langle \mathbf{b}(ts_0), \mathbf{b}(ts_1) \rangle \circ \mathbf{i} = \mathbf{b}(ts). \end{aligned}$$

This proves (10). If rs is normal, then (11) is received immediately from (b2) and (b3). Suppose rs is not normal. Then by (b5) we have

$$(12) \quad \mathbf{b}(t(rs)) = \mathbf{b}(t(rs)^b) \circ t^* \mathbf{b}(rs).$$

Consider cases for s . If s is simple, then

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(t(rs)) &= \mathbf{b}(t(rs)^b) \circ t^* (\mathbf{b}(r)s^*) = \mathbf{b}(t(r^b s)) \circ t^* (\mathbf{b}(r)s^*) \\ &= \mathbf{b}(tr^b) s^* \circ \bar{\mathbf{a}} \circ t^* (\mathbf{b}(r)s^*) = \mathbf{b}(tr^b) s^* \circ (t^* \mathbf{b}(r)) s^* \circ \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{b}(tr) s^* \circ \bar{\mathbf{a}} \\ &= \mathbf{b}((tr)s) \circ \bar{\mathbf{a}}. \end{aligned}$$

If $s = pq$, then q is simple and using (12), the induction hypothesis for p , and 1.2.(8), we have:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(t(rs)) &= \mathbf{b}(t((rp)^b q)) \circ t^* (\mathbf{b}(rp)q^*) \circ t^* \bar{\mathbf{a}} \\ &= \mathbf{b}(t(rp)^b) q^* \circ \bar{\mathbf{a}} \circ t^* (\mathbf{b}(rp)q^*) \circ t^* \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{b}(t(rp)^b) q^* \circ (t^* \mathbf{b}(rp)) q^* \circ \bar{\mathbf{a}} \circ t^* \bar{\mathbf{a}} \\ &= \mathbf{b}(t(rp)) q^* \circ \bar{\mathbf{a}} \circ t^* \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{b}((tr)p) q^* \circ \bar{\mathbf{a}} q^* \circ \bar{\mathbf{a}} \circ t^* \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{b}((tr)p) q^* \circ \bar{\mathbf{a}} \circ \bar{\mathbf{a}} \\ &= \mathbf{b}((tr)s) \circ \bar{\mathbf{a}}. \end{aligned}$$

Finally, if $s = \langle s_0, s_1 \rangle$, then s_0 and s_1 are normal, and using (12), the induction hypothesis for s_0 and s_1 , and 1.2.(9), we have:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(t(rs)) &= \mathbf{b}(t((rs_0)^b, (rs_1)^b)) \circ t^* (\mathbf{b}(rs_0), \bar{\mathbf{b}}(rs_1)) \circ t^* \mathbf{i} \\ &= \langle \mathbf{b}(t(rs_0)^b), \mathbf{b}(t(rs_1)^b) \rangle \circ \mathbf{i} \circ t^* (\mathbf{b}(rs_0), \bar{\mathbf{b}}(rs_1)) \circ t^* \mathbf{i} \\ &= \langle \mathbf{b}(t(rs_0)), \mathbf{b}(t(rs_1)) \rangle \circ \mathbf{i} \circ t^* \mathbf{i} = \langle \mathbf{b}((tr)s_0) \circ \bar{\mathbf{a}}, \mathbf{b}((tr)s_1) \circ \bar{\mathbf{a}} \rangle \circ \mathbf{i} \circ t^* \mathbf{i} \\ &= \langle \mathbf{b}((tr)s_0), \mathbf{b}((tr)s_1) \rangle \circ \langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}} \rangle \circ \mathbf{i} \circ t^* \mathbf{i} = \langle \mathbf{b}((tr)s_0), \mathbf{b}((tr)s_1) \rangle \circ \mathbf{i} \circ \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{b}((tr)s) \circ \bar{\mathbf{a}}. \blacksquare \end{aligned}$$

1.8. TERM SYSTEMS AND CODINGS

A *term system* in \mathcal{F} is a pair $(\bar{s}; \bar{x})$, where $\bar{x} \equiv x_0, \dots, x_{n-1}$ is a list of variables and $\bar{s} \equiv s_0, \dots, s_{n-1}$ is a list of terms s_i from $\mathbf{Term}(\{\bar{x}\})$. Each term system $S \equiv (\bar{s}; \bar{x})$ defines a functor $\bar{S} : \mathcal{F}^n \rightarrow \mathcal{F}^n$ by $\bar{S}(\bar{\xi}) = (S_0(\bar{\xi}), \dots, S_{n-1}(\bar{\xi}))$, where $S_i = [\lambda \bar{x}. s_i]$ for all $i < n$, and $\bar{\xi}$ is an arbitrary object or arrow in \mathcal{F}^n as well. A term system $S = (\bar{s}; \bar{x})$ will be called *normal* iff all terms s_0, \dots, s_{n-1} are normal.

Let $\mathbf{Term}2(\mathcal{X})$ be the set of all sequences t_0, \dots, t_{n-1} of terms $t_i \in \mathbf{Term}(\mathcal{X})$ with length $n \leq 2$. For every term system $S \equiv (\bar{s}; \bar{x})$ we shall define a mapping $S^\# : \mathbf{Term}(\{\bar{x}\}) \rightarrow \mathbf{Term}2(\{\bar{x}\})$ (called *S-reduction function*) as follows:

- (#1) if t is a constant, then $S^\#(t)$ is the empty sequence Λ ;
- (#2) if $t = pc$, t is normal and c is a constant, then $S^\#(t)$ is (the one membered sequence) p ;
- (#3) if $t = (t_0, t_1)$ and t is normal, then $S^\#(t)$ is t_0, t_1 ;
- (#4) if $t = x_i$, then $S^\#(t)$ is s_i , $i < n$;
- (#5) if $t = px_i$ and t is normal, then $S^\#(t)$ is $(ps_i)^b$.

A set $T \subseteq \mathbf{Term}(\{\bar{x}\})$ will be called *closed w.r.t. $S^\#$* iff for any $t \in T$ all members of $S^\#(t)$ belong to T . If f is a mapping $f : \mathbf{Term}(\{\bar{x}\}) \rightarrow \mathbf{Term}(\{\bar{x}\})$, then we shall write $f(S^\#(t))$ for the term $(f(t_0), \dots, f(t_{n-1}))$, where $S^\#(t)$ is t_0, \dots, t_{n-1} .

Definition. A *coding* for a term system S in \mathcal{F} (w.r.t. a given interpretation of the parameters) is a quadruple $\langle K, k, \mathbf{k}, \rho \rangle$, s.t.: $K \subseteq \mathbf{Term}(\{\bar{x}\})$, K is closed w.r.t. $S^\#$ and $x_i \in K$ for all $i < n$; $k : K \rightarrow \mathcal{F}_0$ is a mapping (\mathcal{F}_0 is defined in 1.5); $\rho \in \mathcal{F}$; \mathbf{k} is a mapping assigning to each $t \in K$ an isomorphism in \mathcal{F} , namely:

$$(c) \quad \mathbf{k}(t) : \rho k(t) \cong F_i(\mathbf{k}(S^\#(t))),$$

where F_i is an endofunctor in \mathcal{F} defined for each term t as follows:

- (F1) $F_i(\xi) = L\gamma$, if t is a constant with value γ ;
- (F2) $F_i(\xi) = R(\xi\gamma)$, if $t \equiv pc$, where c is a constant with value γ and t is normal;
- (F3) $F_i(\xi) = R\xi$ in all other cases.

2. RECURSION THEORY IN DM-CATEGORIES

2.1. Theorem. *Let \mathcal{F} be an iteratively closed DM-category and $S = (\bar{s}; \bar{x})$ be a normal term system in \mathcal{F} , where $\bar{x} \equiv (x_0, \dots, x_{n-1})$. Suppose $\langle K, k, \mathbf{k}, \rho \rangle$ is a coding for S in \mathcal{F} and $(\omega; m)$ is a m.f.p. of the endofunctor U in \mathcal{F} defined by $U(\xi) = (I, \xi)\rho$. Then there is an arrow \bar{w} in \mathcal{F}^n s.t. $(\omega k(x_0), \dots, \omega k(x_{n-1}); \bar{w})$ is a m.f.p. of \bar{S} in \mathcal{F}^n .*

This is the main result of the paper and a detailed sketch of a proof of Theorem 2.1 will be given in section 3 below. In the present section we shall see how it can be used to extend principal results of recursion theory in iterative operative spaces in the sense of Ivanov [1] for DM-categories. Up to the end of the section we shall suppose that \mathcal{F} is an iteratively closed DM-category.

2.2. REPRESENTATION OF NATURAL NUMBERS AND TRANSLATION FUNCTORS

Define for every natural number n an object $n^+ \in \mathcal{F}$ inductively as follows: $0^+ = L$; $(n+1)^+ = Rn^+$. Then by (DM4) and (DM5) we have

$$\langle \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \rangle i^+ \cong \alpha_i \quad \text{for all } i < n,$$

where $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ are objects or arrows in \mathcal{F} .

Definition. A functor $T: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ is called a translation (this term is adopted by Ivanov [1]) iff for every object $\varphi \in \mathcal{F}$ and for each natural n

$$T(\varphi)n^+ \cong n^+\varphi$$

and the last isomorphism is natural in φ .

Example. If for all functors $\Psi(\xi)$ of the form $\Psi(\xi) = \langle L\varphi, R\xi \rangle$ there is a m.f.p. $(T(\varphi); t(\varphi))$ in \mathcal{F} , then T is a translation in \mathcal{F} . Indeed, by 1.4.(iii) we have a natural isomorphism $\langle L\varphi, RT(\varphi) \rangle \cong T(\varphi)$, whence by induction on n we see that $T(\varphi)n^+ \cong n^+\varphi$.

Every translation T gives rise to a bifunctor $T'(\varphi, \psi) = [T(\psi)]T(\varphi)$ (cf. Ivanov [1]), called a *primitive recursion* (or better a T -primitive recursion). Objects $\varphi \in \mathcal{F}$, produced from constants L, R, I (respectively $L, R, I, \gamma_0, \dots, \gamma_{l-1}$) by means of the functors T', \mathbb{M} and \mathbb{D} are called T -primitive recursive (respectively T -primitive recursive in $\{\gamma_0, \dots, \gamma_{l-1}\}$).

Proposition 1. *If T is a translation in \mathcal{F} , then for every primitive recursive function f there is a T -primitive recursive $\varphi \in \mathcal{F}$, s.t. $\varphi n^+ \cong (f(n))^+$ for all natural n .*

This proposition is a corollary to corresponding results in [1] or [5]. ■

2.3. FINITE CODINGS

Theorem 2.1 reduces the problem of expressing m.f.p. to that of constructing a suitable coding. The last construction is easy when the domain K of the coding can be chosen finite. Let us consider this case first, it will give us a description of m.f.p. functors, produced by means of the functors \mathbb{M}, \mathbb{D} and the *iteration functor* \mathbb{I} defined in 1.5.(ic2).

Definition. A coding $\langle K, k, \rho \rangle$ for a system of terms $S = (\bar{s}; \bar{x})$ is *finite*, iff K is a finite set. A system $(\bar{s}; \bar{x})$ is called *finitary*, iff there is a finite coding for it. An object $\alpha \in \mathcal{F}$ is called *finitely recursive* (in $\{\gamma_0, \dots, \gamma_{l-1}\}$), iff there is a finitary system $(\bar{s}; \bar{x}) \equiv (s_0, \dots, s_{n-1}; \bar{x})$ and a m.f.p. $(\xi; \bar{x}) \equiv (\xi_0, \dots; \bar{x})$ of the functor \bar{S} , s.t. $\xi_0 \cong \alpha$.

Remark. It is clear by the definition of coding in 1.8 that a system

$$(\bar{s}; \bar{x}) \equiv (s_0, \dots, s_{n-1}; x_0, \dots, x_{n-1})$$

is finitary iff the set K of terms, produced in an obvious sense from $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ by means of the mapping $S^\#$, is finite. Indeed, if that is the case and $K = \{t_0, \dots, t_m\}$, where $n < m$ and $t_i = x_i$ for all $i < n$, then define $k(t_i) = i^+$ for all $i \leq m$ and

$$(1) \quad \rho = \langle \rho_0, \dots, \rho_m \rangle,$$

where:

$$\rho_i = \begin{cases} L\gamma & \text{if } t_i = c \\ R(j^+\gamma) & \text{if } t_i = t_j c \\ R(j^+, k^+) & \text{if } t_i = (t_j, t_k) \\ R_j^+ & \text{if } i < n \text{ and } s_i = t_j \\ R_j^+ & \text{if } t_i = px_k \text{ and } t_j = (ps_k)^b \text{ for some } k < n, \end{cases}$$

for all $i \leq m$. Then $\langle K, k, \mathbf{k}, \rho \rangle$ is a coding for a suitable \mathbf{k} . So by Theorem 2.1 we have

Corollary 1. *If $\varphi \in \mathcal{F}$ is finitely recursive in $\{\gamma_0, \dots, \gamma_{l-1}\}$ then there is $\rho \in \mathcal{F}$ s.t. $\varphi \cong \mathbb{I}(\rho)L$, and ρ is of the form*

$$(2) \quad \rho = \langle I, n_0^+ \beta_0, \dots, n_{l-1}^+ \beta_{l-1} \rangle \alpha,$$

where n_0, \dots, n_{l-1} are natural numbers, $\beta_i \in \{\gamma_0, \dots, \gamma_{l-1}\}$ for all $i < l$, and α belongs to the set, produced from \mathcal{F}_0 by means of \mathbb{D} .

Indeed, (2) can be obtained from (1) by some easy transformations using (DM4), (DM5) and (DM6). ■

Note that the isomorphism $\varphi \cong \mathbb{I}(\rho)L$ is natural in parameters.

Lemma 1. *If φ and ψ are finitely recursive then $\varphi\psi$, $\langle \varphi, \psi \rangle$ and $\mathbb{I}(\varphi)$ are finitely recursive.*

P r o o f. Suppose φ and ψ are defined through systems $S = (\bar{s}; \bar{x})$ and $S' = (\bar{r}; \bar{y})$ respectively, i.e. there are m.f.p. $(\bar{\mu}; \bar{m})$ and $(\bar{\nu}; \bar{n})$ of the functors \bar{S} and \bar{S}' respectively, s.t. $\varphi \cong \mu_0$ and $\psi \cong \nu_0$, where $\bar{\mu} = \mu_0, \dots$ and $\bar{\nu} = \nu_0, \dots$. We may suppose that all variables in \bar{x}, \bar{y} are distinct and let $\bar{x} = x_0, \dots$ and $\bar{y} = y_0, \dots$. Then $(\mu_0\nu_0, \bar{\mu}, \bar{\nu}; \mu_0\nu_0, \bar{m}, \bar{n})$ is a m.f.p. of \bar{S}_1 , where $S_1 = (x_0y_0, \bar{s}, \bar{r}; z, \bar{x}, \bar{y})$, and z is a variable not occurring in \bar{x}, \bar{y} . But the last system is finitary, provided S and S' are. Indeed, if there are finite codings $\langle K, \dots \rangle$ and $\langle K', \dots \rangle$ for S and S' respectively, then the set

$$K'' = K \cup K' \cup \{(x_0t)^b \mid t \in K'\} \cup \{z\}$$

is finite and closed under $S_1^\#$ and $\{\bar{x}, \bar{y}, z\} \subseteq K''$. Therefore by the Remark above the last system is finitary and $\varphi\psi \cong \mu_0\nu_0$ is finitely recursive. We can see in a similar way that the systems $(\langle x_0, y_0 \rangle, \bar{s}, \bar{r}; z, \bar{x}, \bar{y})$ and $(\langle I, z \rangle x_0, \bar{s}; z, \bar{x}, \bar{y})$ define $\langle \varphi, \psi \rangle$ and $\mathbb{I}(\varphi)$ respectively and are finitary, provided $(\bar{s}; \bar{x})$ and $(\bar{r}; \bar{y})$ are. ■

Corollary 2. (i) *An object $\varphi \in \mathcal{F}$ is finitely recursive iff φ is isomorphic to a member of the set, produced from the constants $\gamma_0, \dots, \gamma_{l-1}, I, L, R$ by means of the functors \mathbb{M}, \mathbb{D} and \mathbb{I} .*

(ii) *Any functor defined explicitly by means of the constants and functors in (i) is naturally isomorphic to a functor Γ of the form*

$$\Gamma(\xi) = \mathbb{I}(\langle I, n_0^+ \xi, \dots, n_{k-1}^+ \xi \rangle \alpha)L,$$

where n_0, \dots, n_{k-1} are natural numbers and α belongs to the set produced from the constants by means of \mathbb{M} and \mathbb{D} . ■

For operative spaces the item (ii) in the last corollary is essentially a result of Georgieva [6].

2.4. UNIVERSAL CODINGS AND THE RECURSION THEOREM

Definition. (i) An object $\alpha \in \mathcal{F}$ is called *recursive* (in the parameters $\gamma_0, \dots, \gamma_{l-1}$), iff there is a system of terms $S = (\bar{s}; \bar{x})(s_0, \dots, s_{n-1}; \bar{x})$ and a m.f.p. $(\xi; \bar{x}) \equiv (\xi_0, \dots; \bar{x})$ of the functor \bar{S} , s.t. $\xi_0 \cong \alpha$.

(ii) Writing **Syst** for the set of all normal systems of terms, an *universal coding* is a triple $\langle k, \mathbf{k}, \rho \rangle$, s.t. $k : \mathbf{Syst} \times \mathbf{Term} \rightarrow \mathcal{F}_0$ is a function, \mathbf{k} is a function assigning to each pair $(S, t) \in \mathbf{Syst} \times \mathbf{Term}$ an isomorphic arrow in \mathcal{F} , and for every $S \in \mathbf{Syst}$ the quadruple $\langle \mathbf{Nterm}, \lambda t.k(S, t), \lambda t.k(S, t), \rho \rangle$ is a coding for S , where **Nterm** is the set of all normal terms.

Lemma 2. *Suppose T is a translation functor in \mathcal{F} and $S \in \mathbf{Syst}$. Then there is an universal coding $\langle k, \mathbf{k}, \rho \rangle$, s.t. $k(S, x_0) = L$, where $S \equiv (\bar{s}; x_0, \dots)$, and*

$$\rho = \langle I, T(\gamma_0), \dots, T(\gamma_{l-1}) \rangle \alpha,$$

for a T -primitive recursive object $\alpha \in \mathcal{F}$.

The proof of Lemma 2 is more or less a standard one, using a Gödel numbering of $\mathbf{Syst} \times \mathbf{Term}$ and Proposition 1. Formally, it is a corollary to the special case for operative spaces instead of DM-categories \mathcal{F} , and the last one is a special case of Proposition 3 in [5]. ■

By Lemma 2 and Theorem 2.1 we have immediately:

Corollary 3. *Suppose that each functor $\Psi(\xi) = \langle L\xi, R\xi \rangle$ has a m.f.p. in \mathcal{F} and T is a least fixed point functor $T(\varphi) \cong \langle L\varphi, RT(\varphi) \rangle$ in the sense of the Example in 2.2. Then:*

(i) *Every object $\varphi \in \mathcal{F}$, recursive in $\{\gamma_0, \dots, \gamma_{l-1}\}$, is naturally (in $\gamma_0, \dots, \gamma_{l-1}$) isomorphic to an object, which can be expressed explicitly by means of $\gamma_0, \dots, \gamma_{l-1}, I, L, R, \mathbb{M}, \mathbb{D}, \mathbb{I}, T$.*

(ii) *Any functor, defined explicitly by means of the constants and the functors in (i) is naturally isomorphic to a functor Γ of the form*

$$\Gamma(\xi) = \mathbb{I}(\langle I, T(\xi) \rangle \alpha) L,$$

where α is a T -primitive recursive in $\{\gamma_0, \dots, \gamma_{l-1}\}$ object of \mathcal{F} .

(iii) *There is an object $\omega \in \mathcal{F}$, recursive in $\{\gamma_0, \dots, \gamma_{l-1}\}$, which is universal among all objects recursive in $\{\gamma_0, \dots, \gamma_{l-1}\}$, i.e.*

(a) *for every recursive in $\{\gamma_0, \dots, \gamma_{l-1}\}$ object $\varphi \in \mathcal{F}$ there is a natural number n such that $\varphi \cong \omega n^+$ and*

(b) *there is a primitive recursive function $s(n, m)$, s.t. $\omega(s(n, m))^+ \cong \omega n^+ m^+$ for all natural n, m .*

3. PROOF OF THE MAIN THEOREM

Assume the suppositions of Theorem 2.1. Up to the end of the proof c will denote an arbitrary constant and γ will be the value of c in \mathcal{F} ; the letters t, s, p, t_0 etc. will be used to denote terms. We shall write $t^\#$ for $S^\#(t)$ and we shall suppose that all terms in K are normal. This is not a loss of generality, since otherwise we may take the set $\{t \in K : t \text{ is normal}\}$ instead of K . We shall adopt some rules for omitting brackets in long expressions, e.g. $\varphi\psi\chi\vartheta$ will be a short notation for

$((\varphi\psi)\varphi)\vartheta$. This rule of "association to the left" will apply to objects, arrows and terms as well, as mentioned before in 1.6.

3.1. DEFINITION OF THE ARROWS m

For every term $t \in K$ define an endofunctor G_t in \mathcal{F} as follows:

$$(G) \quad G_t(\xi) = \begin{cases} \gamma & \text{if } t \equiv c \\ \xi k(p)\gamma & \text{if } t \equiv pc \text{ and } t \text{ is normal} \\ \xi k(t^\#) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Lemma 1. For each $t \in K$ there is an isomorphism

$$(n) \quad n_t(\xi) : U(\xi)k(t) \cong G_t(\xi),$$

natural in ξ .

Indeed, by 1.1.(DM1) and 1.8.(c):

$$(1) \quad U(\xi)k(t) = (\langle I, \xi \rangle \rho)k(t) \cong \langle I, \xi \rangle(\rho k(t)) \cong \langle I, \xi \rangle F_t(k(t^\#)).$$

Consider cases for $t \in K$:

1) $t = c$; then by (1), 1.8.(F1), 1.1.(DM1), 1.1.(DM4) and 1.1.(DM2)

$$U(\xi)k(t) \cong \langle I, \xi \rangle(L\gamma) \cong (\langle I, \xi \rangle L)\gamma \cong I\gamma \cong \gamma = G_t(\xi);$$

2) $t = pc$ and t is normal; then by (1), 1.1.(DM1) and 1.1.(DM5)

$$U(\xi)k(t) \cong \langle I, \xi \rangle((Rk(p))\gamma) \cong (\langle I, \xi \rangle(Rk(p)))\gamma \cong ((\langle I, \xi \rangle R)k(p))\gamma \\ \cong (\xi k(p))\gamma = G_t(\xi);$$

3) all other cases; by (1), 1.1.(DM1), 1.1.(DM5) we have

$$U(\xi)k(t) \cong \langle I, \xi \rangle(Rk(t^\#)) \cong (\langle I, \xi \rangle R)k(t^\#) \cong \xi k(t^\#) = G_t(\xi). \blacksquare$$

We shall write $\bar{n}_t(\xi)$ for $n_t^{-1}(\xi)$. Since $(\omega; m)$ is a m.f.p. of U , the arrow $m : U(\omega) \rightarrow \omega$ is an isomorphism. Therefore by (n) we have an isomorphism

$$(m) \quad m(t) = mk(t) \circ \bar{n}_t(\omega) : G_t(\omega) \cong \omega k(t),$$

and we shall write $\bar{m}(t)$ for $m^{-1}(t)$.

3.2. CONSTRUCTION OF THE ARROWS M

We shall define for all $t, s \in K$, s.t. $(ts)^b \in K$, an arrow

$$(M) \quad M(t, s) : \omega k(t)(\omega k(s)) \rightarrow \omega k((ts)^b).$$

Fix $t \in K$. Since \mathcal{F} is iteratively closed, (ic3) in 1.5 holds. Therefore there is an object $\vartheta \in \mathcal{F}$ and a family of arrows

$$(X) \quad X(t, s) : \omega k(t)(\vartheta k(s)) \rightarrow \omega k((ts)^b) \quad (s, (ts)^b \in K),$$

which is universal in the sense of (ic3). Then for all $s \in K$, s.t. $(ts)^b \in K$, define:

$$X'(t, s) = \begin{cases} m(ts) \circ \omega k(t)n_s(\vartheta), & s = c \\ m((ts)^b) \circ X(t, p)\gamma \circ \bar{a} \circ \omega k(t)n_s(\vartheta), & s = pc \\ m((ts)^b) \circ \bar{i} \circ \langle X(t, p_0), X(t, p_1) \rangle \circ i \circ \omega k(t)i \circ \omega k(t)n_s(\vartheta), & s = \langle p_0, p_1 \rangle \\ m(ts) \circ X(t, s_i) \circ \omega k(t)n_s(\vartheta), & s = x_i, i < n \\ m((ts)^b) \circ X(t, (ps_i)^b) \circ \omega k(t)n_s(\vartheta), & s = px_i, i < n. \end{cases}$$

Using (n) , (G) , (m) , (X) , 1.1.(DM1), 1.1.(DM6) and Lemma 1 in 1.7, we may see that $X'(t, s)$ is an arrow

$$X'(t, s) : \omega k(t)(U(\vartheta)k(s)) \rightarrow \omega k((ts)^b),$$

whence by the universal property (ic3) of the family (X) it follows that there is unique arrow $g : U(\vartheta) \rightarrow \vartheta$, s.t.

$$(g) \quad X'(t, s) = X(t, s) \circ \omega k(t)(gk(s))$$

for all $s \in K$, s.t. $(ts)^b \in K$. Since $(\omega; m)$ is a m.f.p. of the functor U , we have:

$$(ug) \quad \text{there is unique } u_g : \omega \rightarrow \vartheta, \text{ s.t. } u_g \circ m = g \circ U(u_g).$$

Finally, defining

$$(dM) \quad M(t, s) = X(t, s) \circ \omega k(t)(u_g k(s)),$$

we obtain (M) .

Lemma 2. For all $t, s \in K$, s.t. $(ts)^b \in K$, we have:

- (1) $M(t, s) \circ \omega k(t)(mk(s)) = m(ts) \circ \omega k(t)n_s(\omega)$, if $s = c$;
- (2) $M(t, s) \circ \omega k(t)(mk(s)) = m((ts)^b) \circ M(t, p)\gamma \circ \bar{\alpha} \circ \omega k(t)n_s(\omega)$, if $s = pc$;
- (3) $M(t, s) \circ \omega k(t)(mk(s)) = m((ts)^b) \circ \bar{i} \circ \langle M(t, p_0), M(t, p_1) \rangle \circ i \circ \omega k(t)i \circ \omega k(t)n_s(\omega)$, if $s = \langle p_0, p_1 \rangle$;
- (4) $M(t, s) \circ \omega k(t)(mk(s)) = m(ts) \circ M(t, s_i) \circ \omega k(t)n_s(\omega)$, if $s = x_i$, $i < n$;
- (5) $M(t, s) \circ \omega k(t)(mk(s)) = m((ts)^b) \circ M(t, (ps_i)^b) \circ \omega k(t)n_s(\omega)$, if $s = px_i$, $i < n$.

Proof. A direct calculation, using (dM) , (ug) , (g) , the naturality of n_s (Lemma 1), the definition of X' and (G) . ■

3.3. DEFINITION OF THE ARROWS w

In the sequel we shall write $\omega k(\bar{x})$ for the object $(\omega k(x_0), \dots, \omega k(x_{n-1}))$ of \mathcal{F}^n , and $t^*(\bar{\xi})$ for $[\lambda \bar{x}. t](\bar{\xi})$ for any $\bar{\xi} \in \mathcal{F}$ and $t \in \mathbf{Term}$. Define by induction on $t \in K$ an arrow

$$w(t) : t^*(\omega k(\bar{x})) \rightarrow \omega k(t),$$

as follows:

$$w(t) = \begin{cases} m(t) & \text{if } t = c \\ m(t) \circ w(p)\gamma & \text{if } t = pc \\ m(t) \circ \bar{i} \circ \langle w(t_0), w(t_1) \rangle & \text{if } t = \langle t_0, t_1 \rangle \\ \omega k(t) = 1_{\omega k(t)} & \text{if } t = x_i, i < n \\ M(p, x_i) \circ w(p)(\omega k(x_i)) & \text{if } t = px_i, i < n; \end{cases}$$

and define for all $i < n$:

$$w_i = m(x_i) \circ w(s_i).$$

Then by (m) we have that w_i is an arrow

$$w_i : s_i^*(\omega k(\bar{x})) \rightarrow \omega k(x_i),$$

i.e. $\bar{w} : \bar{S}(\omega k(\bar{x})) \rightarrow \omega k(\bar{x})$ in \mathcal{F}^n , where $\bar{w} = (w_0, \dots, w_{n-1})$. We shall show that $(\omega k(\bar{x}); \bar{w})$ is a m.f.p. of the functor \bar{S} .

3.4. CONSTRUCTION OF THE ARROWS v

Let $(\bar{\xi}; \bar{x})$ be an arbitrary object of the category $(\bar{S} \Rightarrow \mathcal{F}^n)$ (defined in 1.4), i.e. $\bar{\xi} = (\xi_0, \dots, \xi_{n-1}) \in \mathcal{F}^n$, and \bar{x} is a tuple (x_0, \dots, x_{n-1}) of arrows $x_i : s_i^*(\bar{\xi}) \rightarrow \xi_i$ in \mathcal{F} . We shall define for every $t \in K$ an arrow

$$(v) \quad v_t(\bar{\xi}; \bar{x}) : \omega k(t) \rightarrow t^*(\bar{\xi}).$$

By 1.5.(ic3) there is an object $\eta \in \mathcal{F}$ and a family of arrows

$$(Y) \quad Y((\bar{\xi}; \bar{x}), t) : \eta k(t) \rightarrow t^*(\bar{\xi}), \quad t \in K,$$

which is universal in the sense of 1.5.(ic3), i.e. for every other family of arrows $y_t : \eta' k(t) \rightarrow t^*(\bar{\xi})$ there is unique $f : \eta' \rightarrow \eta$, s.t. $y_t = Y((\bar{\xi}; \bar{x}), t) \circ f k(t)$ for all $t \in K$. We shall write $Y(t)$ for $Y((\bar{\xi}; \bar{x}), t)$; the object $(\bar{\xi}; \bar{x})$ will be usually fixed below.

Define for all $t \in K$:

$$Y'(t) = \begin{cases} n_i(\eta) & \text{if } t = c \\ Y(p)\gamma \circ n_i(\eta) & \text{if } t = pc \\ \langle Y(t_0), Y(t_1) \rangle \circ i \circ n_i(\eta) & \text{if } t = \langle t_0, t_1 \rangle \\ x_i \circ Y(s_i) \circ n_i(\eta) & \text{if } t = x_i, i < n \\ p^*(\bar{\xi})x_i \circ \bar{b}(ps_i) \circ Y((ps_i)^b) \circ n_i(\eta) & \text{if } t = px_i, i < n, \end{cases}$$

where \bar{b} is b^{-1} and b is defined in 1.7. We leave to the reader to show that $Y'(t) : U(\eta)k(t) \rightarrow t^*(\bar{\xi})$ for all $t \in K$. Hence by the universal property of the family (Y) there is unique $h : U(\eta) \rightarrow \eta$, s.t.

$$(h) \quad Y'(t) = Y(t) \circ h k(t) \quad \text{for all } t \in K.$$

Since $(\omega; m)$ is m.f.p. of U , we have:

$$(uh) \quad \text{there is unique } u_h : \omega \rightarrow \eta, \text{ s.t. } u_h \circ m = h \circ U(u_h).$$

Then we may define

$$(dv) \quad v_t(\bar{\xi}; \bar{x}) = Y(t) \circ u_h k(t).$$

We shall write $v(t)$ for $v_t(\bar{\xi}; \bar{x})$.

Lemma 3. For all $t \in K$ we have

- (1) $v(t) \circ mk(t) = n_i(\omega)$ if $t = c$;
- (2) $v(t) \circ mk(t) = v(p)\gamma \circ n_i(\omega)$ if $t = pc$;
- (3) $v(t) \circ mk(t) = \langle v(t_0), v(t_1) \rangle \circ i \circ n_i(\omega)$ if $t = \langle t_0, t_1 \rangle$;
- (4) $v(t) \circ mk(t) = x_i \circ v(s_i) \circ n_i(\omega)$ if $t = x_i, i < n$;
- (5) $v(t) \circ mk(t) = p^*(\bar{\xi})x_i \circ \bar{b}(ps_i) \circ v((ps_i)^b) \circ n_i(\omega)$ if $t = px_i, i < n$.

Proof. A direct calculation similar to the proof of Lemma 2, using (dv) , (uh) , (h) , the naturality of n_s (Lemma 1), the definition of Y' and (G) . ■

3.5. Lemma 4. For all $t, s \in K$ we have

$$v((ts)^b) \circ M(t, s) = b(ts) \circ v(t)v(s).$$

Proof. Fix $t \in K$. By 1.5.(ic3) there is $\zeta \in \mathcal{F}$ and a family of arrows

$$Z(t, s) : \omega k(t)(\zeta k(s)) \rightarrow (ts)^{b*}(\bar{\xi}), \quad s \in K,$$

which is universal in the sense of 1.5.(ic3). Define :

$$Z'(s) = \begin{cases} v(t)\gamma \circ \omega k(t)n_s(\zeta), & s = c \\ Z(t, p)\gamma \circ \bar{\alpha} \circ \omega k(t)n_s(\zeta), & s = pc \\ \langle Z(t, p_0).Z(t, p_1) \rangle \circ i \circ \omega k(t)i \circ \omega k(t)n_s(\zeta), & s = \langle p_0, p_1 \rangle \\ t^*(\bar{\xi})x_i \circ \bar{b}(ts_i) \circ Z(t, s_i) \circ \omega k(t)n_s(\zeta), & s = x_i, i < n \\ (tp)^{b*}(\bar{\xi})x_i \circ \bar{b}((tp)^b s_i) \circ Z(t, (ps_i)^b) \circ \omega k(t)n_s(\zeta), & s = px_i, i < n. \end{cases}$$

It is left to the reader to show that

$$Z'(s) : \omega k(t)(U(\zeta)k(s)) \rightarrow (ts)^{b*}(\bar{\xi}).$$

Then by the universal property of the family $Z(t, s)$ there is unique $z : U(\zeta) \rightarrow \zeta$, s.t.

$$(z) \quad Z'(s) = Z(t, s) \circ \omega k(t)(zk(s)) \quad \text{for all } s \in K,$$

and since $(\omega; m)$ is a m.f.p. of U , we have:

$$(uz) \quad \text{there is unique } u_z : \omega \rightarrow \zeta, \text{ s.t. } u_z \circ m = z \circ U(u_z).$$

We shall prove Lemma 4 by showing that

$$(1) \quad Z(t, s) \circ \omega k(t)(u_z k(s)) = b(ts) \circ v(t)v(s)$$

and

$$(2) \quad Z(t, s) \circ \omega k(t)(u_z k(s)) = v((ts)^b) \circ M(t, s)$$

for all $s \in K$.

3.6. PROOF OF 3.5.(1)

By the universal property of the family $Z(t, s)$ there is unique $y : \omega \rightarrow \zeta$, s.t.

$$(1) \quad Z(t, s) \circ \omega k(t)(yk(s)) = b(ts) \circ v(t)v(s) \quad \text{for all } s \in K.$$

Therefore it is enough to show that $y = u_z$. By (uz) the last will follow from $y \circ m = z \circ U(y)$ or $y = y'$, where $y' = z \circ U(y) \circ m^{-1}$. Since y is the unique arrow satisfying (1), it is enough to show that

$$Z(t, s) \circ \omega k(t)(y'k(s)) = bts) \circ v(t)v(s) \quad \text{for all } s \in K.$$

By the definition of y' the last equality is equivalent to

$$Z(t, s) \circ \omega k(t)(zk(s)) \circ \omega k(t)(U(y)k(s)) = b(ts) \circ v(t)v(s) \circ \omega k(t)(mk(s)),$$

but by (z) and Lemma 1

$$Z(t, s) \circ \omega k(t)(zk(s)) \circ \omega k(t)(U(y)k(s)) = \Psi,$$

where

$$\Psi = Z'(s) \circ \omega k(t)\bar{n}_s(\zeta) \circ \omega k(t)G_s(y) \circ \omega k(t)n_s(\omega).$$

We shall prove that

$$\Psi = b(ts) \circ v(t)v(s) \circ \omega k(t)(mk(s)).$$

Consider cases for s as follows:

Case 1. $s = c$. Then

$$\begin{aligned}\Psi &= v(t)\gamma \circ \omega k(t)\gamma \circ \omega k(t)n_s(\omega) \quad (\text{by definition of } Z'(s) \text{ and } (G)) \\ &= v(t)\gamma \circ \omega k(t)(v(s) \circ mk(t)) \quad (\text{by Lemma 3, (1)}) \\ &= v(t)v(s)\omega k(t)(mk(t)) = \mathbf{b}(ts) \circ v(t)v(s)\omega k(t)(mk(t)) \quad (\text{by 1.2.(1) and 1.7.(b1)}).\end{aligned}$$

Case 2. $s = pc$. Then similarly

$$\begin{aligned}\Psi &= Z(t, p)\gamma \circ \bar{a} \circ \omega k(t)(yk(p)\gamma) \circ \omega k(t)n_s(\omega) \quad (\text{by definition of } Z'(s) \text{ and } (G)) \\ &= (Z(t, p) \circ \omega k(t)(yk(p)))\gamma \circ \bar{a} \circ \omega k(t)n_s(\omega) \quad (\text{by 1.2.(2)}) \\ &= \mathbf{b}(tp)\gamma \circ v(t)v(p)\gamma \circ \bar{a} \circ \omega k(t)n_s(\omega) \quad (\text{by (1)}) \\ &= \mathbf{b}(tp)\gamma \circ \bar{a} \circ v(t)(v(p)\gamma) \circ \omega k(t)n_s(\omega) \quad (\text{by 1.2.(2)}) \\ &= \mathbf{b}(ts) \circ v(t)(v(p)\gamma \circ n_s(\omega)) = \mathbf{b}(ts) \circ v(t)(v(s) \circ mk(s)) \quad (\text{by Lemma 3, (2)}) \\ &= \mathbf{b}(ts) \circ v(t)v(s) \circ \omega k(t)(mk(s)).\end{aligned}$$

Case 3. $s = \langle p_0, p_1 \rangle$. Similarly

$$\begin{aligned}\Psi &= \langle Z(t, p_0).Z(t, p_1) \rangle \circ \mathbf{i} \circ \omega k(t)\mathbf{i} \circ \omega k(t)(y\langle k(p_0), k(p_1) \rangle) \circ \omega k(t)n_s(\omega) \\ &= \langle \mathbf{b}(tp_0) \circ v(t)v(p_0), \mathbf{b}(tp_1) \circ v(t)v(p_1) \rangle \circ \mathbf{i} \circ \omega k(t)\mathbf{i} \circ \omega k(t)n_s(\omega) \\ &= \langle \mathbf{b}(tp_0), \mathbf{b}(tp_1) \rangle \circ \mathbf{i} \circ v(t)\langle v(p_0), v(p_1) \rangle \circ \omega k(t)\mathbf{i} \circ \omega k(t)n_s(\omega) \\ &= \mathbf{b}(ts) \circ v(t)(\langle v(p_0), v(p_1) \rangle \circ \mathbf{i} \circ n_s(\omega)) = \mathbf{b}(ts) \circ v(t)(v(s) \circ mk(s)) \\ &= \mathbf{b}(ts) \circ v(t)v(s) \circ \omega k(t)(mk(s)).\end{aligned}$$

Case 4. $s = x_i, i < n$.

$$\begin{aligned}\Psi &= t^*(\bar{\xi})x_i \circ \bar{\mathbf{b}}(ts_i) \circ Z(t, s_i) \circ \omega k(t)(yk(s_i)) \circ \omega k(t)n_s(\omega) \\ &= t^*(\bar{\xi})x_i \circ \bar{\mathbf{b}}(ts_i) \circ \mathbf{b}(ts_i) \circ v(t)v(s_i) \circ \omega k(t)n_s(\omega) \\ &= v(t)(x_i \circ v(s_i) \circ n_s(\omega)) = v(t)v(s) \circ \omega k(t)(mk(s)) \\ &= \mathbf{b}(ts) \circ v(t)v(s) \circ \omega k(t)(mk(s)).\end{aligned}$$

Case 5. $s = px_i, i < n$. As before

$$\begin{aligned}\Psi &= (tp)^{b^*}(\bar{\xi})x_i \circ \bar{\mathbf{b}}((tp)^b s_i) \circ Z(t, (ps_i)^b) \circ \omega k(t)(yk((ps_i)^b)) \circ \omega k(t)n_s(\omega) \\ &= (tp)^{b^*}(\bar{\xi})x_i \circ \bar{\mathbf{b}}((tp)^b s_i) \circ \mathbf{b}(t(ps_i)^b) \circ v(t)v((ps_i)^b) \circ \omega k(t)n_s(\omega).\end{aligned}$$

But

$$\begin{aligned}& (tp)^{b^*}(\bar{\xi})x_i \circ \bar{\mathbf{b}}((tp)^b s_i) \circ \mathbf{b}(t(ps_i)^b) \\ &= (tp)^{b^*}(\bar{\xi})x_i \circ \mathbf{b}(tp)s_i^*(\bar{\xi}) \circ \bar{\mathbf{b}}(tps_i) \circ \mathbf{b}(t(ps_i)^b) \quad (\text{by 1.7.(10)}) \\ &= (tp)^{b^*}(\bar{\xi})x_i \circ \mathbf{b}(tp)s_i^*(\bar{\xi}) \circ \bar{a} \circ \bar{\mathbf{b}}(t(ps_i)) \circ \mathbf{b}(t(ps_i)^b) \quad (\text{by 1.7.(11)}) \\ &= \mathbf{b}(tp)\xi_i \circ (tp)^*(\bar{\xi})x_i \circ \bar{a} \circ t^*(\bar{\xi})\bar{\mathbf{b}}(ps_i) \quad (\text{by 1.2.(1) and 1.7.(b5)}) \\ &= \mathbf{b}(tp)\xi_i \circ \bar{a} \circ t^*(\bar{\xi})(p^*(\bar{\xi})x_i) \circ t^*(\bar{\xi})\bar{\mathbf{b}}(ps_i) \quad (\text{by 1.2.(2)}) \\ &= \mathbf{b}(ts) \circ t^*(\bar{\xi})(p^*(\bar{\xi})x_i) \circ t^*(\bar{\xi})\bar{\mathbf{b}}(ps_i) \quad (\text{by 1.7.(b3)}).\end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned}\Psi &= \mathbf{b}(ts) \circ t^*(\bar{\xi})(p^*(\bar{\xi})x_i) \circ t^*(\bar{\xi})\bar{\mathbf{b}}(ps_i) \circ v(t)v((ps_i)^b) \circ \omega k(t)n_s(\omega) \\ &= \mathbf{b}(ts) \circ v(t)(p^*(\bar{\xi})x_i \circ \bar{\mathbf{b}}(ps_i) \circ v((ps_i)^b) \circ n_s(\omega))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{b}(ts) \circ v(t)(v(s) \circ mk(s)) && \text{(by Lemma 3, (5))} \\
&= \mathbf{b}(ts) \circ v(t)v(s) \circ \omega k(t)(mk(s)).
\end{aligned}$$

This finishes the proof of 3.5.(1).

3.7. PROOF OF 3.5.(2)

This proof is similar but simpler than that in 3.6. We replace $\mathbf{b}(ts) \circ v(t)v(s)$ by $v((ts)^b) \circ M(t, s)$ and use Lemma 2. The properties of the isomorphisms \mathbf{b} are not used in this proof. We leave it to the reader.

This finishes the proof of Lemma 4. As a corollary we have:

If $tx_i \in K$, where $i < n$, then

$$(1) \quad v(tx_i) \circ M(t, x_i) = v(t)v(x_i).$$

We shall write $v(\bar{x})$ for the arrow $(v(x_0), \dots, v(x_{n-1})) : \omega k(\bar{x}) \rightarrow \bar{\xi}$ in \mathcal{F}^n .

3.8. Corollary 1. For all $t \in K$ we have $v(t) \circ w(t) = t^*(v(\bar{x}))$.

Proof. Induction on t . Consider cases for t as in the definition of $w(t)$. All of them are easy to be proved, but in the last one $t = px_i$ and Lemma 4 is used:

$$\begin{aligned}
v(t) \circ w(t) &= v(px_i) \circ M(p, x_i) \circ w(p)(\omega k(x_i)) && \text{(by the definition of } w(t) \text{)} \\
&= v(p)v(x_i) \circ w(p)(\omega k(x_i)) && \text{(by 3.7.(1))} \\
&= (v(p) \circ w(p))v(x_i) = p^*(v(\bar{x}))v(x_i) && \text{(by the induction hypothesis)} \\
&= t^*(v(\bar{x})). \blacksquare
\end{aligned}$$

Corollary 2. $v(\bar{x})$ is an arrow $v(\bar{x}) : (\omega k(\bar{x}); \bar{w}) \rightarrow (\bar{\xi}; \bar{x})$ in the category $(\bar{\mathcal{S}} \Rightarrow \mathcal{F}^n)$, i.e.

$$(1) \quad v(x_i) \circ w_i = x_i \circ s_i^*(v(\bar{x})) \quad \text{for all } i < n.$$

Indeed, by the definition of w_i , Lemma 3, 3.1.(m) and Corollary 1:

$$v(x_i) \circ w_i = x_i \circ v(s_i) \circ n_i(\omega) \circ m^{-1}k(t) \circ m(x_i) \circ w(s_i) = x_i \circ v(s_i) \circ w(s_i) = x_i \circ s_i^*(v(\bar{x})).$$

It remains to show that $v(\bar{x})$ is the unique arrow $(\omega k(\bar{x}); \bar{w}) \rightarrow (\bar{\xi}; \bar{x})$ in $(\bar{\mathcal{S}} \Rightarrow \mathcal{F}^n)$. For that suppose that $\bar{v} : (\omega k(\bar{x}); \bar{w}) \rightarrow (\bar{\xi}; \bar{x})$ is an arbitrary arrow in the last category, i.e. $\bar{v} = (v_0, \dots, v_{n-1})$ and

$$(2) \quad v_i \circ w_i = x_i \circ s_i^*(\bar{v}) \quad \text{for all } i < n.$$

We shall write $v_\omega(t)$ for $v_i(\omega k(\bar{x}); \bar{w})$ (for definition see 3.4).

3.9. Lemma 5. For all $t \in K$ we have $v(t) = t^*(\bar{v}) \circ v_\omega(t)$.

Proof. By 1.5.(ic3) there is unique $y : \omega \rightarrow \eta$ s.t.

$$(1) \quad t^*(\bar{v}) \circ v_\omega(t) = Y(t) \circ yk(t) \quad \text{for all } t \in K.$$

Let $y' = h \circ U(y) \circ m^{-1}$. We shall show that $y = y'$, whence by 3.4.(uh) it will follow that $y = u_h$ and by 3.4.(dv) the lemma will be proved. Since the arrow y satisfying (1) is unique, it is enough to show that

$$t^*(\bar{v}) \circ v_\omega(t) = Y(t) \circ y'k(t) \quad \text{for all } t \in K.$$

The last equality is equivalent to

$$t^*(\bar{v}) \circ v_\omega(t) \circ mk(t) = Y(t) \circ hk(t) \circ U(y)k(t)$$

By 3.4.(h) and Lemma 1

$$Y(t) \circ hk(t) \circ U(y)k(t) = Y'(t) \circ \bar{n}_i(\eta) \circ G_t(y) \circ n_i(\omega).$$

Denote the last expression by χ and consider cases for t to show that $\chi = t^*(\bar{v}) \circ v_\omega(t) \circ mk(t)$. We shall treat only the case, in which the supposition 3.8.(2) is used. This is the case when $t = px_i$, $i < n$. Then by the definition of Y' and (G)

$$\begin{aligned} \chi &= p^*(\bar{\xi})x_i \circ \bar{b}(ps_i) \circ Y((ps_i)^b) \circ yk((ps_i)^b) \circ n_i(\omega) \\ &= p^*(\bar{\xi})x_i \circ \bar{b}(ps_i) \circ (ps_i)^{b*}(\bar{v}) \circ v_\omega((ps_i)^b) \circ n_i(\omega) \quad (\text{by (1)}) \\ &= p^*(\bar{\xi})x_i \circ (ps_i)^*(\bar{v}) \circ \bar{b}(ps_i) \circ v_\omega((ps_i)^b) \circ n_i(\omega) \quad (\text{by the naturality of } b) \\ &= p^*(\bar{v})(x_i \circ s_i^*(\bar{v})) \circ \bar{b}(ps_i) \circ v_\omega((ps_i)^b) \circ n_i(\omega) \\ &= p^*(\bar{v})(v_i \circ w_i) \circ \bar{b}(ps_i) \circ v_\omega((ps_i)^b) \circ n_i(\omega) \quad (\text{by 3.8.(2)}) \\ &= p^*(\bar{v})v_i \circ p^*(\omega k(\bar{x}))w_i \circ \bar{b}(ps_i) \circ v_\omega((ps_i)^b) \circ n_i(\omega) \\ &= t^*(\bar{v}) \circ v_\omega(t) \circ mk(t) \quad (\text{by Lemma 3, (5)}). \blacksquare \end{aligned}$$

3.10. Lemma 6. For all $t, s, r \in K$, s.t. $(ts)^b \in K$ and $(sr)^b \in K$ we have $M(t, (sr)^b) \circ \omega k(t)M(s, r) \circ a = M((ts)^b, r) \circ M(t, s)(\omega k(r))$.

This is the most complicated lemma in the proof but quite similar to Lemma 4: using 1.5.(ic3) we construct a family of arrows

$$M'(t, s, r) : \omega k(t)(\omega k(s))(\omega k(r)) \rightarrow \omega k((tsr)^b)$$

and prove separately that $M(t, (sr)^b) \circ \omega k(t)M(s, r) \circ a = M'(t, s, r)$, $M((ts)^b, r) \circ M(t, s)(\omega k(r)) = M'(t, s, r)$. We leave this to the reader.

We shall write $b_\omega(t)$ for $b_i(\omega k(\bar{x}))$ (see the definition of $b_i(\bar{\xi})$ in 1.7) and $\bar{b}_\omega(t)$ for $b_\omega^{-1}(t)$.

3.11. Lemma 7. For all $t, s \in K$, s.t. $(ts)^b \in K$ we have

$$M(t, s) \circ w(t)w(s) = w((ts)^b) \circ b_\omega(ts).$$

Proof. Induction on s . Consider cases for s as in the definition of $w(s)$. We shall treat only two of the cases: $s = pc$ and $s = px_i$.

Let $s = pc$. Then by Lemma 2 and the definition of $w(s)$

$$\begin{aligned} M(t, s) \circ w(t)w(s) &= m((ts)^b) \circ M(t, p)\gamma \circ \bar{a} \circ \omega k(t)\bar{m}(s) \circ w(t)(m(s) \circ w(p)\gamma) \\ &= m((ts)^b) \circ M(t, p)\gamma \circ \bar{a} \circ w(t)(w(p)\gamma) = m((ts)^b) \circ M(t, p)\gamma \circ w(t)w(p)\gamma \circ \bar{a} \\ &= m((ts)^b) \circ w((tp)^b)\gamma \circ b_\omega(tp)\gamma \circ \bar{a} \quad (\text{by the induction hypothesis}) \\ &= w((ts)^b) \circ b_\omega(ts) \quad (\text{by the definition of } w((ts)^b) \text{ and 1.7.(b3)}). \end{aligned}$$

Let $s = x_i$, $i < n$. Then by the definition of $w(s)$

$$\begin{aligned} M(t, s) \circ w(t)w(s) &= M(t, s) \circ w(t)(M(p, x_i) \circ w(p)(\omega k(x_i))) \\ &= M(t, s) \circ \omega k(t)M(p, x_i) \circ \omega k(t)(w(p)(\omega k(x_i))) \circ w(t)s^*(\omega k(\bar{x})) \quad (\text{by 1.2.(1)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= M((tp)^b, x_i) \circ M(t, p)(\omega k(x_i)) \circ \bar{a} \circ \omega k(t)(w(p)(\omega k(x_i))) \circ w(t)s^*(\omega k(\bar{x})) \\
&\hspace{25em} \text{(by Lemma 6)} \\
&= M((tp)^b, x_i) \circ M(t, p)(\omega k(x_i)) \circ w(t)w(p)(\omega k(x_i)) \circ \bar{a} \\
&= M((tp)^b, x_i) \circ w((tp)^b)(\omega k(x_i)) \circ \bar{b}_\omega(ts)(\omega k(x_i)) \circ \bar{a} \\
&\hspace{15em} \text{(by the hypothesis of the induction)} \\
&= w((ts)^b) \circ \bar{b}_\omega(ts). \blacksquare
\end{aligned}$$

3.12. Lemma 8. For all $t \in K$ we have $w(t) \circ v_\omega(t) = \omega k(t) = 1_{\omega k(t)}$.

Proof. Similar to that of Lemma 4. By 1.5.(ic3) and 1.1.(DM2) there is $\varepsilon \in \mathcal{F}$ and a family of arrows $E(t) : \varepsilon k(t) \rightarrow \omega k(t)$, $t \in K$, which is universal in an obvious sense. Define for $t \in K$:

$$E'(t) = \begin{cases} m(t) \circ n_i(\varepsilon) & \text{if } t = c \\ m(t) \circ E(p)\gamma \circ n_i(\varepsilon) & \text{if } t = pc \\ m(t) \circ \bar{i} \circ \langle E(t_0), E(t_1) \rangle \circ i \circ n_i(\varepsilon) & \text{if } t = \langle t_0, t_1 \rangle \\ m(t) \circ E(s_i) \circ n_i(\varepsilon) & \text{if } t = x_i, i < n. \\ m(t) \circ E((ps_i)^b) \circ n_i(\varepsilon) & \text{if } t = px_i, i < n. \end{cases}$$

By the universal property of the family $E(t)$ there is unique $e : U(\varepsilon) \rightarrow \varepsilon$, s.t. $E'(t) = E(t) \circ ek(t)$ for all $t \in K$. Since $(\omega; m)$ is a m.f.p. of the functor U , there is unique $u_e : \omega \rightarrow \varepsilon$, s.t.

$$u_e \circ m = e \circ U(u_e).$$

We shall prove the lemma by showing that

$$(1) \quad w(t) \circ v_\omega(t) = E(t) \circ u_e k(t)$$

and

$$\omega k(t) = E(t) \circ u_e k(t)$$

for all $t \in K$. By the universal property of the family $E(t)$ there is unique $y : \omega \rightarrow \varepsilon$, s.t.

$$w(t) \circ v_\omega(t) = E(t) \circ yk(t) \quad \text{for all } t \in K.$$

To prove (1) it is enough to show that

$$w(t) \circ v_\omega(t) = E(t) \circ y'k(t) \quad \text{for all } t \in K,$$

where $y' = e \circ U(y) \circ m^{-1}$. For that consider cases for t as in the definition of $E'(t)$. We shall treat only the last one of the cases in order to show how Lemma 7 is used. Let $t = px_i$, $i < n$. Then

$$\begin{aligned}
&E(t) \circ y'k(t) = E(t) \circ ek(t) \circ U(y)k(t) \circ m^{-1}k(t) \\
&= E'(t) \circ \bar{n}_t(\varepsilon) \circ G_t(y) \circ n_t(\omega) \circ m^{-1}k(t) \quad \text{(using 3.1.(n))} \\
&= m(t) \circ E((ps_i)^b) \circ yk((ps_i)^b) \circ \bar{m}(t) \quad \text{(definition of } E', 3.1.(m), (G)) \\
&= m(t) \circ w((ps_i)^b) \circ v_\omega((ps_i)^b) \circ \bar{m}(t) \quad \text{(definition of } y) \\
&= m(t) \circ M(p, s_i) \circ w(p)w(s_i) \circ \bar{b}_\omega(ps_i) \circ v_\omega((ps_i)^b) \circ \bar{m}(t) \quad \text{(Lemma 7)} \\
&= M(p, x_i) \circ \omega k(p)m(x_i) \circ w(p)w(s_i) \circ \bar{b}_\omega(ps_i) \circ v_\omega((ps_i)^b) \circ \bar{m}(t) \quad \text{(Lemma 2, (4))}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= M(p, x_i) \circ w(p)w_i \circ \bar{b}_\omega(ps_i) \circ v_\omega((ps_i)^b) \circ \bar{m}(t) \quad (\text{definition of } w_i) \\
&= M(p, x_i) \circ w(p)\omega k(x_i) \circ p^*(\omega k(\bar{x}))w_i \circ \bar{b}_\omega(ps_i) \circ v_\omega((ps_i)^b) \circ \bar{m}(t) \quad (1.2.(1)) \\
&= w(t) \circ v_\omega(t) \quad (\text{definition of } w(t) \text{ and Lemma 3, (5)}).
\end{aligned}$$

The rest of the proof of Lemma 8 is left to the reader.

3.13. FINAL OF THE PROOF OF THE THEOREM

By Lemma 8 $\omega k(x_i) = w(x_i) \circ v_\omega(x_i) = \omega k(x_i) \circ v_\omega(x_i) = v_\omega(x_i)$, whence by Lemma 5 $v(x_i) = v_i \circ v_\omega(x_i) = v_i$. ■

REFERENCES

1. Ivanov, L. L. Algebraic Recursion Theory. Chichester, 1986.
2. Mac Lane, S. Categories for the working mathematician. Berlin, 1971.
3. Lambek, J. A fixpoint theorem for complete categories. — Math. Zeitschr., 103, 1968, 151–161.
4. Skordev, D. G. Комбинаторные пространства и рекурсивность в них. Sofia, BAN, 1980.
5. Zashchev, J. Теория рекурсии в B-комбинаторных алгебрах. — Serdica Bulg. Math. Publ., 13, 1987, 210–223.
6. Georgieva, N. Теоремы о нормальной форме некоторых рекурсивных элементов и отображений. — Comp. Rend. Acad. Bulg. Sci., 33, 1980, № 12.

Received 10.04.1991

LJUSTERNIK-SCHNIRELMAN CATEGORY OF THE NON-WANDERING SET

SIMEON STEFANOV

Симеон Стефанов. КАТЕГОРИЯ ЛЮСТЕРНИКА-ШНИРЕЛЬМАНА МНОЖЕСТВА НЕБЛУЖДАЮЩИХ ТОЧЕК

В работе рассмотрены динамические системы на многообразии M , удовлетворяющие некоторое условие, более общее, чем аксиому A + условия отсутствия циклов и значит выполненным для систем Морса-Смейла. Получены оценки снизу для категории Люстерника-Шнирельмана множества неблуждающих точек Ω такой системы. Доказаны неравенства:

$$\text{a) } \text{cat}(\Omega, M) \geq \frac{1}{s} \text{cat} M;$$

$$\text{б) } \text{cat} \Omega \geq \text{cat} M,$$

где s обозначает число базисных множеств Ω_i . Получены некоторые применения этого результата.

Simeon Stefanov. LJUSTERNIK-SCHNIRELMAN CATEGORY OF THE NON-WANDERING SET

The paper deals with dynamical systems in some manifold M satisfying some condition, which is more general than axiom A + no-cycle condition and consequently is fulfilled for Morse-Smale systems. Some low estimates for the Ljusternik-Schirelman category of the non-wandering set Ω of such a system are obtained. Namely, the following inequalities are proved

$$\text{a) } \text{cat}(\Omega, M) \geq \frac{1}{s} \text{cat} M$$

$$\text{b) } \text{cat} \Omega \geq \text{cat} M,$$

where s is the number of the basic sets Ω_i . Some applications of this result are obtained.

We give in this note some low estimates of the Ljusternik-Schirelman category of the non-wandering set Ω for a given flow or diffeomorphism satisfying some

condition (Theorem 1). This condition is always fulfilled for axiom A + no-cycle condition dynamical systems and for Morse–Smale systems. However, we admit the existence of cycles (only 1-cycles are forbidden). By means of this result we obtain some information and low estimates of the number of critical elements for a given Morse–Smale flow (Theorem 2). Other possible applications are illustrated by the proposition at the end, where we estimate the covering dimension of the critical set of a smooth function with symmetry. The proofs are quite elementary and do not make use of hard algebraic topology arguments.

Recall first some definitions.

Let A be closed subset of M . The Ljusternik–Schnirelman category of A in M is the smallest natural number k such that $A = A_1 \cup \dots \cup A_k$, where A_i are closed and contractible in M into a point. Then we write

$$\text{cat}(A, M) = k.$$

We shall note for convenience

$$\text{cat } M = \text{cat}(M, M).$$

For the properties of the Ljusternik–Schnirelman category see for example [4]. Given a flow in M , the α and ω -limit sets of a point x are defined as usually:

$$\alpha(x) = \{y \in M \mid t_n x \rightarrow y \text{ for some } t_n \rightarrow -\infty\},$$

$$\omega(x) = \{y \in M \mid t_n x \rightarrow y \text{ for some } t_n \rightarrow +\infty\}$$

(see [3, 5] for details).

The non-wandering set Ω of the flow consists of all points $x \in M$ such that for any open $U \ni x$ and for any $t_0 > 0$ there exists $t \geq t_0$ such that $tU \cap U \neq \emptyset$.

A subset $V \subset M$ is called *unrevisited*, if $t_1 x \in V$ and $t_2 x \in V$ imply $tx \in V$ for any $t \in [t_1, t_2]$.

We shall suppose that

$$\Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_s,$$

where the basic sets Ω_i are disjoint, closed, invariant and for any $x \in M$ we have $\alpha(x) \subset \Omega_i, \omega(x) \subset \Omega_j$ for some i, j . Consider the sets

$$N_i = \{x \in M \setminus \Omega \mid \omega(x) \subset \Omega_i\}.$$

We shall formulate now the condition mentioned above.

(*) **Condition.**

(i) $\bar{N}_i \cap N_j = \emptyset$ for $i < j$.

(ii) Each basic set Ω_i has a base of unrevisited open neighbourhoods.

(iii) If $\alpha(x) \subset \Omega_i$ and $\omega(x) \subset \Omega_j$, then $i \neq j$ (no 1-cycle condition).

In the case of a discrete time dynamical system, defined by a diffeomorphism $f : M \rightarrow M$, all the definitions are reformulated in an obvious way.

Theorem 1. *Let M be a closed connected manifold with a C^1 -flow (diffeomorphism), satisfying Condition (*). Then for the category of the non-wandering set Ω we have the inequalities*

$$\text{a) } \text{cat}(\Omega, M) \geq \frac{1}{s} \text{cat } M;$$

b) $\text{cat } \Omega \geq \text{cat } M$;

where s is the number of the basic sets Ω_i .

For the proof of this theorem we need two technical lemmas.

Lemma 1. *Let A be a compact and invariant (with respect to some given flow) subset of the closed manifold M and there is no such a point $x \in M$ that $\alpha(x) \cap A \neq \emptyset$ and $\omega(x) \cap A \neq \emptyset$. Let U and V be open subsets of M such that U is unrevisited, $U \supset A$, $U \cap V = \emptyset$ and for any $x \in M$ either $\omega(x) \subset A$ or $\omega(x) \subset V$. Let, finally $F \subset M \setminus V$ be closed and $\omega(x) \subset A$ for any $x \in F$. Then there exists t_0 such that $tF \subset U$ for $t \geq t_0$.*

Proof. Since F is compact, it is enough to show, that for every $x \in F$ there are a neighbourhood Ox and t_0 such that $t(Ox \cap F) \subset U$ for $t \geq t_0$. Consider the sets

$$F' = \{x \in F \mid tx \in M \setminus V \text{ for } t \geq 0\}, \quad F^0 = \{tx \mid x \in F', t \geq 0\}.$$

Clearly, F^0 is positively invariant (i. e. $tF^0 \subset F^0$ for $t \geq 0$). Consider the closure $\Phi = \overline{F^0}$. It is compact, positively invariant and $\Phi \subset M \setminus V$. Evidently $\omega(x) \subset A$ for $x \in \Phi$.

We shall prove first the local assertion about Φ — that for any $x \in \Phi$ there are Ox and t_0 such that $t(Ox \cap \Phi) \subset U$ for $t \geq t_0$. Suppose, this is not true. Then we can find a sequence $x_n \rightarrow x_0$, $x_n \in \Phi$, and positive numbers $t_n \rightarrow \infty$ such that $t_n x_n \notin U$. Passing to a subsequence we may suppose that $t_n x_n \rightarrow z_0$. Then $z_0 \in \Phi$ since Φ is positively invariant and closed.

Now we shall show that $\alpha(z_0) \cap A \neq \emptyset$. Consider the arcs $[x_n, t_n x_n]$, where $x_n \rightarrow x_0$, $t_n x_n \rightarrow z_0$. Suppose first, that the limit set of these arcs does not intersect $\alpha(z_0)$, then x_0 and z_0 lie in one and the same trajectory and $[x_n, t_n x_n] \rightarrow [x_0, z_0]$. Since $\omega(x_0) \subset A$, there exists a sequence $y_n = \theta_n x_n$ such that $0 < \theta_n < t_n$ and $y_n \rightarrow y_0 \in A$. But then $y_0 \in [x_0, z_0]$, i. e. $y_0 = \theta_0 x_0$ which is a contradiction, since $x_0 \notin A$ and A is invariant.

So, the limit set of the arcs $[x_n, t_n x_n]$ intersects $\alpha(z_0)$. Then we can find a sequence $y_n = \theta_n x_n$ with $0 < \theta_n < t_n$ such that $y_n \rightarrow y_0 \in \alpha(z_0)$. But $x_n \in \Phi$, hence $y_n \in \Phi$ (Φ is positively invariant). Then $y_0 \in \Phi$ and therefore $\omega(y_0) \subset A$. But $\alpha(z_0)$ is invariant and $y_0 \in \alpha(z_0)$, consequently $\omega(y_0) \subset \alpha(z_0)$ and $\alpha(z_0) \cap A \neq \emptyset$. On the other hand, $z_0 \in \Phi$ hence $\omega(z_0) \subset A$ which contradicts the conditions of the lemma.

Since Φ is compact, $t_1 \Phi \subset U$ for some $t_1 > 0$. Then $t_1(O\Phi) \subset U$ for some open neighbourhood $O\Phi$. Note that $t_2 F \subset O\Phi$ for some $t_2 > 0$. Really, if $x \in F$ then $tx \in \Phi$ for some $t \geq 0$ and there is an open neighbourhood Ox such that $tOx \subset O\Phi$. Therefore $t_2 F \subset O\Phi$ for some $t_2 \geq 0$. Then $t_1 t_2 F \subset t_1 O\Phi \subset U$ and $t_1 t_2 \geq 0$. If now $t \geq t_1 t_2$, then $tF \subset U$ since U is unrevisited and for any $x \in F$ we have $\omega(x) \subset A \subset U$.

The lemma is proved.

Lemma 2. *Let A be a closed invariant subset of M which has a base of unrevisited neighbourhoods and F be a closed set such that for any neighbourhood $U \supset A$ we have $tF \subset U$ for t sufficiently large. Then there exists an open $V \supset A$, such that*

$$\text{cat}(F \cup \overline{V}, M) = \text{cat}(A, M)$$

Proof. Take such open unrevisited U, V that $A \subset V \subset \bar{V} \subset U$ and $\text{cat}(\bar{U}, M) = \text{cat}(A, M)$. Let $\lambda : [0, 1] \rightarrow M$ be a continuous map, such that $\lambda(\bar{V}) = 0, \lambda(M \setminus U) = 1$. We have $tF \subset V$ for some $t \geq 0$. Let $\varphi(x) = t\lambda(x).x$. It is easy to see, that $\varphi(F \cup \bar{V}) \subset U$. Really, for $x \in \bar{V}$ we have $\varphi(x) = x$ and for $x \in F \setminus U - \varphi(x) = tx \in V$. If $x \in U \cap F$, then $\varphi(x) \in U$ since $\omega(x) \subset U$ and U is unrevisited.

But evidently φ is homotopic to the identity, $\varphi \sim id_M$ and by the elementary properties of the Ljusternik-Schnirelman category we obtain

$$\text{cat}(F \cup \bar{V}, M) \leq \text{cat}(\bar{U}, M) = \text{cat}(A, M).$$

The inverse inequality is obvious.

Proof of Theorem 1. Take open $V_i \supset \Omega_i$ satisfying the conditions of Lemma 2. Then the set $F_1 = N_1 \setminus \bigcup_{i=2}^s V_i$ is closed in M as following from Condition

(i). According to Lemma 1, we have that for any open $U \supset \Omega_1$ there exists t_0 such that $tF_1 \subset U$ for $t \geq t_0$. Then Lemma 2 implies $\text{cat}(F_1 \cup \bar{V}_1, M) = \text{cat}(\Omega_1, M)$. We may find an open neighbourhood $W_1 \supset F_1 \cup \bar{V}_1$ with $\text{cat}(\bar{W}_1, M) = \text{cat}(\Omega_1, M)$. Set $F_2 = N_2 \setminus (\bigcup_{i \neq 2} V_i \cup W_1)$. We shall prove, that it is closed in M . Really, if $x \in \bar{F}_2$,

then $x \in \bar{N}_2$ and $x \notin \bigcup_{i \neq 2} V_i \cup W_1$. If we suppose $x \notin N_2$ then $x \in N_1$ (as following from (i)), hence $x \in F_1$ therefore $x \in W_1$, which is a contradiction.

By the same reasoning we obtain from Lemma 1 and Lemma 2, that $\text{cat}(F_2 \cup \bar{V}_2, M) = \text{cat}(\Omega_2, M)$. Take $W_2 \supset F_2 \cup \bar{V}_2$ such that $\text{cat}(\bar{W}_2, M) = \text{cat}(\Omega_2, M)$. Proceeding by induction we define closed sets F_k and their open neighbourhoods $F_k = N_k \setminus (\bigcup_{i \neq k} V_i \cup \bigcup_{j=1}^{k-1} W_j)$, $W_k \supset F_k \cup \bar{V}_k$ such that

$$\text{cat}(\bar{W}_k, M) = \text{cat}(\Omega_k, M).$$

It is easy to show, that $\bigcup W_i = M$. Really, if we suppose, that $x \notin \bigcup W_i$, then $x \notin \bigcup V_i$, and if now $x \in N_k$, then $x \in F_k$ whereby $x \in W_k$ — contradiction. So

$$\sum_i \text{cat}(\Omega_i, M) = \sum_i \text{cat}(\bar{W}_i, M) \geq \text{cat} M.$$

The second inequality is an obvious property of the category. But since Ω_i are disjoint and M is connected,

$$\text{cat}(\Omega, M) = \max \text{cat}(\Omega_i, M)$$

hence

$$\text{cat}(\Omega, M) \geq \frac{1}{s} \sum_i \text{cat}(\Omega_i, M) \geq \frac{1}{s} \text{cat} M$$

so a) is proved and b) follows from the inequalities

$$\text{cat} \Omega = \sum \text{cat} \Omega_i \geq \sum \text{cat}(\Omega_i, M) \geq \text{cat} M.$$

The theorem is proved.

For diffeomorphisms the proof works with little modifications — we have only to make use of the trivial fact, that $\text{cat } A = \text{cat } f(A)$ for any diffeomorphism $f : M \rightarrow M$.

Let us note, that the conditions of Theorem 1 are fulfilled for any axiom A + no-cycle condition flow or diffeomorphism, or any flow (diffeomorphism) with a Morse-Smale decomposition and consequently for “gradient-like” flows (diffeomorphisms). In all these examples there are no cycles, but the theorem covers quite more general situations, where cycles are admitted. A simple example is given by the flow in S^1 with 2 nonhyperbolic stationary points. On the other hand, Theorem 1 easily implies the classical Ljusternik-Schnirelman theorem, which states that any smooth function on M has at least $\text{cat } M$ critical points. (We only have to consider its gradient flow on M). Theorem 1 also enables us to give low estimates for the covering dimension of the non-wandering set Ω . If M is a closed connected manifold and A is a closed subset, the following inequality holds

$$\text{cat}(A, M) \leq \dim A + 1.$$

Really, let $\dim A = k$, then for any $\varepsilon > 0$ there is a ε -map $\varphi_\varepsilon : A \rightarrow P_k$ into a k -dimensional polyhedron. We have only to note, that P_k may be represented as the union $P_k = \bigcup_{i=1}^{k+1} F_i$ of $k+1$ closed subset, each F_i being a finite union of sufficiently small nonintersecting closed sets. Then, evidently $\text{cat}(\varphi_\varepsilon^{-1}(F_i), M) = 1$, therefore $\text{cat}(A, M) \leq k + 1$. This inequality and Theorem 1 imply the following

Corollary. *Let M be as in Theorem 1. Then*

$$\dim \Omega \geq \frac{1}{s} \text{cat } M - 1.$$

Another corollary is obtained for a flow with a finite number of critical elements (stationary points and periodic trajectories). The following theorem gives some low estimates for their number. Its conditions are obviously fulfilled for Morse-Smale flows.

Theorem 2. *Let M be a closed connected manifold with a flow, satisfying Condition (*), whose non-wandering set consists of s_1 stationary points and s_2 periodic trajectories. Let $s = s_1 + s_2$. Then*

- 1) $s \geq \frac{1}{2} \text{cat } M$.
- 2) $s_1 + 2s_2 \geq \text{cat } M$.
- 3) If $s < \text{cat } M$, then there is a periodic trajectory nonhomotopic to zero in M .

Proof. 1) Evidently $\text{cat}(\Omega, M) \leq 2$ and Theorem 1 gives

$$2 \geq \text{cat}(\Omega, M) \geq \frac{1}{s_0} \text{cat } M \geq \frac{1}{s} \text{cat } M,$$

where s_0 is the number of the basic sets, i. e. $s \geq \frac{1}{2} \text{cat } M$.

2) Clearly, $\text{cat } \Omega = s_1 + 2s_2$ and again by Theorem 1

$$s_1 + 2s_2 = \text{cat } \Omega \geq \text{cat } M.$$

3) We have $\text{cat}(\Omega, M) \geq \frac{1}{s} \text{cat} M > 1$, i.e. $\text{cat}(\Omega, M) \geq 2$ which means that Ω is not contractible into a point in M , consequently there is a periodic trajectory in Ω , which is nonhomotopic to zero in M .

Another application of Theorem 1 is the estimate of the critical set of a smooth function. It may be illustrated by the following proposition (this kind of estimates are typical in the Ljusternik-Schnirelman-Morse theory - see for example [2]).

Proposition. *Let G be a finite abelian group, or $G = S^1$, or S^3 , acting freely in the n -sphere S^n . Let $f : S^n \rightarrow \mathbf{R}^1$ be a smooth function such that $f(gx) = f(x)$ for any $x \in S^n$, $g \in G$, with exactly s critical values. Consider the critical set, where the Jacobian Df vanishes*

$$\Omega = \{x \in S^n \mid Df(x) = 0\}.$$

Then

$$\dim \Omega \geq \frac{n+1}{s(\dim G + 1)} + \dim G - 1.$$

Proof. It is well-known, that for the category of the orbit space S^n/G (which is a closed manifold) we have

$$\text{cat } S^n/G = \frac{n+1}{\dim G + 1}$$

(see for example [1]).

Clearly, f induces a function on the orbit space $f_G : S^n/G \rightarrow \mathbf{R}^1$. Consider now the gradient flow defined by $\text{grad } f_G$. Its non-wandering set coincides with the critical set Ω/G of f_G . Since f_G has s critical values, Ω/G is decomposed into s basic sets. Now, the corollary from Theorem 1 gives

$$\dim \Omega \setminus G \geq \frac{n+1}{s(\dim G + 1)} - 1$$

which implies, naturally,

$$\dim \Omega \geq \frac{n+1}{s(\dim G + 1)} + \dim G - 1.$$

REFERENCES

1. Bredon, G. E. Introduction to compact transformation groups. Academic press, 1972.
2. Klingenberg, W. Lectures on closed geodesics. Springer-Verlag, 1978.
3. Nitecki, Z. Differentiable dynamics. The MIT Press, 1971.
4. Palais, R. Ljusternik-Schnirelman theory of Banach manifolds. Topology, 5, 1966, 115-132.
5. Palis, J., W. de Melo. Geometric theory of dynamical systems (An introduction). Springer-Verlag, 1982.

Received 29.03.1991

ОДНА ТЕОРЕМА О СОВПАДЕНИИ

СИМЕОН СТЕФАНОВ

Симеон Стефанов. ОДНА ТЕОРЕМА О СОВПАДЕНИИ

В этой заметке доказана одна теорема о совпадении для отображений между евклидовыми пространствами.

Simeon Stefanov. A COINCIDENCE POINT THEOREM

In this note a coincidence point theorem is proved for maps between Euclidean spaces.

Напомним классическую теорему Пуанкаре–Хопфа (см. напр. [2]).

Теорема (Пуанкаре–Хопф). *Каждое векторное поле на четномерной сфере S^{2k} аннулируется в некоторой точке $x \in S^{2k}$.*

В этой заметке получена одна теорема о совпадении в довольно общей ситуации, которая обобщает, в частности, теорему Пуанкаре–Хопфа.

Прежде чем сформулировать основной результат, сделаем некоторые замечания об обозначениях.

Если $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ — канонически вложенные евклидовы пространства, то через $(\mathbb{R}^k)^\perp$ обозначаем ортогональное дополнение \mathbb{R}^k в \mathbb{R}^n .

$\dim A$ обозначает размерность Лебега множества A , определенную при помощи покрытий.

$H_n(A, B)$ есть группа относительных гомологий пары (A, B) с целыми коэффициентами.

Одноточечная компактификация \mathbb{R}^n является сферой S^n ; будем предполагать, что \mathbb{R}^n компактифицировано при помощи точки ∞ , так что $S^n =$

$\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. Подмножество $A \subset \mathbb{R}^n$ будем также считать и подмножеством S^n .

В работе использованы элементарные свойства гомотопий и некоторые свойства эйлерового класса $e(\xi)$ векторного расслоения ξ .

Теорема. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывное отображение и $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2k+1}$ — ортогональный проектор ($2k+1 \leq n$). Рассмотрим множество

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}: Pf(x) = \lambda P(x)\}.$$

Тогда $\dim A \geq n - 2k$ и даже

$$H_{n-2k}(A \cup \{\infty\}), (\mathbb{R}^{2k+1})^\perp \cup \{\infty\} \neq 0.$$

Доказательство. Пусть $\mathbb{R}^{2k+1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{2k+2} = \dots = x_n = 0\}$ и $\mathbb{R}^{n-2k-1} = (\mathbb{R}^{2k+1})^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = \dots = x_{2k+1} = 0\}$. Введем обозначения $A_* = A \cup \{\infty\}$, $\mathbb{R}_*^{n-2k-1} = \mathbb{R}^{n-2k-1} \cup \{\infty\}$, тогда ясно, что $\mathbb{R}_*^{n-2k-1} \subset A_*$. Будем считать также, что $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$.

Допустим, что $H_{n-2k}(A_*, \mathbb{R}_*^{n-2k-1}) = 0$. Тогда отображение

$$H_{n-2k-1}(\mathbb{R}_*^{n-2k-1}) \rightarrow H_{n-2k-1}(A_*),$$

индуцированное вложением, является мономорфизмом. Из двойственности Александера (см. [1], с. 319) следует, что

$$H^{2k}(S^n \setminus \mathbb{R}_*^{n-2k-1}) \rightarrow H^{2k}(S^n \setminus A_*)$$

также мономорфизм и значит отображение

$$H^{2k}(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-2k-1}) \rightarrow H^{2k}(\mathbb{R}^n \setminus A),$$

индуцированное вложением, тоже мономорфизм. Наконец, существует компакт $K \subset \mathbb{R}^n \setminus A$ такой, что мономорфизм и отображение

$$i^*: H^{2k}(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-2k-1}) \rightarrow H^{2k}(K),$$

где $i: K \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-2k-1}$ — вложение.

Определим $\pi: \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-2k-1} \rightarrow S^{2k}$ формулой

$$\pi(x) = \frac{(x_1, \dots, x_{2k+1})}{\|(x_1, \dots, x_{2k+1})\|} = \frac{P(x)}{\|P(x)\|}.$$

Очевидно, что $\pi^*: H^{2k}(S^{2k}) \rightarrow H^{2k}(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-2k-1})$ — изоморфизм. Пусть ξ — касательное расслоение над S^{2k} . Тогда его эйлеров класс является нетривиальным — $e(\xi) \neq 0$. Рассмотрим отображение $\pi i: K \rightarrow S^{2k}$ и расслоение $\eta = (\pi i)^* \xi$ над K . Имеем $e(\eta) = e((\pi i)^* \xi) = (\pi i)^* e(\xi) = i^* \pi^* e(\xi) \neq 0$ в силу того, что $i^* \pi^*$ — мономорфизм. Это означает, что каждое сечение расслоения η аннулируется (см. напр. [2], с. 87). Мы построим, однако, ненулевое сечение η , что является противоречием.

Геометрически η можно представить следующим образом: если $\tau(\pi(x))$ — касательное пространство к S^{2k} в точке $\pi(x)$, то слой η в точке x равен $\eta_x = x - \pi(x) + \tau(\pi(x))$. Если $x \in K$, то $x \notin A$ и значит векторы $Pf(x)$ и $P(x)$ не коллинеарны, откуда следует, что вектор $P(f(x) - x)$

не является нормальным к S^{2k} . Пусть $\pi_x : \mathbf{R}^n \rightarrow \eta_x$ обозначает проекцию на слой η_x , тогда определяя

$$S(x) = \pi_x P(f(x) - x)$$

получаем ненулевое сечение расслоения η , что противоречит $\epsilon(\eta) \neq 0$.

Следствие. Пусть $f : \mathbf{R}^{2k+1} \rightarrow \mathbf{R}^{2k+1}$ непрерывное отображение и

$$A = \{x \in \mathbf{R}^{2k+1} \mid \exists \lambda \in \mathbf{R} : f(x) = \lambda(x)\}.$$

Тогда компонента связности A , содержащая 0 — неограничена.

Отметим, что для четномерных пространств \mathbf{R}^{2k} следствие (и тем более теорема) неверно — достаточно представить

$$\mathbf{R}^{2k} = \{z = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbf{C}^k\}$$

и взять например $f(z) = (iz_1, \dots, iz_k)$.

Это следствие обобщает упомянутую теорему Пуанкаре–Хопфа. В самом деле, допустим, что на S^{2k} существует ненулевое касательное векторное поле τ . Считая сферу S^{2k} вложенной в \mathbf{R}^{2k+1} , обозначим через $f(x)$ конец касательного вектора $\tau(x)$. Продолжим f на \mathbf{R}^{2k+1} так:

$$\tilde{f}(x) = f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \|x\| \text{ для } x \neq 0 \text{ и } \tilde{f}(0) = 0.$$

Тогда получаем противоречие со следствием, так как в этом случае множество A одноточечно — $A = \{0\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М а с с и, У. Теория гомологий и когомологий. М., 1981.
2. М и л н о р, Д ж., Д ж. С т а ш е ф. Характеристические классы. М., 1979.

Поступила 29.03.1991

HORN CLAUSE PROGRAMS ON ABSTRACT STRUCTURES WITH PARAMETERS*

EXTENDED ABSTRACT

IVAN N. SOSKOV

Иван Н. Сосков. ПРОГРАММИ С ХОРНОВИМИ КЛАУЗАМИ НА АБСТРАКТ-
НЫЕ СТРУКТУРЫ С ПАРАМЕТРАМИ

В статье вводится понятие абстрактных структур с параметрами. Параметрами являются подмножества области определения структур, которые трактуются как эффективно нумеруемые, а не как полувывчислимые множества. С помощью этих структур определяется семантика программ с Хорновыми клаузами. Таким образом получаемый язык программирования показывается, что замкнут относительно рекурсии и имеет максимальную выразительную силу по отношению ко всем языкам программирования, обладающими некоторыми теоретико-модельными условиями.

Ivan N. Soskov. HORN CLAUSE PROGRAMS ON ABSTRACT STRUCTURES WITH PARAMETERS

In the paper abstract structures with parameters are introduced. The parameters are subsets of the domain of a structure which are treated as effectively enumerable rather than semi-computable sets. Semantics of Horn clause programs on such structures is defined. The obtained this way programming language is shown to be closed under recursion and possessing maximal expressive power with respect to all programming languages satisfying certain model-theoretic conditions.

0. INTRODUCTION

In this paper we present a generalized version of the declarative semantics of the Horn clause programs and use it to study the more complicated Horn clause

* Research partially supported by the Ministry of Science and Higher Education, contract No 933.

programs with parameters.

The usual minimal model semantics of van Emden and Kowalski [1] is not appropriate to study the respective notion of Horn clause computability. To compare Horn clause programs with other commonly studied programming languages (classes of program schemes) we need a concept of Horn clause computability, that applies to any first order structure. In [2] and [3] two concepts of Horn clause computability on first order structures have been defined, which seem to be equivalent. The first one is based on the usual declarative semantics, while the second is a generalization of the usual procedural semantics. In both approaches the underlined functions and predicates of a first order structure are considered as built-in functions and predicates, and the objects computable by means of Horn clause programs are subsets of the domain of the structure. In both papers the obtained concepts of Horn clause computability have been compared with some other concepts of computability and are proved to be stronger or at least equal to them.

Furthermore, it is shown in [4] that each programming language, satisfying certain natural conditions, is uniformly translatable into the language of the Horn clause programs.

One may suppose that having semantics of the Horn clause programs on arbitrary first order structures, we automatically obtain the semantics of Horn clause programs with parameters (Horn clause modules) on such structures. Indeed, it seems promising when given a structure \mathfrak{A} and a subset A of the domain of \mathfrak{A} , to define the semantics of a Horn clause program P using A as a parameter, to be equal to the semantics of P on the extended structure $\langle \mathfrak{A}, A \rangle$, where A is a new built one in predicate. Unfortunately, this approach is not satisfactory because the obtained notion of computability is not transitive, unless the equality relation is among the underlined predicates of \mathfrak{A} . Namely, one can construct a structure \mathfrak{A} and a Horn clause program P , such that if A denotes the set computable by means of P on \mathfrak{A} , then the Horn clause computable sets on $\langle \mathfrak{A}, A \rangle$ do not coincide with the Horn clause computable sets on \mathfrak{A} .

To explain this, let us recall that there exist two kinds of effectively computable sets — the semi-computable sets and the effectively enumerable ones. Intuitively, a set W is semi-computable if there exists a computational process, which stops and gives a positive answer iff its argument belongs to W . This is the way in which we treat the built in predicates. A set W is effectively enumerable if there exists a computational process, which generates the elements of W in the course of the computation. A typical example of this kind of sets are the sets computable by means of Horn clause programs.

In the classical case of computability on the natural numbers both classes of sets coincide with the recursively enumerable sets. In general, the semi-computable sets are a proper subclass of the effectively enumerable ones. In fact the effectively enumerable sets on a structure \mathfrak{A} coincide with the semi-computable on \mathfrak{A} sets if and only if the equality relation is semi-computable.

So, we obtain that the discussed above approach to the semantics of the Horn clause programs with parameters is reasonable only for structures, on which the

effectively enumerable sets coincide with the semi-computable ones, i. e. for structures on which the equality is semi-computable.

Among all attempts to obtain semantics of Horn clause programs with parameters the most satisfactory one belongs to Fitting [5]. His approach is a particular case of the one described above, applied to the structure $\mathfrak{A} = (\mathbf{N}; G_S)$, where \mathbf{N} is the set of all natural numbers and G_S is the graph of the successor function. In this case the equality relation is semi-computable, because for any natural x and y , $x = y$ iff there exists a z , such that $(x, z) \in G_S$ and $(y, z) \in G_S$.

To obtain an appropriate semantics of the Horn clause programs with parameters on arbitrary first order structures, we introduce here first order structures with parameters, where the parameters are subsets of the domain of the structure, which are treated as effectively enumerable sets rather than semi-computable ones. After that we define semantics of the Horn clause programs on such structures. The obtained in this way programming language has some nice properties. First of all, it has a greater expressive power compared to all programming languages, satisfying certain natural conditions. This fact allows us to establish that it is closed with respect to least fixed points and that the respective notion of computability is transitive.

1. HORN CLAUSE PROGRAMS ON ABSTRACT STRUCTURES

Let $\mathcal{L} = (c_1, \dots, c_r, f_1, \dots, f_n, T_1, \dots, T_k)$ be a fixed first order language, where c_1, \dots, c_r are constant symbols, f_1, \dots, f_n are functional symbols and T_1, \dots, T_k — predicate symbols. Let us suppose that each f_i is a_i -ary and each T_j is b_j -ary. Here each of r, n, k may be equal to 0.

A first order structure of the language \mathcal{L} is a $r+n+k+1$ -tuple $\mathfrak{A} = (A, p_1, \dots, p_r, \theta_1, \dots, \theta_n, \Sigma_1, \dots, \Sigma_k)$, where A — the domain of \mathfrak{A} — is an arbitrary non-empty set of objects, p_1, \dots, p_r are elements of A , each θ_i is an a_i -ary function on A and each Σ_j is a subset of A^{b_j} .

In what follows we shall consider only structures of the language \mathcal{L} with denumerable (finite or countable) domains. Given a structure \mathfrak{A} , we shall denote the domain of \mathfrak{A} by $|\mathfrak{A}|$.

We assume that the reader is familiar with the basic syntactic notions as terms, atomic formulae (atoms), etc. As usual, ground terms and ground atoms are called respectively terms and atoms without variables.

A Horn clause program is an ordered pair $\langle P, H \rangle$, where H — the goal relation — is a predicate symbol, not belonging to $\{T_1, \dots, T_k\}$, and P is a finite conjunction $F_1 \& \dots \& F_l$ of universal closures of Horn clauses, i. e. each F_i is in the form $\forall X_1 \dots \forall X_q (\Pi \vee \neg \Pi_1 \vee \dots \vee \neg \Pi_m)$, where $m \geq 0$ and all Π, Π_1, \dots, Π_m are atoms with variables among X_1, \dots, X_q .

The constants, the functional and the predicate symbols, which occur in P , constitute the first order language \mathcal{L}_P of P . We shall always assume that \mathcal{L}_P is consistent with \mathcal{L} , i. e. if \mathcal{L}_P and \mathcal{L} have common symbols, then these symbols are of the same arity and play the same role in both languages.

To define the semantics of a Horn clause program $\langle P, H \rangle$ on the structure $\mathfrak{A} = (A, p_1, \dots, p_r, \theta_1, \dots, \theta_n, \Sigma_1, \dots, \Sigma_k)$, we need a first order theory $\partial(\mathfrak{A})$, known as the diagram of \mathfrak{A} . By means of $\partial(\mathfrak{A})$ we describe the underlined functions and predicates of \mathfrak{A} .

A new formal constant k_s is introduced for each element s of A . The constants $k_s, s \in A$, are called names for the elements of A . Let $K = \{k_s : s \in A\}$. We shall assume that none of the elements of K occurs in P . Let \mathcal{L}_K be the extension of \mathcal{L} with the constants of K .

Now define the diagram $\partial(\mathfrak{A})$ of \mathfrak{A} , based on K , to be the set of all ground atoms of \mathcal{L}_K which are true on \mathfrak{A} .

Let \mathcal{T}_K denote the set of all ground terms of the language \mathcal{L}_K . If $\tau \in \mathcal{T}_K$, then by $\tau_{\mathfrak{A}}$ we shall denote the value of τ on \mathfrak{A} .

Let H be a -ary. Define the subset W of A^a by the equivalence

$$(s_1, \dots, s_a) \in W \iff \exists \tau^1 \dots \exists \tau^a \left(\tau^1 \in \mathcal{T}_K \ \& \ \dots \ \& \ \tau^a \in \mathcal{T}_K \ \& \ \tau_{\mathfrak{A}}^1 = s_1 \ \& \ \dots \ \& \ \tau_{\mathfrak{A}}^a = s_a \ \& \ \partial(\mathfrak{A}) \cup \{P\} \vdash H(\tau^1, \dots, \tau^a) \right).$$

Here the sign " \vdash " means derivability in the sense of the first order predicate calculus.

Since no one of the elements of K occurs in P , the set W does not depend on the choice of K .

Define the semantics $\mathcal{P}(\langle P, H \rangle, \mathfrak{A})$ of $\langle P, H \rangle$ on \mathfrak{A} to be equal to W .

Notice that if we know the diagram $\partial(\mathfrak{A})$, then we have an effective way to generate all elements of W . So we see that W is effectively enumerable on \mathfrak{A} . On the other hand, since the equality is not assumed to be computable on \mathfrak{A} , we can not decide effectively whether an a -tuple (s_1, \dots, s_a) belongs to W .

Now we shall show that our semantics agrees with the minimal model semantics of van Emden and Kowalski.

Let P be a finite conjunction of universal closures of Horn clauses. Let $\mathcal{L}_P = (c_1, \dots, c_r, f_1, \dots, f_n, H_1, \dots, H_k)$. Let A_P be the Herbrand universe of \mathcal{L}_P and let M_P be the least Herbrand model of P . In other words, M_P is the set of all ground atoms Π of the language \mathcal{L}_P , such that $P \vdash \Pi$.

Consider the first order structure $\mathfrak{A}_P = (A_P, c_1, \dots, c_r, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ of the language $(c_1, \dots, c_r, f_1, \dots, f_n)$, where each φ_i is an a_i -ary function on A_P defined by $\varphi_i(\tau_1, \dots, \tau_{a_i}) = f_i(\tau_1, \dots, \tau_{a_i})$.

Proposition 1. *Let $1 \leq j \leq k$. Then*

$$(\tau_1, \dots, \tau_{b_j}) \in \mathcal{P}(\langle P, H_j \rangle, \mathfrak{A}_P) \iff H_j(\tau_1, \dots, \tau_{b_j}) \in M_P.$$

2. HORN CLAUSE COMPUTABILITY

In this section we shall examine Horn clause computability from the viewpoint of a general theory of computability on abstract structures.

Let \mathcal{A} be a class of denumerable abstract structures. We want to treat \mathcal{A} as an abstract data type and, hence, we have to suppose some additional properties

of \mathcal{A} . The obvious requirement is that \mathcal{A} should be closed under isomorphisms. Since isomorphisms preserve the equality, we shall suppose something more. Namely, we shall suppose that \mathcal{A} is closed under strong homomorphisms. Strong homomorphisms are isomorphisms, which need not to be injective. More precisely, if $\mathfrak{A} = (A, p_1, \dots, p_r, \theta_1, \dots, \theta_n, \Sigma_1, \dots, \Sigma_k)$ and $\mathfrak{B} = (B, q_1, \dots, q_r, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \sigma_1, \dots, \sigma_k)$ are structures, then the surjective mapping κ of A onto B is a *strong homomorphism* from \mathfrak{A} to \mathfrak{B} if the following conditions hold:

- (i) $\kappa(p_i) = q_i, \quad i = 1, \dots, r;$
- (ii) $\kappa(\theta_i(s_1, \dots, s_{a_i})) = \varphi_i(\kappa(s_1), \dots, \kappa(s_{a_i}))$
for all s_1, \dots, s_{a_i} of $A, i = 1, \dots, n;$
- (iii) $(s_1, \dots, s_{b_j}) \in \Sigma_j \iff (\kappa(s_1), \dots, \kappa(s_{b_j})) \in \sigma_j$
for all s_1, \dots, s_{b_j} of $A, j = 1, \dots, k.$

The class \mathcal{A} is *closed under strong homomorphisms* if whenever \mathfrak{B} belongs to \mathcal{A} , \mathfrak{A} is a structure and there exists a strong homomorphism from \mathfrak{A} to \mathfrak{B} , then $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}$.

Each closed under strong homomorphisms class of denumerable structures will be called for short *abstract data type* (ADT).

There are many natural examples of ADT. Consider, for example, the class of all structures or the class of all denumerable models of T , where T is a first order theory of the language \mathcal{L} without equality.

Let us fix an ADT \mathcal{A} . A *programming language* on \mathcal{A} is an ordered triple $L = \langle \mathcal{D}, \rho, \mathcal{S} \rangle$, where \mathcal{D} is a denumerable set of objects — the syntactic descriptions of the programs of L , ρ — the arity function — is a mapping of \mathcal{D} into $\mathbf{N} \setminus \{0\}$ and \mathcal{S} — the semantics of the programs in L — is a mapping of $\mathcal{D} \times \mathcal{A}$, such that if $d \in \mathcal{D}$ and $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}$, then $\mathcal{S}(d, \mathfrak{A})$ is equal to the object computable by means of the program d on the structure \mathfrak{A} . This object is typically a partial function or a set. Here we shall suppose that $\mathcal{S}(d, \mathfrak{A})$ is a subset of $|\mathfrak{A}|^{\rho(d)}$.

There are at least two natural conditions which should satisfy each programming language L on \mathcal{A} . First of all it should be in some sense effective.

The programming language $L = \langle \mathcal{D}, \rho, \mathcal{S} \rangle$ is said to be *effective* on \mathcal{A} if for each $d \in \mathcal{D}$, the semantics of d is uniformly effective on all structures \mathfrak{B} of \mathcal{A} , such that $|\mathfrak{B}| = \mathbf{N}$. In other words, L is effective iff for each d of \mathcal{D} , there exists an enumeration operator Γ such that whenever $\mathfrak{B} \in \mathcal{A}$ and $\mathfrak{B} = (\mathbf{N}, q_1, \dots, q_r, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \sigma_1, \dots, \sigma_k)$, then

$$(s_1, \dots, s_{\rho(d)}) \in \mathcal{S}(d, \mathfrak{A}) \iff \langle s_1, \dots, s_{\rho(d)} \rangle \in \Gamma(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \sigma_1, \dots, \sigma_k).$$

For the definition of the enumeration operators the reader may consult [6].

The second condition is related to the implementation independence property of the language L . Let \mathfrak{A} and \mathfrak{B} be elements of \mathcal{A} and suppose that κ is a strong homomorphism from \mathfrak{A} to \mathfrak{B} . Let $d \in \mathcal{D}$ and let $W_{\mathfrak{A}} = \mathcal{S}(d, \mathfrak{A})$ and $W_{\mathfrak{B}} = \mathcal{S}(d, \mathfrak{B})$. Suppose for simplicity that $\rho(d) = 1$. Now the implementation independence property of L can be described by either of the following two conditions:

(1) For all $s \in |\mathfrak{A}|$, $s \in W_{\mathfrak{A}} \iff \kappa(s) \in W_{\mathfrak{B}}$,

(2) $W_{\mathfrak{B}} = \{\kappa(s) : s \in W_{\mathfrak{A}}\}$.

Clearly, (2) follows from (1). On the other hand, since κ need not be injective, we can not argue that (1) follows from (2).

The condition (1) is appropriate if the sets $W_{\mathfrak{A}}$ and $W_{\mathfrak{B}}$ are supposed to be semi-computable. If they are effectively enumerable, then we may expect only the weaker condition (2).

The programming language L is *e-invariant* on \mathcal{A} if whenever $d \in \mathcal{D}$, \mathfrak{A} and \mathfrak{B} are elements of \mathcal{A} and κ is a strong homomorphism from \mathfrak{A} to \mathfrak{B} , then

$$S(d, \mathfrak{B}) = \{(\kappa(s_1), \dots, \kappa(s_{\rho(d)})) : (s_1, \dots, s_{\rho(d)}) \in S(d, \mathfrak{A})\}.$$

Let $LP = \langle \mathcal{HC}, \rho_0, \mathcal{P} \rangle$, where \mathcal{HC} consists of all Horn clause programs, $\rho_0((P, H))$ is equal to the arity of H and \mathcal{P} is the semantics of the Horn clause programs defined in the previous section.

Proposition 2. *The programming language LP is effective and e-invariant on each ADT.*

The following theorem proved in [4] describes the main property of the Horn clause computability.

Let \mathcal{A} be an ADT and let $L_1 = \langle \mathcal{D}_1, \rho_1, \mathcal{S}_1 \rangle$ and $L_2 = \langle \mathcal{D}_2, \rho_2, \mathcal{S}_2 \rangle$ be programming languages on \mathcal{A} . Then L_1 is translatable into L_2 on \mathcal{A} (cf. [7]), in symbols $L_1 \leq_{\mathcal{A}} L_2$, iff for each $d_1 \in \mathcal{D}_1$ there exists a $d_2 \in \mathcal{D}_2$, such that $\rho_1(d_1) = \rho_2(d_2)$, and for all $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}$, $\mathcal{S}_1(d_1, \mathfrak{A}) = \mathcal{S}_2(d_2, \mathfrak{A})$.

Theorem 1. *Let \mathcal{A} be an abstract data type. Let L be an effective and e-invariant programming language on \mathcal{A} . Then $L \leq_{\mathcal{A}} LP$.*

This result should be compared with the generalized Church thesis, formulated in [3].

Other results, concerning universal programming languages satisfying certain natural model-theoretic conditions, can be found in [8] and [4].

3. ABSTRACT STRUCTURES WITH PARAMETERS

In this main section of the paper we shall introduce the abstract structures with parameters and define semantics of the Horn clause programs on such structures.

Let S_1, \dots, S_l, \dots be a sequence of new distinct predicate symbols intended to denote parameters. For the sake of simplicity we shall consider here only unary parameters. So we shall suppose that S_1, \dots, S_l, \dots are unary. However, all definitions and results can be easily generalized for parameters of arbitrary finite arity.

An *abstract structure with parameters* is an ordered tuple $\mathfrak{A}^* = (A_1, \dots, A_l)$, $l \geq 0$, where \mathfrak{A} is a structure of the language \mathcal{L} and A_1, \dots, A_l are subsets of $|\mathfrak{A}|$.

For every structure with parameters \mathfrak{A}^* let $\nu(\mathfrak{A}^*)$ be the number of the parameters of \mathfrak{A}^* . Two abstract structures \mathfrak{A}^* and \mathfrak{B}^* are of the same similarity type if $\nu(\mathfrak{A}^*) = \nu(\mathfrak{B}^*)$.

If $\mathfrak{A}^* = (\mathfrak{A}, A_1, \dots, A_l)$ is a structure with parameters and W is a subset of $|\mathfrak{A}|$, then by (\mathfrak{A}^*, W) we shall denote the structure $(\mathfrak{A}, A_1, \dots, A_l, W)$.

The parameters and the underlined predicates play different roles in the definition of the strong homomorphisms between structures with parameters.

Let $\mathfrak{A}^* = (\mathfrak{A}, A_1, \dots, A_l)$ and $\mathfrak{B}^* = (\mathfrak{B}, B_1, \dots, B_l)$ be two structures with parameters of the same similarity type. The surjective mapping κ of $|\mathfrak{A}|$ onto $|\mathfrak{B}|$ is called *strong homomorphism* from \mathfrak{A}^* to \mathfrak{B}^* iff κ is a strong homomorphism from \mathfrak{A} to \mathfrak{B} and for $i = 1, \dots, l$, $B_i = \{\kappa(s) : s \in A_i\}$.

We generalize the notion of ADT, defining an abstract data type to be a closed under strong homomorphisms class of denumerable structures with parameters of the same similarity type.

Further on the notions of effectiveness and e -invariance of a programming language on an ADT are generalized in an obvious way.

From now on we shall consider only Horn clause programs $\langle P, H \rangle$, such that $H \notin \{T_1, \dots, T_k, S_1, \dots, S_l, \dots\}$ and if for some l the symbol S_l occurs in P , then it is used as an unary predicate.

Now we shall define the semantics of a Horn clause program $\langle P, H \rangle$ on a structure with parameters $\mathfrak{A}^* = (\mathfrak{A}, A_1, \dots, A_l)$ in a way providing that the respective programming language is effective and e -invariant on each ADT.

For each element s of $|\mathfrak{A}|$ we introduce $l+1$ distinct names $k_s^0, k_s^1, \dots, k_s^l$. Let $K_0 = \{k_s^0 : s \in |\mathfrak{A}|\}$, \dots , $K_l = \{k_s^l : s \in |\mathfrak{A}|\}$ and let $K = K_0 \cup K_1 \cup \dots \cup K_l$. We shall suppose that the sets of names are chosen so that no one of the elements of K occurs in P . Let \mathcal{L}_K be the extension of \mathcal{L} with the constants of K and let \mathcal{T}_K be the set of all ground terms of \mathcal{L}_K . Let $\partial(\mathfrak{A})$ be the set of all ground atoms of \mathcal{L}_K which are true on \mathfrak{A} .

For i , $1 \leq i \leq l$, let $\partial(A_i) = \{S_i(k) : k \in K_i \text{ and } k \text{ is the name of an element of } A_i\}$.

Let $\partial(\mathfrak{A}^*) = \partial(\mathfrak{A}) \cup \partial(A_1) \cup \dots \cup \partial(A_l)$.

Notice that in the definition of $\partial(\mathfrak{A}^*)$ the underlined predicates and the parameters are not treated in an equal manner. For example, suppose that the underlined function θ_i applied to some s gives t . Suppose that $t \in \Sigma_j$ and $t \in A_m$, where Σ_j is an underlined predicate and A_m is a parameter. Then both $T_j(k_i^m)$ and $T_j(f_i(k_s^m))$ are elements of $\partial(\mathfrak{A}^*)$. On the other hand, $S_m(k_i^m) \in \partial(\mathfrak{A}^*)$ but $S_m(f_i(k_s^m))$ does not belong to $\partial(\mathfrak{A}^*)$. The picture changes if the equality relation is among the underlined predicates. In such a case $f_i(k_s^m) = k_i^m \in \partial(\mathfrak{A}^*)$ and, hence, $\partial(\mathfrak{A}^*) \vdash S_m(f_i(k_s^m))$.

Suppose that the predicate symbol H is a -ary. Now the semantics $\mathcal{P}^*(\langle P, H \rangle, \mathfrak{A}^*)$ of $\langle P, H \rangle$ on \mathfrak{A}^* is the subset W of $|\mathfrak{A}^a|$ defined by the equivalence:

$$(s_1, \dots, s_a) \in W \iff \exists \tau^1 \dots \exists \tau^a \left(\tau^1 \in \mathcal{T}_K \ \& \ \dots \ \& \ \tau^a \in \mathcal{T}_K \ \& \ \tau_{\mathfrak{A}}^1 = s_1 \ \& \ \dots \ \& \ \tau_{\mathfrak{A}}^a = s_a \ \& \ \partial(\mathfrak{A}^*) \cup \{P\} \vdash H(\tau^1, \dots, \tau^a) \right).$$

It follows immediately from the definition that for structures \mathfrak{A} without parameters $\mathcal{P}(\langle P, H \rangle, \mathfrak{A}) = \mathcal{P}^*(\langle P, H \rangle, \mathfrak{A})$.

Let LPP be the programming language $\langle \mathcal{HC}, \rho_l, \mathcal{P}^* \rangle$, where \mathcal{HC} is the set of all Horn clause programs and ρ_0 is defined as in the previous section.

Proposition 3. *The programming language LPP is effective and e-invariant on each ADT.*

The following theorem generalizes Theorem 1 and shows that our definition is in some sense the best possible one.

Theorem 2. *Let \mathcal{A} be an ADT and let L be an effective and e-invariant programming language on \mathcal{A} . Then $L \leq_{\mathcal{A}} LPP$.*

The proof of this theorem is long and technical and is omitted here.

As a first application of Theorem 2, we shall show that the respective Horn clause computability is transitive.

Let $l \geq 0$ and let \mathcal{A} be the class of all structures with parameters \mathfrak{A}^* such that $\nu(\mathfrak{A}^*) = l$. Clearly \mathcal{A} is an ADT.

Let $\langle P_0, H_0 \rangle$ be a Horn clause program, where the predicate symbol H_0 is unary. For each $\mathfrak{A}^* \in \mathcal{A}$, set $W_{\mathfrak{A}^*} = \mathcal{P}^*(\langle P_0, H_0 \rangle, \mathfrak{A}^*)$.

Theorem 3. *For each Horn clause program $\langle P, H \rangle$ there exists a Horn clause program $\langle Q, R \rangle$ such that for all $\mathfrak{A}^* \in \mathcal{A}$,*

$$\mathcal{P}^*(\langle P, H \rangle, (\mathfrak{A}^*, W_{\mathfrak{A}^*})) = \mathcal{P}^*(\langle Q, R \rangle, \mathfrak{A}^*).$$

Proof. Consider the programming language $L = \langle \mathcal{HC}, \rho_l, \mathcal{S} \rangle$ on \mathcal{A} , where for $\langle P, H \rangle \in \mathcal{HC}$ and $\mathfrak{A}^* \in \mathcal{A}$, $\mathcal{S}(\langle P, H \rangle, \mathfrak{A}^*) = \mathcal{P}^*(\langle P, H \rangle, (\mathfrak{A}^*, W_{\mathfrak{A}^*}))$.

Now we shall show that L is effective and e-invariant on \mathcal{A} . The effectiveness of L follows from the effectiveness of LPP and from the well known fact that the enumeration operators are closed under composition.

Let $\langle P, H \rangle$ be a Horn clause program and \mathfrak{A}^* and \mathfrak{B}^* be elements of \mathcal{A} . Suppose that κ is a strong homomorphism from \mathfrak{A}^* to \mathfrak{B}^* . From the e-invariance of LPP follows that $\kappa(W_{\mathfrak{A}^*}) = W_{\mathfrak{B}^*}$. Hence κ is a strong homomorphism from $(\mathfrak{A}^*, W_{\mathfrak{A}^*})$ to $(\mathfrak{B}^*, W_{\mathfrak{B}^*})$. From here, using once more the e-invariance of LPP , we obtain that

$$\kappa(\mathcal{P}^*(\langle P, H \rangle, (\mathfrak{A}^*, W_{\mathfrak{A}^*}))) = \mathcal{P}^*(\langle P, H \rangle, (\mathfrak{B}^*, W_{\mathfrak{B}^*}))$$

and, hence, that

$$\kappa(\mathcal{S}(\langle P, H \rangle, \mathfrak{A}^*)) = \mathcal{S}(\langle P, H \rangle, \mathfrak{B}^*).$$

Now applying Theorem 2, we obtain that $L \leq_{\mathcal{A}} LPP$. ■

The last theorem shows that we can eliminate the computable by means of Horn clause programs parameters in a uniform way.

4. HORN CLAUSE OPERATORS

Let $l \geq 0$ and let \mathcal{A} be the class of all structures with parameters \mathfrak{A}^* such that $\nu(\mathfrak{A}^*) = l$.

Let $\mathfrak{A}^* \in \mathcal{A}$ and let $\langle P, H \rangle$ be a Horn clause program, where H is unary. Define the mapping $\Gamma_{P,H}$ of the subsets of $|\mathfrak{A}^*|$ into the subsets of $|\mathfrak{A}^*|$ by the equality $\Gamma_{P,H}(W) = \mathcal{P}^*(\langle P, H \rangle, (\mathfrak{A}^*, W))$. It follows easily from the definition of \mathcal{P}^* that the operator $\Gamma_{P,H}$ is compact, i. e.

$$s \in \Gamma_{P,H}(W) \iff \exists D (D \subseteq W \ \& \ D \text{ is finite} \ \& \ s \in \Gamma_{P,H}(D)).$$

From here, applying the Knaster–Tarski theorem, we obtain that $\Gamma_{P,H}$ has a least fixed point W_0 and $W_0 = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Gamma_{P,H}^k(\emptyset)$. We denote this least fixed point by $\mu W.P^*((P, H), (\mathfrak{A}^*, W))$.

Now we shall show that the least fixed point of each Horn clause operator is computable by means of Horn clause programs. In fact we have something more:

Theorem 4 (First Recursion Theorem for Horn clause operators). *For each Horn clause program $\langle P, H \rangle$ there exists a Horn clause program $\langle P^*, H^* \rangle$ such that for all $\mathfrak{A}^* \in \mathcal{A}$,*

$$\mu W.P^*((P, H), (\mathfrak{A}^*, W)) = P^*((P^*, H^*), \mathfrak{A}^*).$$

Proof. Let L be the programming language $\langle \mathcal{D}, \rho, S \rangle$ on \mathcal{A} , where \mathcal{D} consists of all Horn clause programs $\langle P, H \rangle$ such that H is unary, $\rho(d) = 1$ for $d \in \mathcal{D}$ and $S(\langle P, H \rangle, \mathfrak{A}^*) = \mu W.P^*((P, H), (\mathfrak{A}^*, W))$. To prove the theorem it is sufficient to show that $L \leq_{\mathcal{A}} LPP$.

We shall prove that L is effective and e -invariant on \mathcal{A} . Indeed, the effectiveness of L follows from the uniform version of the First Recursion Theorem for the enumeration operators.

To prove the e -invariance of L , suppose that $\langle P, H \rangle \in \mathcal{D}$, let \mathfrak{A}^* and \mathfrak{B}^* be elements of \mathcal{A} and let \varkappa be a strong homomorphism from \mathfrak{A}^* to \mathfrak{B}^* . Let us define the sequences $W_{\mathfrak{A}^*}^n$ and $W_{\mathfrak{B}^*}^n$ of sets in the following way:

$$W_{\mathfrak{A}^*}^0 = W_{\mathfrak{B}^*}^0 = \emptyset;$$

$$W_{\mathfrak{A}^*}^{n+1} = P^*((P, H), (\mathfrak{A}^*, W_{\mathfrak{A}^*}^n)) \text{ and } W_{\mathfrak{B}^*}^{n+1} = P^*((P, H), (\mathfrak{B}^*, W_{\mathfrak{B}^*}^n)).$$

Now using the e -invariance of LPP , we obtain by induction on n that $\varkappa(W_{\mathfrak{A}^*}^n) = W_{\mathfrak{B}^*}^n$, $n = 0, 1, \dots$. Hence

$$\varkappa(\mu W.P^*((P, H), (\mathfrak{A}^*, W))) = \mu W.P^*((P, H), (\mathfrak{B}^*, W)).$$

By this the e -invariance of L is proved. From here, by Theorem 2, it follows $L \leq_{\mathcal{A}} LPP$. ■

REFERENCES

1. Van Emden, M. H., R. A. Kowalski. The semantics of the predicate logic as a programming language. — J. ACM, 23(4), 1976, 733–742.
2. Soskov, I. N. On the computational power of the logic programs. In: Heyting'88: Mathematical Logic (ed. P. P. Petkov). Plenum Press, New York and London, 1989, 117–137.
3. Tucker, J. V., J. I. Zucker. Horn programs and semicomputable relations on abstract structures. — Proceedings of the 16th International Colloquium on Automata, Languages and Programming, July 1989, Stresa. Springer Lecture Notes in Computer Science, Berlin, 1989.
4. Soskov, I. N. Maximal concepts of computability and maximal programming languages (submitted).
5. Fitting, M. Enumeration operators and modular logic programming. — J. Logic Programming, 4, 1987, 11–21.
6. Rogers, H., Jr. Theory of recursive functions and effective computability. McGraw-Hill Book Company, 1967.

7. Paterson, M., C. Hewitt. Comparative Schematology. MIT AI Lab Memo No 201, Nov., 1970.
8. Trakhtenbrot, B. A. Recursive program schemes and computable functionals. In: MFCS'76 (ed. A. Mazurkiewicz). — Lect. Notes in Comp. Sci., 45, Springer-Verlag, 1976, 137-151.

Received 4.04.1991

ON THE CALCULATION OF LINEAR PROGRAMMING BOUND FOR ERROR CORRECTING CODES

KRASSIMIR MANEV, MAYA PETKOVA, RADA GOLEMANOVA

Крассимир Манев, Майа Петкова, Рада Големанова. О ВЫЧИСЛЕНИИ ГРАНИЦЫ
ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ КОДОВ, ИСПРАВЛЯЮЩИХ ОШИБОК

Граница линейного программирования для кодов, исправляющих ошибок, не является формулой, а результатом вычислительной процедуры, которой нелегко выполнить даже при помощи компьютера. Настоящая работа посвящена разработанной авторами программе для точного вычисления этой границы при заданными параметрами кода. Программа состоит из двух независимых частей, которые можно применять и самостоятельно. Первая часть вычисляет значения полиномов Кравчука, при помощи которых составляется задача линейного программирования. Вторая реализует рациональный симплекс-метод для решения этой задачи. Обе части применяют рациональную арифметику с предварительно заданной точностью.

Krassimir Manev, Maya Petkova, Rada Golemanova. ON THE CALCULATION OF LINEAR
PROGRAMMING BOUND FOR ERROR CORRECTING CODES

The bound of linear programming for error correcting codes is not a formula but a result of a computational procedure difficult to perform even on powerful computers. In this paper a program for calculating the bound for given parameters of the code is described. The program comprises two independent parts, which can be used separately also. The first of them calculates the values of the Krawtchouk polynomials for given parameters and builds the linear programming problem. The other implements a rational simplex-method for solving that problem. Both of them use rational arithmetic with preliminary defined precision.

Let's remind some definitions and results from [1].

Definition. An (n, M, d) code is a set of M vectors of length n (with components from some field F), such that any two vectors differ in at least d places and

d is the smallest number with this property.

Definition. If L is an (n, M, d) code, the distance distribution of L consists of the numbers B_0, B_1, \dots, B_n , where

$$B_i = \frac{1}{M} \{\text{number of ordered pairs of codewords } u, v, \text{ such that } \text{dist}(u, v) = i\}.$$

With $\text{dist}(u, v)$, called distance between u and v , we denote the number of places, where vectors u and v differ. Note that $B_0 = 1$ and $B_0 + B_1 + \dots + B_n = M$.

Definition. For any positive integer n the Krawtchouk polynomial of the real variable x $P_k(x; n) = P_k(x)$ is defined by

$$P_k(x; n) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{x}{j} \binom{n-x}{k-j}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

where the binomial coefficients are defined as follows:

$$\binom{x}{m} = \begin{cases} \frac{x(x-1)\dots(x-m+1)}{m!}, & \text{if } m \text{ is a positive integer} \\ 1, & \text{if } m = 0 \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where $m! = 1.2.3 \dots (m-1).m$, $0! = 1$. Thus $P_k(x; n)$ is a polynomial in x of degree k . If there is no danger of confusion, we omit the n .

Definition. For any $(n+1)$ -tuple $\{B_0, B_1, \dots, B_n\}$ with $\sum_{i=0}^n B_i \neq 0$ we call $\{B'_0, B'_1, \dots, B'_n\}$ the McWilliams transformation of the B_i , $i = 0, 1, \dots, n$, where

$$B'_k = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^n B_i P_k(i), \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

$P_k(x)$ is a Krawtchouk polynomial and M is the number of codewords (M also is called a size of the code).

Probably, the most basic problem in coding theory is to find the largest code of a given length n and a minimum distance between codewords d .

Sometimes it is possible to use linear programming to obtain excellent bounds on the size of a code with a given distance distribution.

Let L be an (n, M, d) code, in which the distances between the codewords are $\tau_0 = 0 < \tau_1 < \dots < \tau_s$. Let $\{B_i\}$ be the distance distribution of L . Thus $B_0 = 1$,

$B_{\tau_j} > 0$ ($j = 1, \dots, s$) and $B_i = 0$ otherwise. Also $M = 1 + \sum_{j=1}^s B_{\tau_j}$. Therefore

the transformed distribution $\{B'_k\}$ is given by

$$B'_k = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^s B_{\tau_j} P_k(\tau_j), \quad k = 0, \dots, n,$$

where $P_k(x)$ is a Krawtchouk polynomial. Also $B'_0 = 1$, $\sum_{k=0}^n B'_k = 2^n/M$ and $B'_k \geq 0$ for $k = 0, \dots, n$.

Thus if L is any code with distances τ_j , $j = 0, \dots, s$, between the codewords, then $B_{\tau_1}, \dots, B_{\tau_s}$ is a feasible solution to the following linear programming problem:

(1) Choose $B_{\tau_1}, \dots, B_{\tau_s}$, so as to maximize $\sum_{j=1}^s B_{\tau_j}$, subject to

$$B_{\tau_j} \geq 0, \quad j = 1, \dots, s,$$

$$\sum_{j=1}^s B_{\tau_j} P_k(\tau_j) \geq -\binom{n}{k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Therefore we have the following theorem:

Theorem [2]. *If $B_{\tau_1}^*, \dots, B_{\tau_s}^*$ is an optimal solution to (1), then $1 + \sum_{i=1}^s B_{\tau_i}^*$ is an upper bound on the size of L .*

Note that (1) certainly has a feasible solution: $B_{\tau_j} = 0$ for all i .

The using of the above mentioned result for practical purposes is very difficult because of the following reasons:

a) the Theorem does not give an explicit formula for the upper bound. The finding of a particular value of this bound requires to work out and resolve non-trivial problem of the linear programming (LPP);

b) both the working out and the solving of the LPP require calculations which exclude not only a manual treating but an ordinary computer program too. Indeed, the values of the Krawtchouk's polynomials grow up so rapidly that it is impossible to calculate them (even for not very large parameters) on any computer without using special arithmetic programs. Moreover, having these values calculated, new difficulties arise when we solve the LPP with such enormous coefficients.

That is why we have developed and implemented a program, which will find the particular value of the linear programming bound for given parameters.

The main ideas, followed by us, have been:

1) To work out the matrix of the LPP using the programs from the package COMPACK [3], which performs arithmetic operations with arbitrary big integers.

2) To extent the package with "big rational" arithmetic programs and to implement a "rational" simplex method [4], which allows to find the upper bound without losing precision.

Naturally, the proposed program `lpb` (linear programming bound) consists of two essential parts. The first part, called `kravtchuk`, input the parameters n and d , where n is the length of the code and d — the required minimal distance. As a result this part constructs a matrix of the LPP. The second part, called `rsimplex`, implements the classical simplex method, using "big rational" arithmetic and gives the exact optimal solution of the LPP.

The interface between these two parts can be modified through adding or/and deleting some conditions, arising from other combinatorial or algebraic reasons.

Each of the two parts of the program `lpb` is implemented as a separate program too. So they could be used for solving other problems — `kravtchuk` for different calculations connected with Krawtchouk's polynomials and `rsimplex` for precise solving of rational linear programming problems and as a preliminary step of more complex programs for solving problems of the integer linear programming.

Now the package `COMPACK` contains the following new standard programs, which could be useful:

- the programs for “big rational” arithmetic — `rat_add`, `rat_subtr`, `rat_mult`, `rat_div` and the program for comparing two “big rational” numbers — `rat_testx`;
- the programs connected with the equivalent transformations of the “big rational” numbers — `modul`, `fact`, `factxy`, `twotry`, `twofactor`, etc.;
- the program `diag` — for diagonalisation of a matrix with “big rational” elements.

The programs are written in programming language C and are implemented on IBM PC under MS DOS. They are portable in all UNIX-like operating systems and systems with standard C compiler. The maximal size of a “big rational” number is defined as a preprocessor parameter and could be changed before compilation, if necessary.

As an example let consider the parameters $n = 19$, $d = 8$. In this case the program gives (with some modifications) the following LPP:

$$\text{Choose } B_8, \dots, B_{19}, \text{ so as to maximize } \sum_{j=8}^{19} B_j, \text{ subject to } M \cdot (B_8, \dots, B_{19}) >$$

A , where M is the matrix

-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
3	1	-1	-3	-5	-7	-9	-11	-13	-15	-17	-19	
-5	-9	-9	-5	3	15	31	51	75	103	135	171	
-23	-9	9	23	25	7	-39	-121	-247	-425	-663	-969	
4	36	36	4	-44	-76	-44	116	484	1156	2244	3876	
76	36	-36	-76	-36	84	204	132	-468	-2108	-5508	-11628	
28	-84	-84	28	140	92	-196	-532	-196	2380	9996	27132	
-140	-84	84	140	-28	-260	-156	572	1300	-884	-13260	-50388	
-98	126	126	-98	-210	78	494	78	-1794	-2210	11934	75582	
154	126	-126	-154	154	286	-286	-858	858	4862	-4862	-92378	

and

$$A = (-136, -20, -172, -970, -3877, -11629, -27133, -50389, -75583, -92379).$$

Using 64-bits arithmetic on 80286, the solution

$$(659/8, 0, 0, 85/4, 93/8, 83/4, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

has been calculated by the program in 50 minutes. The value of the linear programming bound in this case is 136.

REFERENCES

1. McWilliams, F. J., N. J. A. Sloane. The Theory of Error Correcting Codes. North Holland, Amsterdam, 1977.
2. Delsart, P. Bounds for Unrestricted Codes by Linear Programming. — Philips Res. Reports, 27, 1972, 272-289.
3. Manev, K. N. A Portable Package of Standard Combinatorial Programs. — Сб. докладов Научно-техн. семинара „Проблемы мобильности инструментально-технолог. средств программирования“, КНП-8, Варна, 1987, 157-162.
4. Dantzig, G. B., A. Ordeu, P. Wolf. The Generalized Simplex Method for Minimizing a Linear Form under Linear Inequality Constraints. — Pacific J. of Math., 5, No 2, 1955, 1983-1995.

Received 30.03.1991

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

ИВАНКА ИВАНОВА-КАРАТОПРАКЛИЕВА

Иванка Иванова-Каратопраклиева. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

Исследуются бесконечно малые изгибания высших порядков односвязных кусочно-выпуклых (но глобально невыпуклых) поверхностей Σ_L , полученные при помощи внутреннего склеивания выпуклых соосных поверхностей вращения. Полюс поверхностей предполагается гладкой точкой (непараболической или параболической). Показано, что поверхности Σ_L являются нежесткими любого порядка. Найдены необходимые и достаточные условия для продолжении фундаментального поля бесконечно малого изгибания скольжения 1-го порядка поверхности Σ_L в поле бесконечно малого изгибания скольжения (вдоль параллели L) порядка $m > 1$. Даны достаточные условия жесткости поверхности Σ_L .

Ivanka Ivanova-Karatopraklieva. INFINITESIMAL BENDINGS WITH SLIDING OF HIGHER ORDER OF ROTATIONAL SURFACES

The infinitesimal bendings with sliding of higher order of simply connected piecewise (but not globally) convex surfaces Σ_L , obtained by inner pasting together of convex coaxial rotational surfaces, are investigated. The pole of the surfaces is supposed to be smooth point (nonparabolic or parabolic). It is shown that the surfaces Σ_L are nonrigid of any order. Necessary and sufficient conditions are found for extension of a fundamental field of infinitesimal bending with sliding of the 1-st order of the surface Σ_L to a field of infinitesimal bending with sliding (along the parallel L) of the order $m > 1$. Sufficient conditions for rigidity of the surface Σ_L are given.

1. Бесконечно малое (б. м.) изгибание S_t порядка $m \geq 1$ поверхности S называется б. м. изгибанием скольжения вдоль линии $L \subset S$ относи-

тельно плоскости μ , если расстояние любой точки $M \in L$ до плоскости μ не меняется с точностью до б. м. порядка m относительно t . Х. Либман первый исследовал [1] такие б. м. изгибания и доказал, что на сфере существует счетное множество параллелей L_k , такие, что для любой параллели L_k большая часть сферы, ограниченная L_k , допускает нетривиальное б. м. изгибание скольжения 1-го порядка вдоль L_k относительно ее плоскости (далее такие параллели будем называть либмановыми). Потом Е. Рембс доказал [2], что либмановые сферические сегменты допускают б. м. изгибание скольжения 2-го порядка, но являются жесткими 3-го порядка. Им было доказано еще, что на замкнутой выпуклой поверхности вращения S тоже существует счетное множество либмановых параллелей L_k 2-го порядка и они сгущаются к наибольшей параллели поверхности S (часть S_{L_k} поверхности S , которая допускает б. м. изгибания скольжения имеет большую интегральную кривизну, чем $S \setminus S_{L_k}$).

Позже, А. Д. Милка [3] обобщил результат Е. Рембса, рассматривая б. м. изгибания скольжения 1-го порядка поверхностей вращения положительной кривизны, вдоль параллели L относительно произвольной плоскости, а Е. Андрейчин и И. Х. Сабитов [4] показали, что результат Е. Рембса для либмановых параллелей 1-го порядка имеет место и для общих выпуклых поверхностей вращения.

В настоящей статье исследуем вопрос о б. м. изгибаниях скольжения высших порядков одного класса невыпуклых поверхностей, которые получены при помощи внутреннего склейвания выпуклых соосных поверхностей вращения. Вопросы о существовании, мощности и расположении либмановых параллелей 1-го и 2-го порядка таких поверхностей рассмотрены в [5-7].

Отметим, что о б. м. изгибаниях скольжения порядка $m > 2$ нам не известны другие работы, кроме [8-10]. В них исследованы б. м. изгибания 3-го порядка двух классов односвязных поверхностей вращения — ребристые в [8, 9] и кусочно 2-кратно гладкие с непараболическим полюсом в [10].

2. Пусть в плоскости Oxy заданы кривые

$$c_i : y = r_i(u), \quad u \in J_i, \quad i = 1, \dots, s, \quad s \geq 2,$$

где $J_i = [u_{i,i+1}, u_{i-1,i}]$, когда i четное, и $J_i = [u_{i-1,i}, u_{i,i+1}]$, когда i нечетное, $r_1(u) \in C(J_1) \cap C^2(J_1 \setminus u_{0,1})$, $r_s \in C(J_s) \cap C^2(J_s \setminus u_{s,s+1})$, либо $r_s(u) \in C^2(J_s)$, а $r_i(u) \in C^2(J_i)$, $i = 2, \dots, s-1$. Пусть

$$(1) \quad r_1(u_{0,1}) = r_s(u_{s,s+1}) = 0, \quad \begin{cases} r_1(u) > 0 & \text{в } J_1 \setminus u_{0,1}, \\ r_s(u) > 0 & \text{в } J_s \setminus u_{s,s+1}, \\ r_i(u) > 0 & \text{в } J_i, \quad i = 2, \dots, s-1; \end{cases}$$

$$(2) \quad r_i''(u) \leq 0, \quad r_i(u) < r_{i-1}(u) \quad \text{в } J_{i-1} \cap (J_i \setminus u_{i-1,i}), \\ r_i(u_{i-1,i}) = r_{i-1}(u_{i-1,i}), \quad c_i \cap c_j = \emptyset \quad \text{при } j \neq i-1 \text{ и } j \neq i+1, \quad i = 1, \dots, s.$$

Рассмотрим кусочно-выпуклую замкнутую поверхность вращения $\Sigma = S_1 \cup \dots \cup S_s$ с меридианом $c = c_1 \cup \dots \cup c_s$ и с осью Ou вращения (выпуклые поверхности S_{i-1} и S_i внутренне склеенные вдоль их общей параллели $u = u_{i-1,i}$).

Пусть в окрестности полюса $u = u_1$ (будем использовать обозначение $u_1 = u_{0,1}$) кривая c_1 имеет представление

$$(3) \quad u = u_1 + y^n f_1(y), \quad f_1(0) \neq 0, \quad f_1(y) \in C^A[0, \epsilon), \quad n \geq 2,$$

и когда для некоторого $j \in [2, s]$ кривые c_{j-1} и c_j касаются в точке склейвания $u_{j-1,j}$, выполнено

$$(4) \quad J_j \subseteq J_{j-1} \text{ (равенство допускается только тогда, когда } c_{j-1} \text{ и } c_{j-2} \text{ касаются в точке склейвания } u_{j-2,j-1}) \text{ и}$$

$$r_j''(u)r_{j-1}(u) - r_{j-1}''(u)r_j(u) \leq 0 \text{ в } J_j, \text{ если } j \in [2, s-1], \text{ и}$$

$$\text{в } J_s \setminus u_{s,s+1}, \text{ если } j = s.$$

Отметим, что при $n = 2$ полюс $u = u_1$ является непараболической точкой поверхности, а при $n > 2$ — параболической, и следовательно — точкой уплощения поверхности.

Представим радиус-вектор поверхности Σ в виде

$$x(u, v) = u.e_3 + r(u).e(v), \quad r(u)|_{J_i} = r_i(u), \quad v \in [0, 2\pi], \quad i = 1, \dots, s,$$

а ее деформацию как $x(u, v) \mapsto x(u, v) + \sum_{j=1}^m t^j \dot{U}^j(u, v)$, где

$$(5) \quad \dot{U}^j(u, v) = \alpha^j(u, v).e_3 + \beta^j(u, v).e + \gamma^j(u, v).e', \quad j = 1, \dots, m,$$

$$e(v) = \cos v.e_1 + \sin v.e_2$$

(e_1, e_2, e_3 — орты координатной системы в \mathbb{R}^3).

В [5] доказано, что на части S_s поверхности Σ существуют либмановые параллели, если

$$(6) \quad r'_{s-1}(u_{s-1,s}) < 0, \text{ когда } s \text{ четно, и } r'_{s-1}(u_{s-1,s}) > 0, \text{ когда } s \text{ нечетно.}$$

Для любой такой параллели $L \in S_s$ часть Σ_L поверхности Σ , которая содержит полюс $u = u_1$ и ограничена параллелью L , допускает нетривиальное б. м. изгибание скольжения 1-го порядка вдоль L относительно ее плоскости.

Пусть поверхность Σ удовлетворяет условиям (1)–(4) и (6). Пусть $L : u = \hat{u}$ — либмановая параллель 1-го порядка поверхности S_s и $\dot{U}(u, v) = \dot{U}_k(u, v)$, $k \geq 2$, нетривиальное фундаментальное поле [11] б. м. изгибания скольжения 1-го порядка поверхности Σ_L . Ищем поля $\dot{U}^j(u, v)$, $j = 2, \dots, m$, б. м. изгибания скольжения порядка $j = 2, \dots, m$ поверхности Σ_L , которые являются продолжениями поля $\dot{U}_k(u, v)$, $k \geq 2$. Будем предполагать, что поля $\dot{U}^j(u, v)$, $j = 1, \dots, m$, принадлежат классу C^2 на гладких

кусках поверхности вне полюса $u = u_1$ и непрерывные на Σ_L . Такие поля будем называть регулярными класса $\check{C}^2(\Sigma_L)$.

Координаты $\check{\alpha}^j(u, v)$, $\check{\beta}^j(u, v)$, $\check{\gamma}^j(u, v)$ поля $\check{U}^j(u, v)$ относительно подвижного репера e_3, e, e' имеют вид [11]:

$$(7) \quad \begin{aligned} \check{\alpha}^j(u, v) &= \sum_{(p)} \left[\check{\varphi}_{pk}^j(u) e^{ipkv} + \check{\varphi}_{-pk}^j(u) e^{-ipkv} \right], \\ \check{\beta}^j(u, v) &= \sum_{(p)} \left[\check{\chi}_{pk}^j(u) e^{ipkv} + \check{\chi}_{-pk}^j(u) e^{-ipkv} \right], \\ \check{\gamma}^j(u, v) &= \sum_{(p)} \left[\check{\psi}_{pk}^j(u) e^{ipkv} + \check{\psi}_{-pk}^j(u) e^{-ipkv} \right], \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

где $\check{\varphi}_{-pk}^j(u) = \overline{\check{\varphi}_{pk}^j(u)}$, $\check{\chi}_{-pk}^j(u) = \overline{\check{\chi}_{pk}^j(u)}$, $\check{\psi}_{-pk}^j(u) = \overline{\check{\psi}_{pk}^j(u)}$, $p = 0, 2, \dots, j$, когда j четное, и $p = 1, 3, \dots, j$, когда j нечетное. Функции $\check{\varphi}_{pk,i}^j(u)$, $\check{\chi}_{pk,i}^j(u)$, $\check{\psi}_{pk,i}^j(u)$, которые соответствуют полям $\check{U}_i^j(u, v) = \check{U}^j(u, v)|_{S_i}$, $i = 1, \dots, s$, удовлетворяют системам

$$(8) \quad \begin{aligned} \check{\varphi}'_{pk,i}(u) + r'_i(u) \check{\chi}'_{pk,i}(u) &= \check{R}_{1,pk,i}(u), \\ \check{\chi}'_{pk,i}(u) + ipk \check{\psi}'_{pk,i}(u) &= \check{R}_{2,pk,i}(u), \\ ipk \check{\varphi}'_{pk,i}(u) + r'_i(u) \left[ipk \check{\chi}'_{pk,i}(u) - \check{\psi}'_{pk,i}(u) \right] + r_i(u) \check{\psi}'_{pk,i}(u) &= \check{R}_{3,pk,i}(u), \\ j &= 1, \dots, m, \end{aligned}$$

где

$$(9) \quad \check{R}_{1,k,i}(u) = \check{R}_{2,k,i}(u) = \check{R}_{3,k,i}(u) \equiv 0;$$

$$(10) \quad \begin{aligned} \check{R}_{1,pk,i}^j &= -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{(r_l)} \left(\check{\varphi}'_{r_l k, i} \check{\varphi}_{(p-r_l)k, i}^{j-l} \right. \\ &\quad \left. + \check{\chi}'_{r_l k, i} \check{\chi}_{(p-r_l)k, i}^{j-l} + \check{\psi}'_{r_l k, i} \check{\psi}_{(p-r_l)k, i}^{j-l} \right), \\ \check{R}_{2,pk,i}^j &= -\frac{1}{2r_i} \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{(r_l)} \left\{ -k^2 r_l (p-r_l) \check{\varphi}'_{r_l k, i} \check{\varphi}_{(p-r_l)k, i}^{j-l} \right. \\ &\quad \left. + \left(ir_l k \check{\chi}'_{r_l k, i} - \check{\psi}'_{r_l k, i} \right) \left[i(p-r_l) k \check{\chi}_{(p-r_l)k, i}^{j-l} - \check{\psi}_{(p-r_l)k, i}^{j-l} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left(ir_l k \check{\psi}'_{r_l k, i} + \check{\chi}'_{r_l k, i} \right) \left[i(p-r_l) k \check{\psi}_{(p-r_l)k, i}^{j-l} + \check{\chi}_{(p-r_l)k, i}^{j-l} \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{R}_{3,pk,i}^j = & - \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{(r_l)} \left\{ i(p-r_l)k\dot{\varphi}'_{r_l k,i} \dot{\varphi}_{(p-r_l)k,i}^{j-1} \right. \\ & + \dot{\chi}'_{r_l k,i} \left[i(p-r_l)k\dot{\chi}_{(p-r_l)k,i}^{j-1} - \dot{\psi}_{(p-r_l)k,i}^{j-1} \right] \\ & \left. + \dot{\psi}'_{r_l k,i} \left[i(p-r_l)k\dot{\psi}_{(p-r_l)k,i}^{j-1} + \dot{\chi}_{(p-r_l)k,i}^{j-1} \right] \right\}, \quad j = 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Отметим, что сумационный индекс r_l в (10) принимает значения в множестве $\{0, \pm 2, \dots, \pm l\}$, когда l четное, и в множестве $\{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm l\}$, когда l нечетное. Притом r_l такой, что $p - r_l$ принадлежит множеству $\{0, \pm 2, \dots, \pm(j-l)\}$, когда $j-l$ четное, и множеству $\{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(j-l)\}$, когда $j-l$ нечетное. Кроме этого символ i употреблен в (10) двумя способами — как индекс и как множитель. Когда он употреблен как индекс принимает значения $1, \dots, s$, а как множитель обозначает мнимую единицу.

Из (8) при $p = 0$ (j — четное) имеем

$$\begin{aligned} (11) \quad \dot{\varphi}'_{0,i}{}^j(u) + r'_i(u)\dot{\chi}'_{0,i}{}^j(u) &= \dot{R}_{1,0,i}{}^j(u), \\ \dot{\chi}'_{0,i}{}^j(u) &= \dot{R}_{2,0,i}{}^j(u), \\ r_i(u)\dot{\psi}'_{0,i}{}^j(u) - r'_i(u)\dot{\psi}_{0,i}{}^j(u) &= \dot{R}_{3,0,i}{}^j(u), \end{aligned}$$

а при $p \neq 0$ — соответственно:

$$(12) \quad \dot{\varphi}'_{pk,i}{}^j(u) = -\frac{1}{p^2 k^2} \left[r_i(u)\dot{\chi}'_{pk,i}{}^j(u) + (p^2 k^2 - 1)r'_i(u)\dot{\chi}_{pk,i}{}^j(u) + \dot{P}_{pk,i}{}^j(u) \right],$$

где

$$(13) \quad \dot{P}_{pk,i}{}^j(u) = r'_i(u)\dot{R}_{2,pk,i}{}^j(u) - r_i(u)\dot{R}'_{2,pk,i}{}^j(u) + pki\dot{R}_{3,pk,i}{}^j(u);$$

$$(14) \quad \dot{\psi}'_{pk,i}{}^j(u) = \frac{1}{pki} \left[\dot{R}_{2,pk,i}{}^j(u) - \dot{\chi}_{pk,i}{}^j(u) \right],$$

и $\dot{\chi}'_{pk,i}{}^j(u)$ удовлетворяет уравнению

$$(15) \quad r_i(u)\dot{\chi}''_{pk,i}{}^j(u) + r''_i(u)(p^2 k^2 - 1)\dot{\chi}_{pk,i}{}^j(u) = \dot{R}_{pk,i}{}^j(u),$$

где

$$\begin{aligned} (16) \quad \dot{R}_{pk,i}{}^j(u) = & -r''_i(u)\dot{R}_{2,pk,i}{}^j(u) + r_i(u)\dot{R}''_{2,pk,i}{}^j(u) \\ & - p^2 k^2 \dot{R}_{1,pk,i}{}^j(u) - pki\dot{R}'_{3,pk,i}{}^j(u). \end{aligned}$$

Притом при $j = 1$, т. е. для фундаментального поля $\dot{U}_k(u, v)$, $k \geq 2$, имеем $\dot{P}_{k,i}{}^1(u) = \dot{R}_{k,i}{}^1(u) \equiv 0$, $i = 1, \dots, s$ (см. (9), (13), (16)).

3. Легко видно, что поверхность Σ_L нежестка любого порядка $m \geq 2$. В самом деле, поверхность S_1 такова, так как у нее нет асимптотических параллелей и согласно [12] любое ее нетривиальное, регулярное фундаментальное поле $\dot{U}_{k,1}(u, v)$ 1-го порядка, для которого

$$k > A(m, n) = \frac{1}{m} \sqrt{\frac{n(m-1)[n(2m-1) - 2m]}{n-1}},$$

можно продолжить в регулярное поле $\dot{U}_1^j(u, v) \in \check{C}^2(S_1)$ б. м. изгибания порядка $j = 2, \dots, m$. Притом для функции $\dot{\varphi}_{pk,1}^j(u)$, $\dot{\chi}_{pk,1}^j(u)$, $\dot{\psi}_{pk,1}^j(u)$, которые определяют поле $\dot{U}_1^j = \dot{U}^j|_{S_1}$, $j = 1, \dots, m$, имеем:

1) $\dot{\chi}_{k,1}^1(u) = \dot{\chi}_{k,1}^+(u)$ — регулярное решение уравнения (15) при $j = p = i = 1$ в J_1 , а $\dot{\varphi}_{k,1}^1(u)$ и $\dot{\psi}_{k,1}^1(u)$ получаются соответственно из (12) и (14) при $j = p = i = 1$;

2) При $p = 0$ (j — четное)

$$(17) \quad \dot{\varphi}_{0,1}^j(u) = \int_{u_1}^u \left[\dot{R}_{1,0,1}^j(\tau) - r_1'(\tau) \dot{R}_{2,0,1}^j(\tau) \right] d\tau + \dot{a}_{0,1}, \quad \dot{a}_{0,1} = \text{const},$$

$$\dot{\chi}_{0,1}^j(u) = \dot{R}_{2,0,1}^j(u),$$

$$\dot{\psi}_{0,1}^j(u) = r_1(u) \left[\int_{u_1}^u \frac{\dot{R}_{3,0,1}^j(\tau)}{r_1^2(\tau)} d\tau + \dot{b}_{0,1} \right], \quad \dot{b}_{0,1} = \text{const};$$

3) При $p \neq 0$, $j \geq 2$.

$$(18) \quad \dot{\chi}_{pk,1}^j(u) = \dot{\chi}_{pk,1}^+(u) \left[\dot{c}_{pk}^j + \int_{u_0}^u \dot{D}_{pk,1}^-(\tau) d\tau \right] - \dot{\chi}_{pk,1}^-(u) \int_{u_1}^u \dot{D}_{pk,1}^+(\tau) d\tau,$$

где $\dot{c}_{pk}^j = \text{const}$, $u_0 \in (u_1, u_{1,2})$,

$$\dot{D}_{pk,1}^\pm(u) = \frac{\dot{R}_{pk,1}^j(u)}{r_1(u)W_{pk,1}(u)} \dot{\chi}_{pk,1}^\pm(u),$$

$$W_{pk,1}(u) = \dot{\chi}_{pk,1}^+(u)\dot{\chi}_{pk,1}^-(u) - \dot{\chi}_{pk,1}^+(u)\dot{\chi}_{pk,1}^-(u)$$

($\dot{\chi}_{pk,1}^+(u)$, $\dot{\chi}_{pk,1}^-(u)$ — фундаментальные решения однородного уравнения (15) в $(u_1, u_{1,2}]$, притом $\dot{\chi}_{pk,1}^+(u)$ — регулярное, $\dot{\chi}_{pk,1}^-(u)$ — нерегулярное в $u = u_1$), а $\dot{\varphi}_{pk,1}^j(u)$ и $\dot{\psi}_{pk,1}^j(u)$ получаются соответственно из (12) и (14).

Дальше из непрерывности полей \bar{U}^j , $j = 1, \dots, m$, следует, что функции $\bar{\varphi}_{pk,i}^j(u)$, $\bar{\chi}_{pk,i}^j(u)$, $\bar{\psi}_{pk,i}^j(u)$, $i = 2, \dots, s$, $j = 1, \dots, m$, являются решениями систем уравнений (8) при начальных условиях

$$(19) \quad \bar{\varphi}_{pk,i}^j(u_{i-1,i}) = \bar{\varphi}_{pk,i-1}^j(u_{i-1,i}), \quad \bar{\chi}_{pk,i}^j(u_{i-1,i}) = \bar{\chi}_{pk,i-1}^j(u_{i-1,i}), \\ \bar{\psi}_{pk,i}^j(u_{i-1,i}) = \bar{\psi}_{pk,i-1}^j(u_{i-1,i}), \quad i = 2, \dots, s, j = 1, \dots, m.$$

Из (11) (см. также (17)) видно, что при $p = 0$ задача (8), (19) всегда имеет решение, а из (12)–(16) и (19) видно, что при $p \neq 0$, i, j — фиксированные, она сводится к решению задачи Коши для уравнения (15) при начальных условиях

$$(20) \quad \bar{\chi}_{pk,i}^j(u_{i-1,i}) = \bar{\chi}_{pk,i-1}^j(u_{i-1,i}), \\ \bar{\chi}'_{pk,i}^j(u_{i-1,i}) = \left[\bar{\chi}'_{pk,i-1}^j + (p^2 k^2 - 1) \frac{r'_{i-1} - r'_i}{r_i} \bar{\chi}_{pk,i-1}^j + \bar{Q}_{pk,i-1,i}^j \right] \Big|_{u=u_{i-1,i}},$$

где

$$(21) \quad \bar{Q}_{pk,i-1,i}^j(u) = \frac{1}{r_i(u)} \left(\bar{P}_{pk,i-1}^j(u) - \bar{P}_{pk,i}^j(u) \right).$$

Заметим, что $\bar{Q}_{pk,i-1,i}^j(u_{i-1,i}) = 0$ (см. (9)) и, кроме этого, когда кривые c_{i-1} и c_i касаются в точке склейвания, т. е. когда $r'_{i-1}(u_{i-1,i}) = r'_i(u_{i-1,i})$, условия (20) принимают вид

$$(20') \quad \bar{\chi}_{pk,i}^j(u_{i-1,i}) = \bar{\chi}_{pk,i-1}^j(u_{i-1,i}), \quad \bar{\chi}'_{pk,i}^j(u_{i-1,i}) = \bar{\chi}'_{pk,i-1}^j(u_{i-1,i})$$

(из (10), (12), (13), (19), (21) видно, что тогда $\bar{Q}_{pk,i-1,i}^j(u_{i-1,i}) = 0$).

Таким образом, решая последовательно задачу (15), (20), при $i = 2, \dots, s$, $j = 1, \dots, m$, мы найдем поля $\bar{U}^j(u, v)$, $i = 2, \dots, s$, б. м. изгибания порядка $j = 1, \dots, m$ поверхности Σ_L , которые принадлежат классу $\bar{C}^2(\Sigma_L)$.

4. В этом пункте будет дан вид решения задачи (15), (20). Пусть $\chi_{pk,1}^+$ и $\chi_{pk,1}^-$ являются фундаментальными решениями однородного уравнения (15) при $i = 1$, где $\chi_{pk,1}^+$ — регулярное в $u = u_1$, а $\chi_{pk,1}^-$ — нерегулярное. Обозначим через $\chi_{pk,i}^\pm$, $i = 2, \dots, s$, решения однородного уравнения (15) при начальных условиях (20) с $\bar{Q}_{pk,i-1,i}^j(u_{i-1,i}) = 0$, т. е.

$$(22) \quad \chi_{pk,i}^\pm(u_{i-1,i}) = \chi_{pk,i-1}^\pm(u_{i-1,i}), \\ \chi_{pk,i}^{\pm'}(u_{i-1,i}) = \left[\chi_{pk,i-1}^{\pm'} + (4k^2 - 1) \frac{r'_{i-1} - r'_i}{r_i} \chi_{pk,i-1}^\pm \right] \Big|_{u=u_{i-1,i}},$$

соответственно для $i = 2, \dots, s$. Очевидно $\chi_{pk,i}^+(u)$ и $\chi_{pk,i}^-(u)$, $i = 2, \dots, s$, являются фундаментальными решениями однородного уравнения (15) при

$i = 2, \dots, s$ и $W_{pk,i-1}(u_{i-1,i}) = W_{pk,i}(u_{i-1,i})$. Отметим, что функции $\chi_{pk,i}^+(u)$, $i = 1, \dots, s$, определяют регулярное поле $\dot{U}_{pk}^+(u, v)$ б. м. изгибания 1-го порядка класса $\dot{C}^2(\Sigma_L)$ поверхности Σ_L , а функции $\chi_{pk,i}^-(u)$, $i = 1, \dots, s$ — нерегулярное в полюсе $u = u_1$ поле $\dot{U}_{pk}^-(u, v)$ б. м. изгибания 1-го порядка. Притом как функции $\varphi_{pk,i}^+(u)$, $\chi_{pk,i}^+(u)$, $\psi_{pk,i}^+(u)$, так и функции $\varphi_{pk,i}^-(u)$, $\chi_{pk,i}^-(u)$, $\psi_{pk,i}^-(u)$ удовлетворяют системе

$$(23) \quad \begin{aligned} \dot{\varphi}_{pk,i}^+(u) + r_i'(u)\dot{\chi}_{pk,i}^+(u) &= 0 \\ \dot{\chi}_{pk,i}^+(u) + ipk\dot{\psi}_{pk,i}^+(u) &= 0, \\ ipk\dot{\varphi}_{pk,i}^+(u) + r_i'(u) \left[ipk\dot{\chi}_{pk,i}^+(u) - \dot{\psi}_{pk,i}^+(u) \right] + r_i(u)\dot{\psi}_{pk,i}^+(u) &= 0, \end{aligned}$$

а условие (22₂) выражает, что

$$(24) \quad \varphi_{pk,i}^\pm(u_{i-1,i}) = \varphi_{pk,i-1}^\pm(u_{i-1,i}).$$

Рассмотрим регулярное в полюсе $u = u_1$ решение (см. (18))

$$(18') \quad \dot{\chi}_{pk,1}^j(u) = \dot{c}_{pk}^j \chi_{pk,1}^+(u) + \dot{\chi}_{pk,1}^{j*}(u), \quad u \in J_1, \quad j \geq 2,$$

уравнения (15) при $i = 1$, где \dot{c}_{pk}^j произвольная константа, а

$$(25) \quad \dot{\chi}_{pk,1}^{j*}(u) = \chi_{pk,1}^+(u) \int_{u_0}^u \dot{D}_{pk,1}^-(\tau) d\tau - \chi_{pk,1}^-(u) \int_{u_1}^u \dot{D}_{pk,1}^+(\tau) d\tau.$$

В виду (18') и (25) условия (20) при $i = 2$ принимают вид

$$(26) \quad \begin{aligned} \dot{\chi}_{pk,2}^j(u_{1,2}) &= \dot{c}_{pk}^j \chi_{pk,1}^+(u_{1,2}) + \dot{\chi}_{pk,1}^{j*}(u_{1,2}), \\ \dot{\chi}_{pk,2}^{j'}(u_{1,2}) &= \dot{c}_{pk}^j \left[\chi_{pk,1}^+ + (p^2 k^2 - 1) \frac{r_1' - r_2'}{r_2} \chi_{pk,1}^+ \right] \Big|_{u=u_{1,2}} \\ &+ \left[\dot{\chi}_{pk,1}^{j*} + (p^2 k^2 - 1) \frac{r_1' - r_2'}{r_2} \dot{\chi}_{pk,1}^{j*} + \dot{Q}_{pk,1,2}^j \right] \Big|_{u=u_{1,2}}. \end{aligned}$$

При помощи метода Лагранжа строим частное решение

$$(27) \quad \dot{\chi}_{pk,2}^{j*}(u) = \chi_{pk,2}^-(u) \int_{u_{1,2}}^u \dot{D}_{pk,2}^+(\tau) d\tau - \chi_{pk,2}^+(u) \int_{u_{1,2}}^u \dot{D}_{pk,2}^-(\tau) d\tau, \quad u \in J_2,$$

уравнения (15) при $i = 2$. Обозначим через $\dot{\chi}_{pk,2}^{j*}(u)$ это решение уравнения (15) при $i = 2$, которое удовлетворяет условиям

$$(28) \quad \begin{aligned} \dot{\chi}_{pk,2}^{j*}(u_{1,2}) &= \dot{\chi}_{pk,1}^{j*}(u_{1,2}), \\ \dot{\chi}_{pk,2}^{j*'}(u_{1,2}) &= \left[\dot{\chi}_{pk,1}^{j*'} + (p^2 k^2 - 1) \frac{r_1' - r_2'}{r_2} \dot{\chi}_{pk,1}^{j*'} + \dot{Q}_{pk,1,2}^j \right] \Big|_{u=u_{1,2}} \end{aligned}$$

Тогда

$$\check{\chi}_{pk,2}^j(u) = \check{a}_{pk,2}^{j1} \chi_{pk,2}^+(u) + \check{a}_{pk,2}^{j2} \chi_{pk,2}^-(u) + \check{\chi}_{pk,2}^{j*}(u), \quad u \in J_2,$$

и из (25), (27), (28) и (23) получаем

$$\check{a}_{pk,2}^{j1} = \frac{1}{r_1 W_{pk,1}} \left\{ p^2 k^2 \left[\chi_{pk,1}^- \varphi_{pk,2}^- - \chi_{pk,2}^- \varphi_{pk,1}^- \right] \int_{u_1}^u \check{D}_{pk,1}^+(\tau) d\tau \right. \\ \left. + p^2 k^2 \left[\chi_{pk,2}^- \varphi_{pk,1}^+ - \chi_{pk,1}^+ \varphi_{pk,2}^- \right] \int_{u_0}^u \check{D}_{pk,1}^-(\tau) d\tau - r_1 \check{Q}_{pk,1,2} \chi_{pk,2}^- \right\} \Big|_{u=u_{1,2}},$$

$$\check{a}_{pk,2}^{j2} = \frac{1}{r_1 W_{pk,1}} \left\{ p^2 k^2 \left[\chi_{pk,2}^+ \varphi_{pk,1}^- - \chi_{pk,1}^- \varphi_{pk,2}^+ \right] \int_{u_1}^u \check{D}_{pk,1}^+(\tau) d\tau \right. \\ \left. + p^2 k^2 \left[\chi_{pk,1}^+ \varphi_{pk,2}^+ - \chi_{pk,2}^+ \varphi_{pk,1}^+ \right] \int_{u_0}^u \check{D}_{pk,1}^-(\tau) d\tau + r_1 \check{Q}_{pk,1,2} \chi_{pk,2}^+ \right\} \Big|_{u=u_{1,2}}.$$

Теперь из (22) и (24) следует

$$\left[\chi_{pk,1}^\pm \varphi_{pk,2}^\pm - \chi_{pk,2}^\pm \varphi_{pk,1}^\pm \right] \Big|_{u=u_{1,2}} = 0,$$

$$p^2 k^2 \left[\chi_{pk,2}^\pm \varphi_{pk,1}^\mp - \chi_{pk,1}^\mp \varphi_{pk,2}^\pm \right] \Big|_{u=u_{1,2}} = r_1 W_{pk,1} \Big|_{u=u_{1,2}},$$

откуда

$$(29) \quad \check{a}_{pk,2}^{j1} = \int_{u_0}^{u_{1,2}} \check{D}_{pk,1}^-(\tau) d\tau - \frac{\check{Q}_{pk,1,2} \chi_{pk,1}^-}{W_{pk,1}} \Big|_{u=u_{1,2}}, \\ \check{a}_{pk,2}^{j2} = \int_{u_1}^{u_{1,2}} \check{D}_{pk,1}^+(\tau) d\tau + \frac{\check{Q}_{pk,1,2} \chi_{pk,1}^+}{W_{pk,1}} \Big|_{u=u_{1,2}}.$$

Таким образом решение $\check{\chi}_{pk,2}^j(u)$ задачи (15), (20) при $i = 2$, т. е. задачи (15), (26), имеет вид

$$(30) \quad \check{\chi}_{pk,2}^j(u) = \left(\check{c}_{pk}^j + \check{a}_{pk,2}^{j1} \right) \chi_{pk,2}^+(u) + \check{a}_{pk,2}^{j2} \chi_{pk,2}^-(u) + \check{\chi}_{pk,2}^{j*}(u), \quad u \in J_2,$$

где \check{c}_{pk}^j произвольная константа, $\check{a}_{pk,2}^{j1}$ и $\check{a}_{pk,2}^{j2}$ имеют вид (29), а $\check{\chi}_{pk,2}^{j*}(u)$ — вид (27).

Решая задачу (15), (20) при $i = 3$ таким же образом как при $i = 2$, получаем, что решение $\check{\chi}_{pk,3}^j(u)$ имеет вид

$$\check{\chi}_{pk,3}^j(u) = \left(\check{c}_{pk}^j + \check{a}_{pk,2}^{j1} + \check{a}_{pk,3}^{j1} \right) \chi_{pk,3}^+(u) + \left(\check{a}_{pk,2}^{j2} + \check{a}_{pk,3}^{j2} \right) \chi_{pk,3}^-(u) + \check{\chi}_{pk,3}^{j*}(u),$$

$u \in J_3$, где

$$d_{pk,3}^1 = - \int_{u_{1,2}}^{u_{2,3}} \dot{D}_{pk,2}^-(\tau) d\tau - \frac{\chi_{pk,2}^- \dot{Q}_{pk,2,3}^j}{W_{pk,2}} \Big|_{u=u_{2,3}},$$

$$d_{pk,3}^2 = \int_{u_{1,2}}^{u_{2,3}} \dot{D}_{pk,2}^+(\tau) d\tau + \frac{\chi_{pk,2}^+ \dot{Q}_{pk,2,3}^j}{W_{pk,2}} \Big|_{u=u_{2,3}},$$

$$\chi_{pk,3}^*(u) = \chi_{pk,3}^-(u) \int_{u_{2,3}}^u \dot{D}_{pk,3}^+(\tau) d\tau - \chi_{pk,3}^+(u) \int_{u_{2,3}}^u \dot{D}_{pk,3}^-(\tau) d\tau, \quad u \in J_3.$$

Продолжая дальше, найдем решения $\dot{\chi}_{pk,4}^j(u), \dots, \dot{\chi}_{pk,s}^j(u)$. Очевидно решение $\dot{\chi}_{pk,i}^j(u)$, $u \in J_i$, $j \geq 2$, $i = 2, \dots, s$, задачи (15), (20) имеет вид

$$(31) \quad \dot{\chi}_{pk,i}^j(u) = \left(\dot{c}_{pk}^j + d_{pk,2}^1 + \dots + d_{pk,i}^1 \right) \chi_{pk,i}^+(u) + \left(d_{pk,2}^2 + \dots + d_{pk,i}^2 \right) \chi_{pk,i}^-(u) + \dot{\chi}_{pk,i}^*(u),$$

где

$$(32) \quad d_{pk,2}^1 = \int_{u_0}^{u_{1,2}} \dot{D}_{pk,2}^-(\tau) d\tau - \frac{\dot{Q}_{pk,1,2}^j}{W_{pk,1}} \chi_{pk,1}^- \Big|_{u=u_{1,2}},$$

$$d_{pk,l}^1 = - \int_{u_{l-2,l-1}}^{u_{l-1,l}} \dot{D}_{pk,l-1}^-(\tau) d\tau - \frac{\dot{Q}_{pk,l-1,l}^j \chi_{pk,l-1}^-}{W_{pk,l-1}} \Big|_{u=u_{l-1,l}}, \quad l = 3, \dots, i,$$

$$(33) \quad d_{pk,l}^2 = \int_{u_{l-2,l-1}}^{u_{l-1,l}} \dot{D}_{pk,l-1}^+(\tau) d\tau + \frac{\dot{Q}_{pk,l-1,l}^j \chi_{pk,l-1}^+}{W_{pk,l-1}} \Big|_{u=u_{l-1,l}}, \quad l = 2, \dots, i;$$

$$(34) \quad \chi_{pk,i}^*(u) = \chi_{pk,i}^-(u) \int_{u_{i-1,i}}^u \dot{D}_{pk,i}^+(\tau) d\tau - \chi_{pk,i}^+(u) \int_{u_{i-1,i}}^u \dot{D}_{pk,i}^-(\tau) d\tau, \quad u \in J_i,$$

где $\dot{D}_{pk,i}^\pm(u) = \frac{\dot{R}_{pk,i}(u)}{r_i(u)W_{pk,i}(u)} \chi_{pk,i}^\pm(u)$.

Таким образом вид функции $\dot{\chi}_{pk,i}^2(u), \dots, \dot{\chi}_{pk,i}^m(u)$, $i = 1, \dots, s$, когда $p \neq 0$, дается при помощи формул (18') и (31).

5. Теперь найдем условия скольжения поверхности Σ_L . Из (5) и (7) видно, что фундаментальное поле $\dot{U}(u, v) = \dot{U}_k(u, v)$ и его продолжения

$\hat{U}^j(u, v)$, $j = 2, \dots, m$, являются полями б. м. изгибания скольжения порядка $j = 1, \dots, m$ поверхности Σ_L вдоль параллели $L : u = \hat{u}$ относительно ее плоскости точно тогда, когда

$$(35) \quad \hat{\varphi}_{pk,s}^j(\hat{u}) = 0, \quad p = \begin{cases} 0, 2, \dots, j, & \text{когда } j \text{ — четное,} \\ 1, 3, \dots, j, & \text{когда } j \text{ — нечетное, } j = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Предположим, что регулярное поле $\hat{U}_k^1(u, v)$ б. м. изгибания скольжения 1-го порядка продолжено в регулярное поле $\hat{U}^1(u, v)$ б. м. изгибания скольжения порядка $l = 2, \dots, j-1$. Из (35) видно, что продолженное поле $\hat{U}^j(u, v)$ б. м. изгибания порядка j будет полем скольжения вдоль L точно тогда, когда $\hat{\varphi}_{pk,s}^j(\hat{u}) = 0$ при $p = 0, 2, \dots, j$, когда j — четное, и при $p = 1, 3, \dots, j$, когда j — нечетное. Из (11) видно, что при $p = 0$ (j — четное) это условие всегда можно удовлетворить за счет выбора интегральной константы (см. (17)). В том случае, когда $p \neq 0$ из (12), (31) и (34) непосредственно получаем, что $\hat{\varphi}_{pk,s}^j(\hat{u}) = 0$ точно тогда, когда

$$(36) \quad \left[\hat{c}_{pk}^j + \hat{a}_{pk,2}^j + \dots + \hat{a}_{pk,s}^j - \int_{u_{s-1,s}}^u \hat{D}_{pk,s}^j(\tau) d\tau \right] \times \left[r_s \chi_{pk,s}^{+'} + (p^2 k^2 - 1) r'_s \chi_{pk,s}^{+'} \right] \Big|_{u=\hat{u}} + \left[\hat{a}_{pk,2}^j + \dots + \hat{a}_{pk,s}^j + \int_{u_{s-1,s}}^u \hat{D}_{pk,s}^j(\tau) d\tau \right] \times \left[r_s \chi_{pk,s}^{-'} + (p^2 k^2 - 1) r'_s \chi_{pk,s}^{-'} \right] \Big|_{u=\hat{u}} + \hat{P}_{pk,s}^j(\hat{u}) = 0.$$

Пусть p фиксировано. Очевидно условие (36) можно удовлетворить за счет выбора константы \hat{c}_{pk}^j только тогда, когда

$$r_s(\hat{u}) \chi_{pk,s}^{+'}(\hat{u}) + (p^2 k^2 - 1) r'_s(\hat{u}) \chi_{pk,s}^{+'}(\hat{u}) \neq 0,$$

т. е. когда поле $\hat{U}_{pk}^1(u, v)$ б. м. изгибания 1-го порядка не является полем скольжения поверхности Σ_L вдоль параллели L . В противном случае условие (36) принимает вид

$$(37) \quad \left[\hat{a}_{pk,2}^j + \dots + \hat{a}_{pk,s}^j + \int_{u_{s-1,s}}^u \hat{D}_{pk,s}^j(\tau) d\tau \right] \times \left[r_s \chi_{pk,s}^{-'} + (p^2 k^2 - 1) r'_s \chi_{pk,s}^{-'} \right] \Big|_{u=\hat{u}} + \hat{P}_{pk,s}^j(\hat{u}) = 0.$$

Напомним, что величина $\overset{j}{P}_{pk,s}(\hat{u})$ в (36) и (37) получается из (13), отчитывая равенства $\overset{i}{\varphi}_{pk,s}(\hat{u}) = 0$, где $p = 0, 2, \dots, l$, когда l — четное, и $p = 1, 3, \dots, l$, когда l — нечетное, $l = 1, \dots, j - 1$.

Таким образом имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть поверхность Σ_L имеет регулярное фундаментальное поле $\overset{1}{U}_k$ б. м. изгибания скольжения 1-го порядка вдоль параллели $L: u = \hat{u}$, где $k > A(m, n)$ и m четное число ($m = 2l$). Пусть $\overset{1}{U}_k$ продолжено в регулярное поле $\overset{m-1}{U}$ б. м. изгибания скольжения $(m-1)$ -го порядка вдоль L . Тогда:

а) Если Σ_L не имеет регулярных фундаментальных полей $\overset{1}{U}_{2k}, \overset{1}{U}_{4k}, \dots, \overset{1}{U}_{mk}$ б. м. изгибания скольжения 1-го порядка вдоль L , то $\overset{1}{U}_k$ можно продолжить в регулярное поле $\overset{m}{U}$ б. м. изгибания скольжения $m = 2l$ -го порядка вдоль L .

б) Если Σ_L имеет регулярное фундаментальное поле $\overset{1}{U}_{2hk}, 1 < 2h \leq m = 2l$, б. м. изгибания скольжения 1-го порядка вдоль L , то $\overset{1}{U}_k$ можно продолжить в регулярное поле $\overset{m}{U}$ б. м. изгибания скольжения $m = 2l$ -го порядка тогда и только тогда, когда выполнено условие (37) при $j = m$ и $p = 2h$.

Следствие 1. Если поверхность Σ_L имеет конечное число регулярных фундаментальных полей $\overset{1}{U}_{k_i}, i = 1, \dots, q, 2 \leq k_1 < \dots < k_q$, б. м. изгибания скольжения 1-го порядка вдоль L , и допускает б. м. изгибание скольжения нечетного порядка $m - 1$ вдоль L , порожденное из некоторого поля $\overset{1}{U}_{k_i}, k_i > \max\left(\frac{k_q}{2}, A(m, n)\right), m = 2l$, то Σ_L допускает нетривиальное б. м. изгибание скольжения $m = 2l$ -го порядка вдоль L .

Теорема 2. Пусть поверхность Σ_L имеет регулярное фундаментальное поле $\overset{1}{U}_k$ б. м. изгибания скольжения 1-го порядка вдоль параллели $L: u = \hat{u}$, где $k > A(m, n)$ и m нечетное число ($m = 2l + 1$). Пусть $\overset{1}{U}_k$ продолжено в регулярное поле $\overset{m-1}{U}$ б. м. изгибания скольжения $(m-1)$ -го порядка вдоль L . Тогда:

а) Если Σ_L не имеет регулярных фундаментальных полей $\overset{1}{U}_{3k}, \overset{1}{U}_{5k}, \dots, \overset{1}{U}_{mk}$ б. м. изгибания скольжения 1-го порядка вдоль L , то $\overset{1}{U}_k$ можно продолжить в регулярное поле $\overset{m}{U}$ б. м. изгибания скольжения $m = (2l + 1)$ -го порядка вдоль L тогда и только тогда, когда выполнено условие (37) при $j = m$ и $p = 1$.

б) Если Σ_L имеет регулярное фундаментальное поле $\overset{1}{U}_{(2h+1)k}, 1 < 2h + 1 \leq m = 2l + 1$, б. м. изгибания скольжения 1-го порядка вдоль L , то $\overset{1}{U}_k$ можно продолжить в регулярное поле $\overset{m}{U}$ б. м. изгибания скольжения

$m = (2l + 1)$ -го порядка вдоль L , тогда и только тогда, когда выполнено условие (37) при $j = m$, $p = 1$ и $j = m$, $p = 2h + 1$.

Следствие 2. Если поверхность Σ_L имеет конечное число регулярных фундаментальных полей \dot{U}_{k_i} , $i = 1, \dots, q$, $2 \leq k_1 < \dots < k_q$, б. м. изгибания скольжения 1-го порядка вдоль L , допускает б. м. изгибание скольжения четного порядка $m - 1$ вдоль L , порожденное из некоторого поля \dot{U}_{k_i} , $k_i > \max\left(\frac{k_q}{3}, A(m, n)\right)$, $m = 2l + 1$, и выполнено условие (37) при $j = m$, $p = 1$, $k = k_i$, то Σ_L допускает нетривиальное б. м. изгибание скольжения $m = (2l + 1)$ -го порядка вдоль L .

Теорема 3. Пусть поверхность Σ_L имеет регулярное фундаментальное поле \dot{U}_k б. м. изгибания скольжения 1-го порядка вдоль параллели $L : u = \dot{u}$, где $k > A(m, n)$ и $m > 1$. Тогда:

а) Если Σ_L не имеет регулярных фундаментальных полей \dot{U}_{2k} , \dot{U}_{3k}, \dots , \dot{U}_{mk} б. м. изгибания скольжения 1-го порядка вдоль L , то поле \dot{U}_k можно продолжить в регулярное поле \dot{U}^m б. м. изгибания скольжения m -го порядка вдоль L тогда и только тогда, когда выполнено условие (37) при $j = 3, 5, \dots, 2l + 1 \leq m$ и $p = 1$.

б) Если Σ_L имеет регулярное фундаментальное поле \dot{U}_{hk} , $1 < h \leq m$, б. м. изгибания скольжения 1-го порядка вдоль L , то поле \dot{U}_k можно продолжить в регулярное поле \dot{U}^m б. м. изгибания скольжения m -го порядка вдоль L тогда и только тогда, когда условие (37) выполнено при $j = 3, 5, \dots, 2l + 1 \leq m$, $p = 1$ и при $j = h, h + 2, \dots, h + 2l \leq m$, $p = h$.

Следствие 3. Если поверхность Σ_L имеет конечное число регулярных фундаментальных полей \dot{U}_{k_i} , $i = 1, \dots, q$, $2 \leq k_1 < \dots < k_q$, б. м. изгибания скольжения 1-го порядка вдоль L и условие (37) выполнено для некоторого $k = k_i > \max\left(\frac{k_q}{2}, A(m, n)\right)$, $m > 1$, при $j = 3, 5, \dots, 2l + 1 \leq m$, $p = 1$, то Σ_L допускает нетривиальное б. м. изгибание скольжения m -го порядка вдоль L .

В [12] доказано, что условие $k > A(m, n)$ является и необходимым (за исключением может быть для не больше чем $5(m - 2) + 3 \left(\left[\frac{m}{2}\right] - 1\right)$ значений $n > 2$ при $m > 3$) для того, чтобы регулярное фундаментальное поле \dot{U}_k б. м. изгибания 1-го порядка поверхности S_1 можно продолжить в регулярное поле \dot{U}^m б. м. изгибания m -го порядка. Там еще показано, что никакое регулярное фундаментальное поле \dot{U}_k , $k < \sqrt{2n}$, б. м. изгибания 1-го порядка нельзя продолжить в регулярное поле \dot{U}^m б. м. изгибания порядка $m \geq \frac{n}{n - \nu_k(n)}$, где $\nu_k(n) = \sqrt{\left(\frac{n - 2}{2}\right)^2 + k^2(n - 1)} - \frac{n - 2}{2}$.

Пусть $n > 2$ такое, что условие $k > A(m, n)$ является необходимым. Тогда имеют место следующие утверждения.

Следствие 4. Если поверхность Σ_L не имеет других регулярных фундаментальных полей б. м. изгибания скольжения 1-го порядка вдоль L , кроме полей $U_{k_i}^1$, $1 \leq i \leq q$, $2 \leq k_1 < \dots < k_q \leq A(m, n)$, то Σ_L обладает жесткостью m -го порядка по отношению к б. м. изгибаниям скольжения вдоль L .

Следствие 5. Если поверхность Σ_L не имеет других регулярных фундаментальных полей б. м. изгибания скольжения 1-го порядка вдоль L , кроме полей $U_{k_i}^1$, $1 \leq i \leq q$, $2 \leq k_1 < \dots < k_q < \sqrt{2n}$, то Σ_L обладает жесткостью порядка $m \geq \frac{n}{n - \nu_k(n)}$ по отношению к б. м. изгибаниям скольжения вдоль L .

Замечание. Утверждения в теоремах 1–3 и в следствиях 1–5 имеют место и для односвязных 2-кратно гладких поверхностей вращения без асимптотических параллелей. Тогда в условии (37) имеем $s = 1$ и $d_{pk,2}^2 = \dots = d_{pk,s}^2 = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Liebmann, H. Bedingte Flächenverbiegungen, insbesondere Gleitverbiegungen. — Sitz. der Bayerische Ak. d. Wiss. (Müncher Berichte), 1920, 21–48.
2. Rembs, E. Über Gleitverbiegungen. — Math. Ann., 111, 1935, 587–595.
3. Милка, А. Д. О точках относительной нежесткости выпуклых поверхностей вращения. — Укр. геом. сборник, I, 1965, 63–74.
4. Андрейчин, Е. Р., И. Х. Сабитов. Обобщение теоремы Рембса на общие выпуклые поверхности вращения. — Укр. геом. сборник, 26, 1983, 13–24.
5. Иванова-Каратопраклиева, И. О бесконечно малых изгибаниях скольжения некоторых составных поверхностей вращения. — Матем. заметки, 10(5), 1971, 549–554.
6. Иванова-Каратопраклиева, И. Нежесткость второго порядка некоторых составных поверхностей вращения. — Сердика, 3(2), 1977, 159–167.
7. Иванова-Каратопраклиева, И. Върху безкрайно малките огъвания от втори ред на някои класове ротационни повърхнини. — Год. Соф. унив., Фак. по мат. и мех., 79, кн. 1 — Математика, 1985, 149–160.
8. Перлова, Н. Г. О скользящих бесконечно малых изгибаниях 1-го, 2-го и 3-го порядков ребристых поверхностей вращения, ограниченных одной параллелью. — Comment. math. Univ. Carolinae, 12(4), 1971, 807–823.
9. Перлова, Н. Г., Е. Н. Кононова. О скользящих бесконечно малых изгибаниях третьего порядка. — Изв. Сев. Кавк. научного центра высш. школ. Естеств. науки, I, 1989, 40–43.
10. Андрейчин, Е. Р. Безкрайно малки огъвания с хлъзгане от трети ред на някои ротационни повърхнини. Год. Соф. унив., Фак. по мат. и мех., 79, кн. 1 — Математика, 1985, 271–285.
11. Sohn-Vossen, S. Unstarre geschlossene Flächen. — Math. Ann., 102, 1929, 10–29.
12. Иванова-Каратопраклиева, I. Infinitesimal bendings of higher order of rotational surfaces. — Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences, 43(12), 1990, 13–16.

Получена 16.05.1991

О ТЕОРЕМАХ БОРСУКА–УЛАМА И ЛЮСТЕРНИКА–ШНИРЕЛЬМАНА–БОРСУКА

НИКОЛАЙ ХАДЖИИВАНОВ, ВЛАДИМИР НИКИФОРОВ

Николай Хаджииванов, Владимир Никифоров. О ТЕОРЕМАХ БОРСУКА–УЛАМА И ЛЮСТЕРНИКА–ШНИРЕЛЬМАНА–БОРСУКА

Основной результат: Если $f : X \rightarrow M^n$ гомотопически тривиальное отображение $(n - 1)$ -связного пространства X с инволюцией φ в n -мерное многообразие M^n , то существует точка x , для которой $f(x) = f(\varphi(x))$.

Nikolay Khadzhiivanov, Vladimir Nikiforov. ON THE THEOREMS OF BORSUK–ULAM AND LJUSTERNIK–SHNIRELMAN–BORSUK

The main result: Every homotopically trivial map $f : X \rightarrow M^n$ from the $(n - 1)$ -connected space X with involution φ to the n -dimensional topological manifold M^n identifies a pair of points $(x, \varphi(x))$.

1. ВВЕДЕНИЕ

С. Улам сформулировал, а К. Борсук [1] доказал в начале 30-ых годов следующую замечательную теорему:

Теорема Борсука–Улама. Для всякого непрерывного отображения $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ n -мерной сферы S^n в n -мерное евклидово пространство \mathbb{R}^n найдется такая точка x_0 , что $f(x_0) = f(-x_0)$.

Е. Щепин [2] показал, что можно заменить \mathbb{R}^n n -мерным топологическим многообразием, сузив класс отображений:

Теорема Щепина. Если непрерывное отображение $f : S^n \rightarrow M^n$ в

n -мерное многообразие M^n гомотопно постоянному, найдется такая точка x_0 , что $f(x_0) = f(-x_0)$.

Это предложение обобщает теорему Борсука–Улама, так как очевидно, что любое отображение $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ гомотопно постоянному.

Обобщим теорему Шепина, заменяя S^n $(n-1)$ -связным пространством, а антиподальное отображение $x \mapsto -x$ — произвольной инволюцией:

Теорема 1. Пусть X — $(n-1)$ -связное топологическое пространство с инволюцией φ . Если непрерывное отображение $f: X \rightarrow M^n$ гомотопно постоянному, найдется такая точка x_0 , что $f(x_0) = f(\varphi(x_0))$.

Напомним: топологическое пространство X n -связно, если всякое непрерывное отображение $\chi: S^n \rightarrow X$ гомотопно постоянному, а непрерывное отображение $\varphi: X \rightarrow X$ — инволюция, если $\varphi(\varphi(x)) = x$.

Сфера S^n — $(n-1)$ -связна, а антиподальное отображение $x \mapsto -x$ — инволюция сферы S^n . Поэтому теорема 1 действительно обобщает теорему Шепина.

С рассматриваемой проблематикой связана и следующая теорема, доказанная Люстерником–Шнирельманом [3] и Борсуком [1]:

Теорема Люстерника–Шнирельмана–Борсука. Если сфера S^n покрыта $n+1$ замкнутыми множествами, хотя бы одно из них содержит некоторую пару $\{x_0, -x_0\}$.

Янг [4] и Яворовский [5] обобщили эту теорему следующим образом:

Теорема Янга–Яворовского. Для любой инволюции φ сферы S^n и любого покрытия S^n $n+1$ замкнутыми множествами хотя бы одно из них содержит некоторую пару $\{x_0, \varphi(x_0)\}$.

Обобщим теорему Янга–Яворовского следующим образом:

Теорема 2. Для любой инволюции φ $(n-1)$ -связного метрического пространства X и любого покрытия пространства X $n+1$ замкнутыми множествами, хотя бы одно из них содержит некоторую пару $\{x_0, \varphi(x_0)\}$.

Очевидно любая инволюция топологического пространства является гомеоморфизмом, но обратное не верно. При $n=2$ более сильный результат по сравнению с теоремой Янга–Яворовского получил Шклярский:

Теорема Шклярского. Для любого гомеоморфизма $h: S^2 \rightarrow S^2$ и любого покрытия сферы S^2 тремя замкнутыми множествами, хотя бы одно из них содержит некоторую пару $\{x_0, h(x_0)\}$.

Здесь докажем одно существенное обобщение этой теоремы:

Теорема 3. Если метрический континуум X стягиваем относительно S^1 , а $\varphi: X \rightarrow X$ и $\psi: X \xrightarrow{\text{на}} X$ — непрерывные отображения, тогда для любого покрытия пространства X тремя замкнутыми множествами, хотя бы одно из них содержит некоторую пару $\{\varphi(x_0), \psi(x_0)\}$.

Напомним, что пространство X стягиваемо относительно S^1 , если всякая непрерывная функция $\chi: X \rightarrow S^1$ гомотопна постоянной. Сфера S^n стягиваема относительно S^1 , тогда и только тогда, когда $n \geq 2$. Поэтому, даже в частном случае, когда $X = S^2$ и $\psi = \text{id}$, теорема 3 более сильна по сравнению с теоремой Шклярского, так как $\varphi: X \rightarrow X$ — произвольное непрерывное отображение, а не обязательно гомеоморфизм.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Лемма 1. Пусть φ — инволюция $(n-1)$ -связного пространства X . Тогда существует такое непрерывное отображение $p_n : S^n \rightarrow X$, что $p_n(y) = \varphi(p_n(-y))$ для любого $y \in S^n$.

Докажем это утверждение индукцией по n . Сначала введем несколько обозначений. Пусть

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}, \quad S_+^n = \{x \in S^n \mid x_{n+1} \geq 0\},$$

$$S_-^n = \{x \in S^n \mid x_{n+1} \leq 0\}.$$

Очевидно, что $S^{n-1} = S_+^n \cap S_-^n$.

Утверждение имеет смысл и при $n = 0$, если считать, что любое пространство (-1) -связно. Имеем $S^0 = \{-1, 1\}$. Выберем $p_0(-1)$ произвольно в X и положим $p_0(1) = \varphi(p_0(-1))$. Очевидно $p_0 : S^0 \rightarrow X$ — непрерывное отображение и $p_0(y) = \varphi(p_0(-y))$ для любого $y \in S^0$, т. е. для $y = 1$ и $y = -1$.

Допустим, что $n \geq 1$ и утверждение верно для $n-1$. Пусть X — $(n-1)$ -связное пространство с инволюцией φ . Пространство X $(n-2)$ -связно и, согласно индуктивному предположению, существует такое непрерывное отображение $p_{n-1} : S^{n-1} \rightarrow X$, что $p_{n-1}(y) = \varphi(p_{n-1}(-y))$ при $y \in S^{n-1}$. Пространство X $(n-1)$ -связно и, следовательно, отображение p_{n-1} гомотопно постоянному, так что его можно продолжить на n -мерный шар с границей S^{n-1} . Значит существует непрерывное продолжение $p_n^- : S_-^n \rightarrow X$ отображения p_{n-1} . Для любой точки $y \in S_+^n$ положим $p_n^+(y) = \varphi(p_n^-(-y))$.

Отображения p_n^+ и p_n^- совпадают на множестве $S_-^n \cap S_+^n = S^{n-1}$. Действительно, пусть $y \in S^{n-1}$. Так как $y \in S_-^n \cap S^{n-1}$, то $p_n^-(y) = p_{n-1}(y)$, а из $-y \in S^{n-1}$ следует, что $p_n^-(-y) = p_{n-1}(-y)$. Из определения p_n^+ имеем $p_n^+(y) = \varphi(p_n^-(-y))$ и таким образом $p_n^+(y) = \varphi(p_{n-1}(-y))$. По определению p_{n-1} имеет место равенство $\varphi(p_{n-1}(-y)) = p_{n-1}(y)$. Окончательно $p_n^+(y) = p_{n-1}(y) = p_n^-(y)$ на S^{n-1} .

Определим искомое отображение $p_n : S^n \rightarrow X$ как следует: $p_n(y) = p_n^-(y)$ при $y \in S_-^n$ и $p_n(y) = p_n^+(y)$ при $y \in S_+^n$. Это определение, согласно только-что доказанному, корректно и, кроме того, отображение p_n непрерывно.

А сейчас докажем, что $p_n(y) = \varphi(p_n(-y))$ при $y \in S^n$. Действительно, если $y \in S_+^n$, тогда $p_n(y) = p_n^+(y) = \varphi(p_n^-(-y)) = \varphi(p_n(-y))$, а если $y \in S_-^n$, согласно только что доказанному, $p_n(-y) = \varphi(p_n(y))$ и следовательно $\varphi(p_n(-y)) = \varphi(\varphi(p_n(y))) = p_n(y)$.

Индуктивный шаг сделан и лемма 1 доказана.

Докажем теорему 1 с помощью леммы и теоремы Шепина.

Пусть X — $(n-1)$ -связное топологическое пространство с инволюцией φ , а $f : X \rightarrow M^n$ непрерывное отображение пространства X в n -мерное

топологическое многообразие M^n и отображение f — гомотопно постоянному отображению.

Согласно лемме существует такое непрерывное отображение $p_n: S^n \rightarrow X$, что $p_n(y) = \varphi(p_n(-y))$ при $y \in S^n$. Введем непрерывное отображение $F = fp_n$ сферы S^n в M^n . Оно гомотопно постоянному, потому что этим свойством по условию обладает отображение f . Тогда к ним можно применить теорему Шепина и таким образом заключить, что найдется точка $y_0 \in S^n$, для которой $F(y_0) = F(-y_0)$, т. е. $f(p_n(y_0)) = f(p_n(-y_0))$. Положим $x_0 = p_n(y_0)$ и так как $p_n(-y_0) = \varphi(p_n(y_0)) = \varphi(x_0)$, то полученное равенство можно записать следующим образом: $f(x_0) = f(\varphi(x_0))$.

Теорема 1 доказана. Она обобщает теорему Шепина, потому что сфера S^n — $(n-1)$ -связна.

Так как n -мерное многообразие \mathbf{R}^n стягиваемо в точку, то любое отображение $f: X \rightarrow \mathbf{R}^n$ гомотопно постоянному. Поэтому, из теоремы 1 вытекает следующее обобщение теоремы Борсука–Улама:

Следствие 1. Пусть X — $(n-1)$ -связное пространство с инволюцией φ . Для всякого непрерывного отображения $f: X \rightarrow \mathbf{R}^n$ найдется такая точка $x_0 \in X$, что $f(x_0) = f(\varphi(x_0))$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Пусть X — $(n-1)$ -связное метрическое пространство с инволюцией φ , а $\{F_1, F_2, \dots, F_{n+1}\}$ — покрытие пространства X , состоящее из замкнутых множеств.

Обозначим метрику пространства X через ρ и для произвольных $x \in X$, $A \subset X$, положим $\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, a) \mid a \in A\}$. Для любого фиксированного A функция $\rho(x, A)$ — непрерывна. Если множество A замкнуто и $\rho(x, A) = 0$, тогда $x \in A$.

Определим функцию $g: X \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ как следует:

$$g(x) = (\rho(x, F_1), \rho(x, F_2), \dots, \rho(x, F_{n+1})).$$

Функция g — непрерывна. Так как $X = \bigcup_{i=1}^{n+1} F_i$, то для любого x найдется такое i , что $x \in F_i$ и следовательно $\rho(x, F_i) = 0$. Таким образом

$$g(X) \subset Y = \bigcup_{i=1}^{n+1} \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid x_i = 0; x_j \geq 0, \text{ если } j \neq i\}.$$

Легко сообразить, что пространство Y гомеоморфно пространству \mathbf{R}^n ; через $h: Y \rightarrow \mathbf{R}^n$ обозначим гомеоморфизм Y на \mathbf{R}^n и положим $f = hg$. Применяя к отображению $f: X \rightarrow \mathbf{R}^n$ следствие 1, можно сделать заключение, что существует точка $x_0 \in X$, для которой $f(x_0) = f(\varphi(x_0))$, т. е. $h(g(x_0)) = h(g(\varphi(x_0)))$, значит $g(x_0) = g(\varphi(x_0))$. Последнее равенство означает, что

$$\rho(x_0, F_i) = \rho(\varphi(x_0), F_i), \quad i = 1, 2, \dots, n+1.$$

Для некоторого i имеем $x_0 \in F_i$, следовательно $0 = \rho(x_0, F_{n+1}) = \rho(\varphi(x_0), F_{n+1})$. Это показывает, что $\varphi(x_0) \in F_i$.

Таким образом множество F_i содержит пару $\{x_0, \varphi(x_0)\}$.

Теорема 2 доказана. При $X = S^n$, доказанная теорема совпадает с теоремой Янга-Яворовского.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Лемма 2. Если континуум X стягиваем относительно S^1 , $\psi: X \rightarrow X$ — непрерывное отображение пространства X на X , а $\varphi: X \rightarrow X$ — непрерывное отображение пространства X в X и, наконец, $f: X \rightarrow S^1$ — непрерывное отображение пространства X в окружность S^1 , тогда существует такая точка $x_0 \in X$, что $f(\varphi(x_0)) = f(\psi(x_0))$.

Доказательство. То, что X стягиваемо относительно S^1 , означает, что любое непрерывное отображение пространства X в S^1 гомотопно постоянному. Следовательно, отображение $f: X \rightarrow S^1$ гомотопно постоянному и, поэтому существует такое непрерывное отображение $\hat{f}: X \rightarrow \mathbf{R}$, что $f = e^{i\hat{f}}$ * (см. напр. [7], с. 209). Согласно простому утверждению из [8], стр. 222, существует точка $x_0 \in X$, для которой $\hat{f}(\varphi(x_0)) = \hat{f}(\psi(x_0))$. Тогда и $f(\varphi(x_0)) = f(\psi(x_0))$.

Лемма доказана.

Приступим к доказательству теоремы 3.

Пусть X — метрический континуум с метрикой ρ , который стягиваем относительно окружности S^1 , а $\psi: X \xrightarrow{\text{на}} X$ и $\varphi: X \rightarrow X$ — непрерывные отображения. Возьмем покрытие пространства X тремя замкнутыми множествами F_1, F_2 и F_3 и докажем, что хотя бы одно из них содержит пару точек $\{\psi(x_0), \varphi(x_0)\}$.

Утверждение очевидно верно в случае, когда $F_1 \cap F_2 \cap F_3 \neq \emptyset$. Действительно, ψ является отображением на X и, поэтому $\psi^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^3 F_i\right) \neq \emptyset$. Для любой точки x_0 из этого множества пара $\{\psi(x_0), \varphi(x_0)\}$ содержится в некотором из множеств F_i , потому что $\psi(x_0) \in \bigcap_{i=1}^3 F_i$, $\varphi(x_0) \in \bigcup_{i=1}^3 F_i$.

Итак, в дальнейшем можно предполагать, что $\bigcap_{i=1}^3 F_i = \emptyset$. Для любого x хотя бы одно из чисел $\rho(x, F_i)$, $i = 1, 2, 3$, отлично от 0 и следовательно $\sum_{i=1}^3 \rho(x, F_i) \neq 0$. Положим

$$\xi(x) = \frac{\rho(x, F_1)}{\sum_{i=1}^3 \rho(x, F_i)}, \quad \eta(x) = \frac{\rho(x, F_2)}{\sum_{i=1}^3 \rho(x, F_i)}, \quad f(x) = (\xi(x), \eta(x)).$$

* Здесь i обозначает имажинерную единицу.

Отображение $f : X \rightarrow \mathbf{R}^2$ очевидно непрерывно. Так как $X = \bigcup_{i=1}^3 F_i$, обязательно выполнено одно из трех равенств $\rho(x, F_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$, и следовательно представляется хотя бы одна из следующих трех возможностей: $\xi(x) = 0$, $\eta(x) = 0$, $\xi(x) + \eta(x) = 1$. Это показывает, что $f(x)$ лежит на границе ∂T треугольника T с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. Множество ∂T гомеоморфно S^1 и следовательно f — непрерывное отображение пространства X в окружность S^1 .

Согласно лемме 2 существует точка $x_0 \in X$, для которой $f(\varphi(x_0)) = f(\psi(x_0))$, т. е.

$$\frac{\rho(\varphi(x_0), F_k)}{\sum_{i=1}^3 \rho(\varphi(x_0), F_i)} = \frac{\rho(\psi(x_0), F_k)}{\sum_{i=1}^3 \rho(\psi(x_0), F_i)}, \quad k = 1, 2.$$

Из этих двух равенств следует, что $\varphi(x_0) \in F_k$, $k = 1, 2$, тогда и только тогда, когда $\psi(x_0) \in F_k$. Если $\varphi(x_0) \notin F_1 \cup F_2$, тогда и $\psi(x_0) \notin F_1 \cup F_2$ и значит $\varphi(x_0)$ и $\psi(x_0)$ содержатся в F_3 .

Теорема доказана.

Известно, что любое 1-связное и локально линейно связное пространство стягиваемо относительно S^1 (см. напр. [9]; с. 138). Это дает возможность из теоремы 3 тривиальным образом вывести следующее

Следствие 2. Если континуум X 1-связен и локально линейно связен, а $\psi : X \xrightarrow{\text{на}} X$ и $\varphi : X \rightarrow X$ — непрерывные отображения, тогда для любого покрытия пространства X тремя замкнутыми множествами хотя бы одно из них содержит $\psi(x_0)$ и $\varphi(x_0)$ для некоторой $x_0 \in X$.

Сфера S^n — 1-связна, тогда и только тогда, когда $n \geq 2$ и, к тому же, она локально линейно связна. Поэтому следствие 2 очевидным образом влечет следующее

Следствие 3. Для любых непрерывных отображений $\psi : S^n \xrightarrow{\text{на}} S^n$ и $\varphi : S^n \rightarrow S^n$, $n \geq 2$, и для любого покрытия сферы S^n тремя замкнутыми множествами хотя бы одно из них содержит $\psi(x_0)$ и $\varphi(x_0)$ для некоторой точки $x_0 \in S^n$.

Очевидно, утверждение из следствия 3 не имеет место при $n = 1$. Если в следствии 3 положить $\psi = \text{id}$, получаем

Следствие 4. Пусть $\varphi : S^n \rightarrow S^n$, $n \geq 2$, — произвольное непрерывное отображение, а $S^n = F_1 \cup F_2 \cup F_3$, где F_i — замкнутые множества. Тогда существует такая точка $x_0 \in S^n$, что x_0 и $\varphi(x_0)$ одновременно содержатся в некотором F_i .

Очевидно следствие 4 является обобщением теоремы Шклярского, не только потому что $n \geq 2$, но и так как φ не является обязательно гомеоморфизмом.

В заключение придадим несколько другую форму теореме 3. По определению, топологическое пространство X — уникогерентно, если оно связно и для каждой пары замкнутых связных множеств A и B , таких что

$X = A \cup B$, пересечение $A \cap B$ — связно. Метрический континуум стягиваем относительно S^1 , тогда и только тогда, когда он уникогерентен (см. напр. [7], с. 209). Поэтому, теорему 3 можно высказать еще следующим образом:

Следствие 5. *Если компактное метрическое пространство X уникогерентно, а $\varphi: X \rightarrow X$ и $\psi: X \xrightarrow{\text{на}} X$ — непрерывные отображения, тогда для любого покрытия пространства X тремя замкнутыми множествами хотя бы одно из них содержит некоторую пару $\{\varphi(x_0), \psi(x_0)\}$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Borsuk, K. Drei Sätze über die n -dimensionale euklidische Sphäre. — Fund. Math., 20, 1933, 177–190.
2. Шепин, Е. Одна теорема о склеивании антиподов. — ДАН СССР, 222, 1975, № 4, 772–774.
3. Люстерник, Л., Л. Шнирельман. Топологические методы в вариационных задачах. М., 1930.
4. Yang, C. On the theorem of Borsuk-Ulam, Kakutani-Yamabe-Yujobo and Dyson, I. — Ann. Math., Ser. 2, 60, 1954, № 2, 262–282.
5. Jaworski, J. On antipodal sets on the sphere and on continuous involutions. — Fund. Math., 43, 1956, 241–257.
6. Шклярский, Д. О разбиениях двумерной сферы. — Матем. сб., 16, 1945, 125–128.
7. Čech, E. Point sets. Czech. Acad. Sci., Prague, 1969.
8. Хаджииванов, Н. Непрекъснати изображения на кабарчета в евклидови пространства. Математика и матем. образование. С., 1974, 221–230.
9. Спеньер, Э. Алгебраическая топология. М., 1971.

Поступила 18.05.1991

О СКЛЕИВАНИЯХ, ПРОИСХОДЯЩИХ ПРИ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ТОРА В ПЛОСКОСТЬ

НИКОЛАЙ ХАДЖИИВАНОВ, СИМЕОН СТЕФАНОВ

Николай Хаджииванов, Симеон Стефанов. О СКЛЕИВАНИЯХ, ПРОИСХОДЯЩИХ ПРИ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ТОРА В ПЛОСКОСТЬ

Рассматриваются непрерывные отображения двумерного тора в плоскость. Н. Хаджииванов доказал (см. [1]), что любое такое отображение склеивает пару удаленных точек. Позже он уточнил местоположение этих точек. Настоящее доказательство этого утверждения принадлежит обоим авторам.

Nikolay Khadzhivanov, Simeon Stefanov. ON THE IDENTIFICATION OF POINTS BY CONTINUOUS MAPS FROM THE TORUS TO THE PLANE

Continuous maps from a 2-dimensional torus to the plane are considered. N. Khadzhivanov has proved for such maps that they identify a pair of distant points (cf. [1]). Later he has precised the situation of these points. The present proof of this result belongs to the both authors.

Согласно классической теореме Борсука-Улама, для всякого непрерывного отображения $f: S^2 \rightarrow R^2$ сферы S^2 в плоскость R^2 найдется пара диаметрально противоположных точек сферы, образы которых совпадают. Об аналогичном результате пойдет речь в настоящей статье.

Полукружность $(x-r)^2 + z^2 = 1$, $y = 0$, $x \leq r$, где $r > 1$, обозначим через L , а дополнительную — через L' . Через S обозначим поверхность, полученную вращением полукружности L' вокруг оси \vec{Oz} . Очевидно $T = S \cup L$ является подмножеством двумерного тора T^2 , полученного вращением окружности $L \cup L'$ вокруг оси \vec{Oz} . Для любой точки $u \in L$

через S_u обозначим окружность на торе, параллельную плоскости Oxy и проходящую через точку на окружности $L \cup L'$, диаметрально противоположную точке u . Круг с контуром S_u обозначим через D_u . Положим $a = (r, 0, 1)$, $b = (r, 0, -1)$.

В [1] сформулировано следующее предложение:

При любом непрерывном отображении $f : T^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ найдется пара точек (u, v) , для которых $\|u - v\| \geq 2r$ и $f(u) = f(v)$.

На VI-ой конференции Болгарского математического общества в Варне, 6–9 апреля 1977, обоими авторами был сделан доклад, в котором это предложение уточняется следующим образом:

Теорема (Н. Хаджииванов, 1973). Пусть $f : T \rightarrow \mathbb{R}^2$ — непрерывное отображение. Тогда оно имеет хотя бы одно из следующих трех свойств:

- 1) $f(S_a) \cap f(S_b) \neq \emptyset$;
- 2) Существует точка $u \in L \setminus \{a, b\}$, для которой $f(u) \in f(S_u)$;
- 3) Существует точка $u \in S \setminus (S_a \cup S_b)$, для которой $f(u) = f(-u)$.

Предложение из [1] является тривиальным следствием из этой теоремы, потому что $T \subset T^2$ и любое из свойств 1)–3) очевидно гарантирует существование пары (u, v) , для которой $\|u - v\| \geq 2r$ и $f(u) = f(v)$.

Свойства 1)–3) независимы:

1. Ортогональная проекция на плоскость Oxy удовлетворяет только свойство 1).

2. Если $f : T \rightarrow \mathbb{R}^2$ — произвольное непрерывное отображение, которое взаимно однозначно на S , тогда выполняется только свойство 2).

3. Пусть f — тождественно на L , а любой точке u из S отображение f сопоставляет точку v на полуокружности L' , имеющую ту же самую аппликуату. Тогда f — непрерывное отображение множества T в плоскость Oxz , которое удовлетворяет только свойство 3).

Приступаем к доказательству теоремы, принадлежащее обоим авторам.

Лемма 1. В плоскости даны два дизъюнктные континуума. Тогда хотя бы один из них содержится в неограниченной компоненте связности дополнения другого.

Доказательство. Пусть P и Q — континуумы в \mathbb{R}^2 и $P \cap Q = \emptyset$. Легко сообразить, что имеется луч \vec{m} с началом $d \in P \cup Q$, который не содержит других точек из $P \cup Q$; пусть например $d \in Q$. Тогда $\vec{m} \cup Q$ — связное множество, которое не пересекает P и следовательно содержится в компоненте множества $\mathbb{R}^2 \setminus P$; эта компонента неограничена, так как содержит \vec{m} .

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть K — простая односторонне неограниченная конечная ломаная на плоскости \mathbb{R}^2 . Тогда ее дополнение $\mathbb{R}^2 \setminus K$ гомеоморфно \mathbb{R}^2 .

Доказательство. Очевидно существует гомеоморфизм плоскости \mathbb{R}^2 на себя, при котором K изображается на некоторый луч \vec{m} . Нетрудно сообразить, что $\mathbb{R}^2 \setminus \vec{m}$ гомеоморфно открытой полуплоскости, а значит — $\mathbb{R}^2 \setminus K$ гомеоморфно \mathbb{R}^2 .

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть F — замкнутое подмножество нормального топологического пространства X , а $f : F \rightarrow \mathbb{R}^2$ — непрерывное отображение. Если точка c содержится в неограниченной компоненте связности множества $\mathbb{R}^2 \setminus f(F)$, тогда существует непрерывное продолжение $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ отображения f , для которого $c \notin \tilde{f}(X)$.

Доказательство. Пусть \tilde{m} — луч в \mathbb{R}^2 с началом d , который целиком содержится в $\mathbb{R}^2 \setminus f(F)$. Тогда \tilde{m} содержится в неограниченной компоненте U этого множества. Так как, по условию, и $c \in U$, то существует конечная ломанная P , содержащаяся в U , которая соединяет c с d . Без ограничения общности можно считать, что P — простая ломанная, которая не пересекает \tilde{m} , кроме в d . Тогда $K = P \cup \tilde{m}$ — простая односторонне неограниченная ломанная в \mathbb{R}^2 и, согласно лемме 2, множество $\mathbb{R}^2 \setminus K$ гомеоморфно \mathbb{R}^2 . Тогда непрерывное отображение $f : F \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus K$, согласно классической теореме Титце–Урысона, продолжается до непрерывного отображения $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus K$. Из включения $c \in K$ следует, что $c \notin \tilde{f}(X)$.

Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть F — замкнутое подмножество нормального пространства X , c и d — точки плоскости \mathbb{R}^2 , $\varepsilon > 0$, $c \in O_\varepsilon(d)$ и $f : F \rightarrow \mathbb{R}^2$ — непрерывное отображение, для которого $f(F) \cap O_\varepsilon(d) = \emptyset$. Если существует непрерывное продолжение $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ отображения f , для которого $c \notin \varphi(X)$, тогда существует непрерывное продолжение $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ отображения f , для которого $\tilde{f}(X) \cap O_\varepsilon(d) = \emptyset$.

Доказательство. Пусть $r : \mathbb{R}^2 \setminus c \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus O_\varepsilon(d)$ — непрерывная ретракция и $\tilde{f} = r\varphi$. Докажем, что \tilde{f} обладает искомым свойством.

Если $x \in F$, тогда $\varphi(x) = f(x)$ и так как $f(x) \notin O_\varepsilon(d)$, то $\tilde{f}(x) = r(f(x)) = f(x)$. Таким образом, \tilde{f} является продолжением отображения. Соотношение $\tilde{f}(X) \cap O_\varepsilon(d) = \emptyset$ выполнено, потому что $\tilde{f}(x) = r(\varphi(x)) \in r(\mathbb{R}^2 \setminus c) \subset \mathbb{R}^2 \setminus O_\varepsilon(d)$ для любого $x \in X$.

Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть $f : T \rightarrow \mathbb{R}^2$ — непрерывное отображение, для которого $f(S_a) \cap f(S_b) = \emptyset$ и $f(u) \notin f(S_u)$ для любого $u \in L$. Тогда существует непрерывное отображение $f : \mathcal{D}_a \cup \mathcal{D}_b \rightarrow \mathbb{R}^2$, которое является продолжением отображения $f|_{S_a \cup S_b}$ и удовлетворяет условиям $f(a) \notin f(\mathcal{D}_a)$ и $f(b) \notin f(\mathcal{D}_b)$.

Доказательство. Определим подмножество L_+ множества L следующим образом: $u \in L_+$ тогда и только тогда, когда существует непрерывное продолжение $f_u : \mathcal{D}_u \rightarrow \mathbb{R}^2$ отображения $f|_{S_u}$, для которого $f(u) \notin f_u(\mathcal{D}_u)$. Нам нужно доказать, что $a \in L_+$ и $b \in L_+$; действительно, тогда можно будет положить $\tilde{f}(u) = f_u(u)$ для любого $u \in \mathcal{D}_a$ и $\tilde{f}(u) = f_b(u)$ для любого $u \in \mathcal{D}_b$ и отображение \tilde{f} будет искомым.

Сначала установим, что $L_+ \neq \emptyset$. Одно из множеств $f(S_a)$, $f(S_b)$ содержится в неограниченной компоненте дополнения другого (см. лемму 1): пусть это например $f(S_a)$. Так как $b \in S_a$, то $f(b)$ лежит в неограниченной компоненте множества $\mathbb{R}^2 \setminus f(S_b)$ и, поэтому существует непрерывное продолжение $f_b : \mathcal{D}_b \rightarrow \mathbb{R}^2$ отображения $f|_{S_b}$, для которого $f(b) \notin f_b(\mathcal{D}_b)$ (см.

лемму 3). А это показывает, что $b \in L_+$.

Итак, $L_+ \neq \emptyset$. А теперь докажем, что L_+ — открыто-замкнутое подмножество множества L , т. е. что множества L_+ и $L_- = L \setminus L_+$ — открыты в L . А это будет так, если для любой точки $u_0 \in L$ существует дуга $\langle u_1, u_2 \rangle$, содержащая u_0 и целиком лежащая или в L_+ , или в L_- .

Пусть $u_0 \in L$. По условию $f(u_0) \notin f(S_{u_0})$ и следовательно существует $\varepsilon > 0$, для которого $O_{2\varepsilon}(f(u_0)) \cap f(S_{u_0}) = \emptyset$. Легко сообразить, что имеются $u_1 \in L$ и $u_2 \in L$, для которых $u_0 \in \langle u_1, u_2 \rangle$ и

$$(1) \quad f(\langle u_1, u_2 \rangle) \subset O_\varepsilon(f(u_0))$$

и

$$(2) \quad O_\varepsilon(f(u_0)) \cap f(S_u) = \emptyset \quad \text{для любого } u \in \langle u_1, u_2 \rangle.$$

Действительно, из равномерной непрерывности отображения $f|_S$ следует, что если окружность S_u достаточно близка к S_{u_0} , тогда $f(S_u) \subset O_\varepsilon(f(S_{u_0}))$ и так как $O_{2\varepsilon}(f(u_0)) \cap f(S_{u_0}) = \emptyset$, то $O_\varepsilon(f(u_0)) \cap f(S_u) = \emptyset$.

Докажем, что при сделанном выборе u_1 и u_2 имеет место или включение $\langle u_1, u_2 \rangle \subset L_-$, или $\langle u_1, u_2 \rangle \in L_+$. Допустим, что первое не выполнено и следовательно $\langle u_1, u_2 \rangle \cap L_+ \neq \emptyset$. Надо доказать, что $\langle u_1, u_2 \rangle \subset L_+$. Пусть $u' \in \langle u_1, u_2 \rangle \cap L_+$, а $u'' \in \langle u_1, u_2 \rangle$. Надо доказать, что $u'' \in L_+$, т. е. что существует непрерывное продолжение $f_{u''} : \mathcal{D}_{u''} \rightarrow \mathbf{R}^2$ отображения $f|_{S_{u''}}$, для которого $f(u'') \notin f_{u''}(\mathcal{D}_{u''})$.

Так как $u' \in L_+$, то существует непрерывное продолжение $f_{u'} : \mathcal{D}_{u'} \rightarrow \mathbf{R}^2$ отображения $f|_{S_{u'}}$, для которого $f(u') \notin f_{u'}(\mathcal{D}_{u'})$. Благодаря лемме 4, можно считать, что $f_{u'}(\mathcal{D}_{u'}) \cap O_\varepsilon(f(u_0)) = \emptyset$, так как $u' \in O_\varepsilon(f(u_0))$ (см. (1)) и $f(S_{u'}) \cap O_\varepsilon(f(u_0)) = \emptyset$ (см. (2)). Положим $\overline{\mathcal{D}}_{u''} = \mathcal{D}_{u'} \cup \cup \{S_u | u \in \langle u', u'' \rangle\} \cup S_{u''}$ и определим отображение $\overline{f}_{u''} : \overline{\mathcal{D}}_{u''} \rightarrow \mathbf{R}^2$ следующим образом: $\overline{f}_{u''}(v) = f_{u'}(v)$, если $v \in \mathcal{D}_{u'}$, и $\overline{f}_{u''}(v) = f(v)$, если $v \in S_u$ для некоторого $u \in \langle u', u'' \rangle \cup \{u''\}$.

Из данного определения ясно, что $\overline{f}_{u''}$ является продолжением отображения $f|_{S_{u''}}$.

Докажем, что $f(u'') \notin \overline{f}_{u''}(\overline{\mathcal{D}}_{u''})$. Действительно $\overline{f}_{u''}(\mathcal{D}_{u'}) = f_{u'}(\mathcal{D}_{u'})$ и $f_{u'}(\mathcal{D}_{u'}) \cap O_\varepsilon(f(u_0)) = \emptyset$. Кроме того, если $u \in \langle u', u'' \rangle \cup \{u''\}$, тогда $\overline{f}_{u''}(S_u) = f(S_u)$, а $f(S_u) \cap O_\varepsilon(f(u_0)) = \emptyset$ (см. (2)). Следовательно, $\overline{f}_{u''}(\overline{\mathcal{D}}_{u''}) \cap O_\varepsilon(f(u_0)) = \emptyset$ и так как $f(u'') \subset f(\langle u_1, u_2 \rangle) \subset O_\varepsilon(f(u_0))$, то $f(u'') \notin \overline{f}_{u''}(\overline{\mathcal{D}}_{u''})$.

Очевидно существует гомеоморфизм $h : \mathcal{D}_{u''} \xrightarrow{\text{на}} \overline{\mathcal{D}}_{u''}$, который оставляет на месте все точки из $S_{u''}$. Положим $f_{u''} = \overline{f}_{u''}h$. Тогда $f_{u''} : \mathcal{D}_{u''} \rightarrow \mathbf{R}^2$ — непрерывное продолжение отображения $f|_{S_{u''}}$ и $f_{u''}(\mathcal{D}_{u''}) = \overline{f}_{u''}(\overline{\mathcal{D}}_{u''})$; так что $f(u'') \notin f_{u''}(\mathcal{D}_{u''})$.

Таким образом доказано, что $u'' \in L_+$.

Итак, L_+ — непустое открыто-замкнутое подмножество связного мно-

жества L . Следовательно $L_+ = L$ и значит $a \in L_+$, $b \in L_+$.

Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}^2$ — непрерывное отображение круга \mathcal{D} в плоскость \mathbf{R}^2 , $\partial\mathcal{D}$ — контур круга, $p \in \partial\mathcal{D}$, $q \in \partial\mathcal{D}$, $p \neq q$, $0 < 2\delta < \|p - q\|$. Тогда существует непрерывное отображение $\tilde{f} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}^2$ со следующими свойствами:

1. $\tilde{f}(\mathcal{D}) \subset f(\mathcal{D})$;
2. $\tilde{f}|_{\partial\mathcal{D}} = f|_{\partial\mathcal{D}}$;
3. $\tilde{f}(\mathcal{D} \setminus (O_\delta(p) \cup O_\delta(q))) \subset f(\partial\mathcal{D})$;
4. $\tilde{f}(O_\delta(p)) \subset f(O_\delta(p))$.

Доказательство. Определим непрерывное отображение $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ со следующими свойствами:

- а) $\varphi|_{\partial\mathcal{D}} = \text{id}$;
- б) $\varphi(\mathcal{D} \setminus O_\delta(q)) \subset \partial\mathcal{D}$;
- в) $\varphi(O_\delta(p)) \subset O_\delta(p) \cap \partial\mathcal{D}$.

Построить φ не составит никакого труда. А теперь определим искомое \tilde{f} следующим образом $\tilde{f} = f\varphi$. Проверка условий 1–4 элементарна.

Лемма доказана.

Лемма 7. Пусть $f : \mathcal{D}_a \cup \mathcal{D}_b \rightarrow \mathbf{R}^2$ — непрерывное отображение, $f(S_a) \cap f(S_b) = \emptyset$, $f(a) \notin f(\mathcal{D}_a)$, $f(b) \notin f(\mathcal{D}_b)$. Тогда существует непрерывное отображение $\tilde{f} : \mathcal{D}_a \cup \mathcal{D}_b \rightarrow \mathbf{R}^2$ со следующими свойствами:

- 1) $\tilde{f}|_{S_a \cup S_b} = f|_{S_a \cup S_b}$;
- 2) $\tilde{f}(u) \neq \tilde{f}(-u)$ для любого $u \in \mathcal{D}_a$.

Доказательство. Как легко сообразить, существует δ , $0 < \delta < 2r$, для которого $f(O_\delta(a)) \cap f(O_\delta(b)) = \emptyset$, $f(O_\delta(a)) \cap f(\mathcal{D}_a) = \emptyset$, $f(O_\delta(b)) \cap f(\mathcal{D}_b) = \emptyset$.

Применяя лемму 6 для круга $\mathcal{D} = \mathcal{D}_b$ и точек $p = a$ и $q = -b$, построим отображение $\tilde{f} : \mathcal{D}_b \rightarrow \mathbf{R}^2$, для которого

- 1б. $\tilde{f}(\mathcal{D}_b) \subset f(\mathcal{D}_b)$;
- 2б. $\tilde{f}|_{S_b} = f|_{S_b}$;
- 3б. $\tilde{f}(\mathcal{D}_b \setminus (O_\delta(a) \cup O_\delta(-b))) \subset f(S_b)$;
- 4б. $\tilde{f}(O_\delta(a)) \subset f(O_\delta(a))$.

Применяя повторно лемму 6, на этот раз для круга $\mathcal{D} = \mathcal{D}_a$ и точек $p = b$ и $q = -a$, построим отображение $\tilde{f} : \mathcal{D}_a \rightarrow \mathbf{R}^2$, для которого

- 1а. $\tilde{f}(\mathcal{D}_a) \subset f(\mathcal{D}_a)$;
- 2а. $\tilde{f}|_{S_a} = f|_{S_a}$;
- 3а. $\tilde{f}(\mathcal{D}_a \setminus (O_\delta(b) \cup O_\delta(-a))) \subset f(S_a)$;
- 4а. $\tilde{f}(O_\delta(b)) \subset f(O_\delta(b))$.

Легко доказать, что таким образом определенное отображение $\tilde{f} : \mathcal{D}_a \cup \mathcal{D}_b \rightarrow \mathbf{R}^2$ обладает искомыми свойствами. Свойство 1) очевидно. Чтобы доказать и свойство 2), рассмотрим отдельно три возможности.

Пусть $u \in \mathcal{D}_a \setminus (O_\delta(b) \cup O_\delta(-a))$. Тогда $-u \in \mathcal{D}_b \setminus (O_\delta(a) \cup O_\delta(-b))$. Воспользуемся 3а и 3б, чтобы сделать заключение, что $\tilde{f}(u) \subset f(S_a)$ и $\tilde{f}(-u) \in f(S_b)$, так что $\tilde{f}(u) \neq \tilde{f}(-u)$.

Пусть теперь $u \in O_\delta(b)$. Из 4а следует, что $\tilde{f}(u) \subset f(O_\delta(b))$. Так как $\tilde{f}(-u) \subset \tilde{f}(D_b) \subset f(D_b)$ (см. 1б) и $f(O_\delta(b)) \cap f(D_b) = \emptyset$, то $\tilde{f}(u) \neq \tilde{f}(-u)$.

Пусть, наконец, $u \in O_\delta(-a)$. Тогда $-u \in O_\delta(a)$. Из 1а следует, что $\tilde{f}(u) \subset f(D_a)$, а из 4б — что $\tilde{f}(-u) \subset f(O_\delta(a))$. Так как $f(D_a) \cap f(O_\delta(a)) = \emptyset$, то $\tilde{f}(u) \neq \tilde{f}(-u)$.

Таким образом доказано, что $\tilde{f}(u) \neq \tilde{f}(-u)$ для любого $u \in D_a$.

Доказательство леммы завершено.

Доказательство теоремы. Пусть $f: T \rightarrow \mathbf{R}^2$ — непрерывное отображение, для которого $f(S_a) \cap f(S_b) = \emptyset$ и $f(u) \notin f(S_u)$ для любого $u \in L$. Докажем, что существует $u_0 \in S$, для которого $f(u_0) = f(-u_0)$.

Согласно лемме 5 существует непрерывное отображение $\tilde{f}: D_a \cup D_b \rightarrow \mathbf{R}^2$, которое является продолжением отображения $f|_{S_a \cup S_b}$ и, кроме того, $\tilde{f}(a) \notin \tilde{f}(D_a)$, $\tilde{f}(b) \notin \tilde{f}(D_b)$. Тогда из леммы 7 следует, что существует непрерывное отображение $\hat{f}: D_a \cup D_b \rightarrow \mathbf{R}^2$, которое является продолжением отображения $\tilde{f}|_{S_a \cup S_b}$, а следовательно и отображения $f|_{S_a \cup S_b}$ и, кроме того, $\hat{f}(u) \neq \hat{f}(-u)$ для любого $u \in D_a$.

Положим $\hat{S} = S \cup D_a \cup D_b$ и определим $\hat{f}(u) = f(u)$ для любого $u \in S$. Таким образом, непрерывное отображение $\hat{f}: \hat{S} \rightarrow \mathbf{R}^2$ определено на все множество \hat{S} , которое очевидно гомеоморфно двумерной сфере S^2 . Согласно теореме Борсука–Улама существует $u_0 \in \hat{S}$, для которого $\hat{f}(u_0) = \hat{f}(-u_0)$. Но мы знаем, что $\hat{f}(u) \neq \hat{f}(-u)$ для любого $u \in D_a \cup D_b$. Следовательно $u_0 \in S$ и значит $f(u_0) = f(-u_0)$.

Таким образом доказательство теоремы завершено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаджииванов, Н. Г. Непрекъснати изображения на каърчета в евклидови пространства. — Математика и математическо образование (Доклади на II пролетна конф. на БМД). С., БАН, 1974, 221–230.

Поступила 18.05.1991

О РАЗМЕРНОСТИ БИКОМПАКТОВ*

НИКОЛАЙ ХАДЖИИВАНОВ

Николай Хаджииванов. О РАЗМЕРНОСТИ БИКОМПАКТОВ

Пусть X — бикомпакт, обладающий следующим свойством: если $X = U \cup V$, где U и V — открытые множества, тогда существует такая последовательность замкнутых множеств $F_1, F_2, \dots, F_k, \dots$, что $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, $F_k \subset U$ или $F_k \subset V$ для любого k и $\dim(F_i \cap F_j) \leq n - 1$, если $i \neq j$. Тогда $\dim X \leq n$.

Nikolaj Khadzhiivanov. ON THE DIMENSION OF COMPACTA

The inequality $\dim X \leq n$ holds for a compact space X with the property that each binary open cover has a countable closed refinement $\{F_k\}$ such that $\dim(F_i \cap F_j) \leq n - 1$ for $i \neq j$.

В статье [1] мы доказали следующий результат:

Пусть X — бикомпакт, в любое бинарное открытое покрытие которого можно вписать счетное дизъюнктивное замкнутое покрытие. Тогда $\dim X \leq 0$.

Теперь мы обобщим это предложение следующим образом:

Теорема. Пусть X — бикомпакт, в любое бинарное открытое покрытие которого можно вписать такое счетное замкнутое покрытие, что пересечение любых его двух различных элементов имеет размерность \dim не более чем $n - 1$. Тогда $\dim X \leq n$.

* Доклад V конференции Болгарского математического общества, Габрово, 8–10 апреля 1976 г. Труды конференции еще не вышли в свет.

Обратное утверждение не верно. Федорчук построил в [2] для любого $n, n \geq 2$, пример бикompакта X_n , любое замкнутое подмножество которого имеет размерность \dim или 0 или n , где n — размерность самого бикompакта X_n . Очевидно нельзя в любое бинарное открытое покрытие бикompакта X_n вписать счетное замкнутое покрытие, пересечение любых двух различных элементов которого имеет размерность не более чем $n-1$. Действительно, если это было бы возможно, тогда все вопросные пересечения имели бы размерность 0 и, следовательно, по только что сформулированной теореме получили бы $\dim X_n \leq 1$, что естественно является противоречием.

С другой стороны, легко видеть, что утверждение, которое мы сформулировали в самом начале, обратимо, так как очевидно в любое открытое покрытие бикompакта X , для которого $\dim X = 0$, можно вписать даже конечное замкнутое дизъюнктивное покрытие.

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая

Лемма. Пусть A_+ и A_- — замкнутые непересекающиеся подмножества бикompакта C , который является объединением счетного числа дизъюнктивных замкнутых подмножеств, никакое из которых не пересекает одновременно A_+ и A_- . Тогда существуют замкнутые подмножества C_+ и C_- бикompакта C , для которых $A_+ \subset C_+$, $A_- \subset C_-$, $C = C_+ \cup C_-$, $C_+ \cap C_- = \emptyset$.

Доказательство леммы содержится в доказательстве леммы 3 на с. 123 нашей работы [3].

Доказательство теоремы. Допустим, что $\dim X \geq n+1$. Тогда в X можно найти такие $n+1$ пары замкнутых множеств Φ_{+i}, Φ_{-i} , для которых $\Phi_{+i} \cap \Phi_{-i} = \emptyset, i = 1, 2, \dots, n+1$, и нельзя найти перегородок C_i в X между Φ_{+i} и $\Phi_{-i}, i = 1, 2, \dots, n+1$, с пустым пересечением $\bigcap_{i=1}^{n+1} C_i$.

Положим $U_+ = X \setminus \Phi_{-(n+1)}$ и $U_- = X \setminus \Phi_{+(n+1)}$. Открытые множества U_+ и U_- составляют открытое бинарное покрытие ω бикompакта X . В покрытие ω впишем такое счетное замкнутое покрытие, что пересечение любых его двух различных элементов имеет размерность не более чем $n-1$; пусть $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_j, \dots$ — элементы этого покрытия. Очевидно никакое из множеств \mathcal{F}_j не пересекает одновременно $\Phi_{+(n+1)}$ и $\Phi_{-(n+1)}$. Множество

$$M = \bigcup_{i \neq j} \mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j$$

имеет размерность $\dim M \leq n-1$. Кроме того, оно F_σ -множество и поэтому (см. [3]) множество $X \setminus M$ нормально прилегает к M . Тогда (см. [3]) существуют перегородки C_i в X между Φ_{+i} и $\Phi_{-i}, i = 1, 2, \dots, n$, такие что

$$M \cap \bigcap_{i=1}^n C_i = \emptyset.$$

Множество $C = \bigcap_{i=1}^n C_i$ и его подмножества $A_+ = C \cap \Phi_{+(n+1)}$ и $A_- = C \cap \Phi_{-(n+1)}$ удовлетворяют всем условиям леммы, так как никакое из замкнутых подмножеств $C \cap \mathcal{F}_j$ бикompакта C не пересекает одновременно A_+ и A_- и, кроме того, они попарно не пересекаются: $(C \cap \mathcal{F}_i) \cap (C \cap \mathcal{F}_j) \subset C \cap M$, а $C \cap M = \emptyset$. Тогда существуют замкнутые подмножества C_+ и C_- бикompакта C , для которых $C = C_+ \cup C_-$, $C_+ \cap C_- = \emptyset$, $A_+ \subset C_+$, $A_- \subset C_-$. Замкнутые множества $C_+ \cup \Phi_{+(n+1)}$ и $C_- \cup \Phi_{-(n+1)}$ не пересекаются и поэтому существует перегородка C_{n+1} в X между ними. Ясно, что C_{n+1} является перегородкой между $\Phi_{+(n+1)}$ и $\Phi_{-(n+1)}$ и $C \cap C_{n+1} = \emptyset$.

Итак, мы нашли перегородки C_i в X между Φ_{+i} и Φ_{-i} , $i = 1, 2, \dots, n+1$, такие что $\bigcap_{i=1}^{n+1} C_i = \emptyset$.

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Доказанная теорема обобщает частично теорему из §2 нашей статьи [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаджииванов, Н. О размерности компактных метрических пространств. — Докл. Болг. Акад. наук, 29, 1976, № 7, 1085–1086.
2. Федорчук, В. В. Бикompакты без промежуточных размерностей. — ДАН СССР, 213, 1973, № 4, 795–798.
3. Хаджииванов, Н. О продолжении отображений в сферы и о счетных разложениях тихоновских кубов. — Матем. сборник, 84, 1971, № 1, 119–140.
4. Хаджииванов, Н. О счетных объединениях замкнутых множеств, попарные пересечения которых имеют ограниченную размерность. — Докл. Болг. Акад. наук, 29, 1976, № 6, 779–781.

Поступила 18.05.1991

ГОДИШНИК

НА

СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА
И ИНФОРМАТИКА

КНИГА 2 — МЕХАНИКА

Том 84
1990

ANNUAIRE

DE

L'UNIVERSITE DE SOFIA
"ST. KLIMENT OHRIDSKI".

FACULTE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

LIVRE 2 — MÉCANIQUE

Tome 84
1990

РЕДАКЦИОННА КОЛЕГИЯ

проф. *ЛЮБОМИР ЛИЛОВ* (главен редактор), проф. *ЗАПРЯН ЗАПРЯНОВ*,
проф. *КОНСТАНТИН МАРКОВ*, доц. *ИВАН МИХОВСКИ*,
гл. ас. *СОНЯ ДЕНЕВА* (секретар)

NUMERICAL INVESTIGATION OF THE BOUNDARY LAYER FLOW AROUND IMPULSIVELY MOVED CYLINDER

CHRISTO CHRISTOV, IVAN TZANKOV

Христо Христов, Иван Цанков. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ОКОЛО КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

В последние годы активно обсуждается вопрос об существовании гладкого решения уравнений нестационарного пограничного слоя. Расчётные результаты, полученные как в Лагранжевой постановке задачи, так и некоторыми полуаналитическими методами, указывают, что решение содержит особенность. Результаты, полученные в Эйлеровой постановке задачи, не согласуются с этим выводом. В настоящей работе проводится анализ этих результатов и предлагается новая расчетная схема, построенная при помощи метода переменных направлений. Она является безусловно устойчивой, в том числе и в область возвратных токов. Полученные результаты очень хорошо согласуются количественно с результатами в Лагранжевой постановке и недвусмысленно показывают, что решение действительно содержит особенность для $t \approx 3,0$ в безразмерных переменных.

Christo Christov, Ivan Tzankov. NUMERICAL INVESTIGATION OF THE BOUNDARY LAYER FLOW AROUND IMPULSIVELY MOVED CYLINDER

In recent years the problem of existing of a smooth solution to the unsteady boundary layer equations with unfavorable (adverse) pressure gradient is frequently discussed in the literature. The numerical results for schemes with Lagrangian variables as well as some semi-analytical studies strongly suggest that a singularity evolves after a finite time. The controversy, however, is fueled by the maverick results, obtained by means of Eulerian difference schemes. In the present paper a critical discussion on these approaches is given and for solving the problem a new Eulerian implicit difference scheme of splitting type is developed, which is unconditionally stable in the whole region of flow, including the zone of reversed flow. The results obtained here compare quantitatively very well with the results of Lagrangian numerical schemes and unequivocally indicate that a singularity evolves after a finite time (approximately $t \approx 3.0$ in dimensionless units).

INTRODUCTION

After Prandtl has introduced it, the boundary layer approximation turns out to be one of the most successful ideas of the modern fluid mechanics because of its simplicity and practical significance. The main advantage of the stationary boundary layer equations is that they are of parabolic type with the longitudinal coordinate playing role of a "temporal" coordinate. The latter allows one to employ marching numerical procedures that are significantly less expensive in comparison with the methods for solving elliptic equations with equivalent number of spatial coordinates.

The very nature of this advantage, however, erects formidable obstacles on the way of applying the boundary layer approximation to steady separated flows, since in them the longitudinal velocity component may become negative, rendering thus the governing equations to anti-parabolic ones that are explosively unstable. That is the reason why the separated boundary layers are not exhaustively studied numerically.

Unfortunately, the change of type is not the only deficiency of the boundary layer equations when modelling the separated flows. The occurrence of a singularity of the solution at the position of separation was long ago pointed out by Goldstein [1] and since that a unified point of view has not been reached on the question whether the boundary layer equations are at all applicable to treating reversed or separated flows with a prescribed potential flow.

It is important to remove the first cause for deficiency in order to concentrate on the mechanism of developing the singularity. Guided by the notion that the change of type of equations is not crucial when unsteady boundary layers are treated numerically, we choose to investigate the unsteady separation of the boundary layer at a circular cylinder started from a rest.

The unsteady flow past an impulsively moved cylinder is one of the classical problems of dynamics of viscous fluids due to its practical importance, amenability to accurate experimental studies combined with relative simplicity, allowing one to employ various theoretical approaches, (e.g. numerical integration of Navier-Stokes equations; method of matching asymptotic expansions; power series expansions with respect to time and/or harmonic series expansions). That is the reason why the said flow serves as a test example for checking both the quality and performance of numerical schemes and the correctness of the different asymptotic approximations. For instance, Ta Phuoc Loc [2] and Ta Phuoc Loc & Bouard [3], in order to check the accuracy of their schemes for the numerical solution of Navier-Stokes equations, have compared the results obtained with the experimental ones of Bouard & Coutanceau [4]. In its turn the mentioned numerical results fueled the prolonged discussion on the existence of a smooth solution to the boundary layer equations with unfavorable pressure gradient for arbitrary times. As far as the present paper deals with the last problem, we choose the same flow around impulsively moved cylinder. One is referred to Telionis [5], Elliott et al. [6] and Cousteix [7] for comprehensive review on the subject.

One of the first numerical results concerned with developing the boundary layer around an impulsively moved cylinder is published by Collins & Dennis [8]. They have succeeded to find a smooth solution up to dimensionless times as high as $t = 2.5$ (the mentioned value is rendered in concord with the employed in the present paper dimensionless variables). Telionis & Tsahalis [9], however, have found a smooth solution only up to $t = 1.3$. According to them, downstream the point with zero skin friction a singularity of the type of Goldstein [1] is present. However, the more close look at the cited papers has allowed Riley [10] to conclude that the question of how the singularity evolves remains unresolved. Later on Cebeci [11] has proposed another numerical technique and has found a smooth solution for times up to $t = 2.8$. He stated that the thickening of the boundary layer decreases the numerical efficiency of the difference schemes employed and that is the only reason why higher times could not be reached and the singularity of Goldstein's type do not take place at all. On this base he has concluded that the solution exists for each finite time interval. The latter contributed to continuing the controversy over the existence of a singularity of solution of boundary layer equations.

The first accurate in numerical sense investigation on the existence of solution of the boundary layer equations up to the time of the singularity is performed by van Dommelen & Shen [12]. They use a Lagrangian scheme and — unlike all other above cited works — verify it on a set of different grid sizes, suggesting that at a certain moment of time a singularity is born that is not of the type of Goldstein. For instance, the longitudinal distribution of a tangential stress is not singular. The singular behaviour of the solution in their numerical experiments has shown itself up through a sharp increase of the amplitude of the longitudinal derivative of velocity and of displacement thickness when $t \rightarrow 3$. The same authors (van Dommelen & Shen [13]) propose also an asymptotic expansion for $t \rightarrow 3$, which compares very well with the numerical results.

The results of van Dommelen and Shen are verified to a certain extent by other authors also: Cebeci [14] repeats his computations and finds that the results are in good comparison with those of van Dommelen & Shen [12] up to $t = 2.75$. He believes that the treatment of such thick boundary layers is almost at the limit of the numerical capabilities. Although only qualitatively, the results of Wang [15] support the notion of developing singularity. According to him the latter is born at $t = 2.8$. Following the double-series-expansion approach of Collins & Dennis [8], Cowley [16] and Ingham [17] verify unequivocally both the numerical and the asymptotic results of van Dommelen & Shen for $t \rightarrow 3$.

The recent paper of Cebeci [18] has managed to give support to the opposite point of view, criticizing the previous works (including those of the same author) in the sense that in them the Courant-Friedrichs-Lewy condition has not properly been satisfied. Employing new numerical procedure that apparently encounter for that condition, Cebeci [18] obtains a smooth solution up to $t = 3.1$ and the computations are interrupted because of the intolerable amount of the spent computational time.

Because of their queer nature the conclusions of Cebeci [18] should have spurred a wide discussion but in fact they have not. After Cebeci [18] the problem is treated

by Henkes & Veldman [19] and Riley & Vasanta [20] but mainly from the point of view of the viscous-inviscid interaction. Concerning the limiting case of noninteracting boundary layer, Henkes & Veldman [19] show that their numerical scheme gives results close to those of van Dommelen & Shen [12] but it becomes unstable for $t \approx 2.8$. In the sense of stability the forthcoming results of Riley & Vasanta [20] are better. They employ stream function — vorticity formalism, but as it is stressed out in their work, the scheme does require considerable amount of computational time because the iterations (sometimes about 100) are introduced everywhere. Although on the expense of computational efficiency they obtain reliable results that are in very good agreement with those of van Dommelen & Shen [12] and Cowley [16].

So, by means of significantly different numerical methods (Lagrangian and Fourier series) van Dommelen & Shen [12], Ingham [17] and Cowley [16] have indicated the fact that a singularity develops with time for the solution of unsteady boundary layer equations. On the other hand, the results of Telonis & Tsalhis [9], Cebeci [11, 14, 18] and Wang [15], obtained by means of Eulerian difference schemes, are not in concert neither among themselves nor with the results of the previous group of works. They do not clearly answer the question of whether does singularity exist or not.

In the present paper one more such scheme is proposed and the respective numerical algorithm, implementing it, is developed. It is an implicit splitting-type scheme, which is unconditionally stable. All mandatory measures for securing a good approximation are taken, e.g. non-uniform mesh spacings in normal direction. A number of calculations with different magnitude of the longitudinal spacing are conducted in order to reveal the performance of the scheme in the vicinity of the separation point. The results obtained with the proposed robust Eulerian difference scheme are in good quantitative comparison with those of the schemes of the first group research works [12, 16, 17].

1. POSING THE PROBLEM

Consider the two dimensional viscous incompressible flow around a circular cylinder. Let U be the velocity of the flow at infinity, L — the radius of the cylinder, and ν — the viscosity of the fluid. The natural way to render the velocities, spatial coordinates and time dimensionless is to scale them by U , L and L/U , respectively. Here is to be mentioned, however, that another set of scales, namely $2U$, L , $L/2U$, is also currently used [12, 16, 18]. For the sake of unification of the notations the last set shall be used in the present paper. For the normal coordinate y and the normal component of velocity v are chosen the scale factors $L\sqrt{Re}$ and $2U\sqrt{Re}$, respectively. Here $Re = 2UL/\nu$ is the Reynolds number. Finally, the governing equations in terms of dimensionless variables take the form:

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U_e}{\partial t} + U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

where u and U_e are the longitudinal components of velocity in the boundary layer and in the ideal flow, respectively.

Eqs (1), (2) are coupled with the boundary and the initial conditions. The boundary conditions at cylinder surface read:

$$(3) \quad u = v = 0 \quad \text{for } y = 0,$$

and at the outer edge of the boundary layer

$$(4) \quad u \rightarrow U_e(t, x) \quad \text{for } y \rightarrow \infty.$$

The initial condition, corresponding to an impulsively moved cylinder, is:

$$(5) \quad u = 0 \quad \text{for } y = 0, \quad u = U_e \quad \text{for } y > 0.$$

The equation of the unsteady boundary layer has two "marching" coordinates — t and x , and requires therefore "initial" conditions also with respect to x . For this reason alongside with (5) one needs also an "initial" (in fact a boundary) condition with respect to x . The zones of influence of the initial conditions must cover the entire region under consideration (see, e.g. [5]). When no any separation or/and reversion is present, the problem is fully defined by the conditions at the leading-end point. When the flow reverses at the rear-end point, one needs an "initial" x -condition at that point. In the case under consideration the needed condition is a corollary of the symmetry. In terms of the adopted notations it reads:

$$(6) \quad u \equiv 0 \quad \text{for } x = 0, \pi.$$

2. COORDINATE TRANSFORMATION

The most important from numerical point of view feature of the problem under consideration is the asymptotic boundary condition (4) because for the transverse coordinate y one must consider only a finite interval at whose right (upper) end not only the condition (4) is satisfied, but also the derivative of velocity has to vanish. In fact the boundary layer problem is an inverse one, in which the thickness of boundary layer is defined implicitly from the "additional" condition on derivative. As a result the numerical investigation of boundary layer flow is susceptible to the way in which the thickness is calculated. Additional difficulties are created by the significantly non-uniform behaviour of the thickness as a function of the longitudinal coordinate. For instance, in the vicinity of the leading-end point the layer is thin enough, while around the rear-end point it changes sharply spatially and grows continuously with time [21, 22].

In the earlier numerical works the solution to the boundary layer equations is sought in a prior chosen large enough region in the plane (x, y) and the calculations are conducted only until the moment, in which the boundary layer grows beyond the frame of that region [11]. In certain algorithms it is possible to enlarge deliberately

the computational domain at a certain moment, adding new grid points [9], even though the computations are limited in time.

The problem of adjusting the computational boundaries remains one of the crucial ones in the numerical treatment of boundary layer flows. For this reason a number of different ideas have been employed in the recent works. For instance, Cebeci [18] introduces a scaled normal coordinate $\eta = y/H$, where the quantity H is defined as follows:

$$(7) \quad t \leq 1, H \sim t^{1/2}; \quad t \geq 1, H \sim \exp(t).$$

The urge to transform the computational domain in such a manner as to force the region in consideration in terms of original coordinates to follow the growth of the boundary layer thickness with time in the vicinity of the rear-end point, is obvious. At that time, however, in the subregion, where no separation is present, the thickness grows immeasurably slower. As a result the number of informative grid points in normal direction, according to (7), decreases with time, which worsens significantly the approximation. In order to overcome that difficulty the quantity H has to be not only a function of the time, but also of the longitudinal coordinate, i.e. H must virtually be proportional to the boundary layer thickness.

As it has been mentioned above, the behaviour of the velocity in the boundary layer is asymptotic and hence the thickness is an artificially introduced quantity, needed only for the purposes of numerical treatment. For that reason it can be defined quite arbitrarily. One of the ways to do that is to calculate it from the inverse of the normal gradient of the longitudinal component at $\eta = 1$. However, our experience in that direction turned out to be negative and we were faced with growing oscillations of the solution despite the absolutely stable fully implicit scheme, employed for calculating the velocity component. This setback should not be surprising since the numerical differentiation is a notorious incorrect operation which, as a rule, increases the truncation error in order of magnitude. Moreover, in the boundary layer case the numerically evaluated derivative is very close to zero, i.e. the errors, introduced by the numerical differentiation, are of couples of order of magnitude greater than the sought value. Stability of algorithm has been attained only when the function $H(t, x)$ was set proportional to the displacement thickness:

$$(8) \quad \delta(t, x) = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy.$$

The typical values of the coefficient of proportionality are from the interval [6, 8], which secures the asymptotic behaviour at $\eta \rightarrow 1$. Here is to be mentioned that in the frame of the present numerical scheme it turns out to be fully enough for the stability to take the magnitude of δ from the previous time step.

By employing a scaled normal coordinate η/H eq. (2) is recast in the form:

$$(9) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{H} \left(v - \frac{\partial H}{\partial t} \eta - \frac{\partial H}{\partial x} \eta u \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial U_e}{\partial t} + U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

and after introducing a new dependent variable instead of the normal component of velocity

$$(10) \quad w = \frac{1}{H} \left(v - \frac{\partial H}{\partial t} \eta - \frac{\partial H}{\partial x} \eta u \right),$$

it adopts its final form

$$(11) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial U_e}{\partial t} + U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

In its turn the equation of continuity (1) transforms into an equation for the new dependent variable

$$(12) \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = -\frac{1}{H} \left[\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(Hu)}{\partial x} \right].$$

Boundary conditions (3), (4) take the form:

$$(13) \quad u = w = 0 \quad \text{for } \eta = 0, \quad u = U_e(t, x) \quad \text{for } \eta = 1,$$

and the initial condition (5) recasts as follows:

$$(14) \quad \eta = 0, u = 0; \quad \eta > 0, u = U_e; \quad H(t = 0) = \text{const.}$$

The boundary conditions with respect to the longitudinal coordinate (6) are left in their original form.

3. DIFFERENCE SCHEME

To device an unconditionally stable difference scheme for a numerical solving of boundary layer equations when the sign of longitudinal component of velocity is positive, is not a problem at all. A number of difference approximations to that problem are known. As a rule they are descendants either of Crank-Nicolson scheme or of Keller's "box"-method [23, 24]. The both mentioned numerical approaches are well documented in the literature (see, e.g. [5]). After a discretization with respect to the temporal coordinate the equations are recast into a quasi-steady form and then solved numerically, marching in longitudinal coordinate x . The absolute stability of the schemes is guaranteed by the fact that the longitudinal component of velocity does not change its sign.

The situation changes dramatically when a reversing zone is present, where the disturbances are convected in the opposite to the main flow direction. Then, in order to acknowledge correctly the convection in the difference scheme, one has to consider also the value of velocity in the downstream vicinity of the point in which the equations are approximated. Naturally, in the said case the marching methods for the steady equations become highly unstable and only the unsteady equation remains correct. One of the frequently used approximations is the so-called "zig-zag" scheme recently employed, among other authors, by Cebeci [14] and Wang [15]. The difference approximation of the "zig-zag" scheme on the regular mesh

$$(15) \quad \begin{cases} x_0 = 0, x_i = x_{i-1} + h & (i = 1, 2, \dots, I) \\ \eta_0 = 0, \eta_i = \eta_{i-1} + r & (i = 1, 2, \dots, J) \\ t^0 = 0, t^n = t^{n-1} + \tau & (i = 1, 2, \dots, N) \end{cases}$$

has the form

$$(16) \quad \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_i^n - u_{i-1}^n + u_i^{n-1} - u_{i-1}^{n-1}}{2h}.$$

It can be shown that the well known condition of Courant–Friedrichs–Lewy is not automatically satisfied for the above approximation, especially in the case when the characteristic direction s of the operator

$$(17) \quad \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}$$

coincides with the line s_1 , as shown in Fig. 1. In other words, the algorithm is stable only when the computational region of dependence contains the actual region of dependence, which imposes the following limitation on the time increment:

$$(18) \quad \tau < -h/u \quad \text{for } u < 0,$$

i.e. the scheme is conditionally stable.

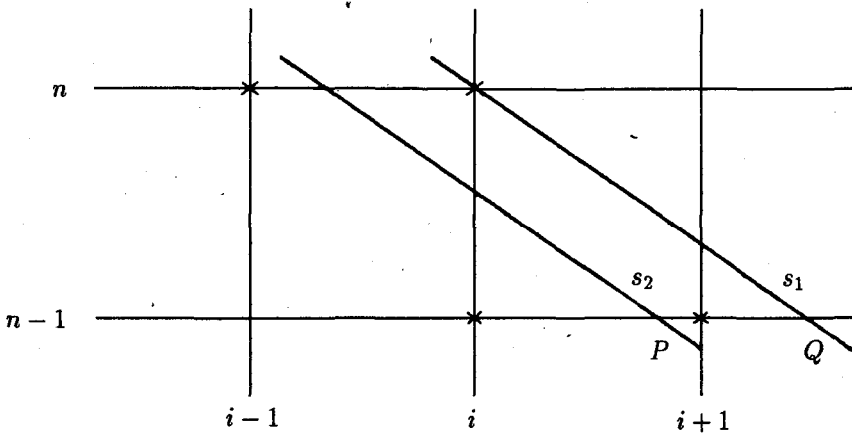


Fig. 1. The points taking part in "zig-zag" approximation — x , and the points included in characteristics scheme — s_1, s_2

A comprehensive survey on the currently used approximations in the reversing zone is performed by Telionis [5]. As an alternative to the "zig-zag" scheme he points out the scheme of Keller [25], originally implemented by Cebeci [18]. According to it the derivatives with respect to t and x are replaced by the single Lagrangian derivative with respect to the characteristic direction s . Then

$$(19) \quad \frac{d}{dt} + u \frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{dt} \Big|_{s=\text{const}}$$

and when s coincides with s_1 (Fig. 1) one has

$$(20) \quad \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \approx \frac{u_i^n - u_e^{n-1}}{\tau}.$$

Unlike the "zig-zag" approximation the Courant-Friedrichs-Lewy condition is satisfied here and the scheme is stable. As far as s_1 is a characteristic direction then $x_i - x_Q = \tau u$ and therefore:

$$(21) \quad \begin{aligned} \frac{u_i^n - u_Q^{n-1}}{\tau} &= \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\tau} + \frac{u_i^{n-1} - u_Q^{n-1}}{\tau} \\ &= \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\tau} + u \frac{u_i^{n-1} - u_Q^{n-1}}{x_i - x_Q}. \end{aligned}$$

Eq. (21) shows that the approximation is rather close to the "zig-zag" one if the latter is taken with a local longitudinal spacing, equal to $(x_i - x_Q)$. To have, however, the same spatial approximation one needs $|x_i - x_Q| < h$, i.e. the approximation (20) is not to be taken along the characteristic direction s_1 , but rather along s_2 (Fig. 1). The latter imposes the same limitations on the time increment as in the "zig-zag" scheme.

The conclusion of the above review on the numerical schemes for solving the unsteady boundary layer equations is that for the separated boundary layer flows an absolutely stable fully implicit difference scheme has not yet been used (cf. also reviews [5, 7]). Perhaps this has happened because of the natural tendency to use numerical procedures for the unsteady problems that are straightforward generalizations of the respective ones for the steady problem. In our opinion, however, the two problems are rather unlike and the possibility to solve them with similar numerical schemes is to be viewed as an exception, not as a rule.

In the present work we make use of the method of fractional steps, namely the scheme of Douglas & Rachford [26] (cf. also [27]). Of course, one can use also the ADI (alternating directions implicit) scheme, which is of second order of approximation with respect to time, but we prefer the former scheme because of its flexibility: one can have either a fully implicit scheme though of first order of approximation but with a certain margin of stability or a scheme of second order of approximation which is rigorously stable only in the linearized case (see, e.g. [28]). In the present paper, however, only the first order scheme with respect to time is used.

Let us denote

$$(22) \quad \mathbf{A} = -u \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{B} = -w \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \quad f = \frac{\partial U_e}{\partial t} + U_e \frac{\partial U_e}{\partial x}.$$

Consider the following difference scheme of splitting type:

$$(23) \quad \frac{\bar{u} - u^{n-1}}{\tau} = A\bar{u} + Bu^{n-1} + f_i^n,$$

$$(24) \quad \frac{u^n - \bar{u}}{\tau} = B(u^n - \bar{u}),$$

where A and B stand for the difference approximations of the operators \mathbf{A} and \mathbf{B} , respectively.

The approximation of the scheme with respect to time can be assessed excluding the half-time-step variable \bar{u} (cf. [27]), namely

$$(25) \quad (E - \tau A)(E - \tau B)u^n = (E + \tau B)u^{n-1} - (E - \tau A)\tau B u^{n-1} + f_i^n,$$

which follows from:

$$(26) \quad (E - \tau A)(E - \tau B) \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau} = (A + B)u^{n-1}.$$

It is easily seen now that the scheme possesses the so-called "full approximation" [27], i.e. when $u^{n-1} \rightarrow u^n$, it gives to the steady equation of boundary layer an approximation that is independent of the magnitude τ of time increment. The latter is of crucial importance for an application to the stationary boundary layer flows. Here is to be mentioned that not every scheme of splitting type possesses the last property [27]. The scheme is implicit and unconditionally stable if the coefficients in the operators A and B are "frozen" and do not depend on the sought functions. The differential operator \mathbf{A} is oblique and \mathbf{B} — negatively definite (see the definitions in (22)), i.e.:

$$(27) \quad (\varphi, \mathbf{A}\varphi) = 0, \quad (\varphi, \mathbf{B}\varphi) \leq -\gamma|\varphi|.$$

Then one has $\|E - \tau\mathbf{A}\| = 1$, $\|E - \tau\mathbf{B}\| \geq 1$, and therefore

$$\left\| [(E - \tau\mathbf{A})(E - \tau\mathbf{B})]^{-1} \right\| \leq 1,$$

which for the differential form of the splitting type scheme is a sufficient condition for stability. The said property is retained also for the difference form provided that after a proper linearization a conservative differencing for the set functions, that secures the properties (27), is employed. All this means that the scheme is stable. The simplest way for linearization of \mathbf{A} and \mathbf{B} is chosen: thinking of the longitudinal component of velocity as a known from the previous time step quantity. Then the first half-time step (the eq. (23)) adopts the form:

$$(28) \quad \frac{\bar{u}_{i,j} - u_{i,j}^{n-1}}{\tau} + u_{i,j}^{n-1} \frac{\delta \bar{u}}{\delta x} \Big|_{i,j} = \Phi_{i,j},$$

where $\Phi_{i,j}$ is a known set function and $\delta \bar{u} / \delta x$ stands for the difference approximation of the first derivative. Here is to be pointed out that for eq. (28) a fully implicit approximation can be devised that is independent of the sign of the longitudinal component of velocity. Hence, the dependence region is limited only by the region of flow. So that if the boundary layer incorporates a reversing zone, the latter is to be entirely imbedded into the computational domain.

It is well-known now that for equations of the type of (28) unconditionally stable difference schemes can be constructed either with first or with second order of approximation, provided that the respective conservative differencing is applied for $\delta / \delta x$ (see for instance [28], p. 128–129, [29]). The first order schemes employ, as a rule, upwind differences and exhibit considerable scheme viscosity (artificial diffusiveness). The latter is not necessarily undesirable property of a scheme because it helps to damp also non-physical oscillations that could be amplified by

the nonlinear nature of the problem under consideration. So that it is preferable to start calculations (as it is done in the paper of Tzankov & Christov [30]) with a first order scheme and only after the limitations of the numerical algorithm are revealed and the regions for parameters, in which stable calculations are possible, are found, one should repeat the computations with the second order scheme.

Following this general notion in the present paper, two different schemes are proposed and the following difference approximations are employed: for the first order scheme — the upwind differences

$$(29) \quad \frac{\delta \bar{u}}{\delta x} = \begin{cases} \frac{\bar{u}_{i,j} - \bar{u}_{i-1,j}}{h}, & u_{i,j}^{n-1} \geq 0 \\ \frac{\bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{i,j}}{h}, & u_{i,j}^{n-1} < 0 \end{cases}$$

and for the second order — the central differences:

$$(30) \quad \frac{\delta \bar{u}}{\delta x} = \frac{\bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{i-1,j}}{2h}$$

Concerning the three-point second order scheme (30) for the first derivative, the following features should be mentioned:

1. A Gaussian elimination with pivoting is to be applied when solving the resulting three-diagonal algebraic system, since the main diagonal is dominating only if the spacing and the time increment are related in a manner as to satisfy the condition $\tau|u|/h < 1$.

2. The three-point approximation requires two boundary conditions. In the case of flow around blunt bodies (including the case of cylinder moved from a rest) the second condition stems from the symmetry condition at the rear end stagnation point. In those cases when a second boundary condition can not be deduced from physical considerations (e.g. for bodies with sharp rear ends) one has to employ the two-point difference approximation in the last point in longitudinal direction.

In approximating the operators from the second half-time step one can employ either the "box"-method [24] or the central difference scheme. The crucial differences between them become transparent when a non-uniform mesh is employed, namely

$$(31) \quad \eta_0 = 0, \quad \eta_j = \eta_{j-1} + r_j \quad (j = 1, 2, \dots, J).$$

In this case the "box"-method yields a scheme of second order of approximation — $O[\max(r_j^2)]$. At the time same the difference scheme results into a vector three-diagonal system.

In the present paper a central difference scheme is used and the derivatives are approximated as follows:

$$(32) \quad \frac{\delta u}{\delta \eta} = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{r_j + r_{j-1}},$$

$$(33) \quad \frac{\delta^2 u}{\delta \eta^2} = \frac{1}{r_j + r_{j-1}} \left[\frac{u_{j+1} - u_j}{r_j} - \frac{u_j - u_{j-1}}{r_{j-1}} \right].$$

In this case the order of the approximation is $O[\max(r_j, r_{j-1}, r_j - r_{j-1})]$. It is obvious that the variation of spacing r of mesh (31) is not to be very strong. That is a limitation, of course, but it is paid off by the fact that one is faced now with a plain three-diagonal system for an unknown scalar.

For the continuity equation (12) we employ the following two-point in normal direction and three-point in longitudinal direction scheme with second order of approximation with respect to both spatial variables:

$$(34) \quad \frac{w_{i,j+1}^n - w_{i,j}^n}{r_j} = -\frac{1}{H_i^n} \left[\frac{H_i^n - H_i^{n-1}}{\tau} + \frac{u_{i+1,j+1}^n H_{i+1}^n - u_{i-1,j+1}^n H_{i-1}^n}{4h} + \frac{u_{i+1,j}^n H_{i+1}^n - u_{i-1,j}^n H_{i-1}^n}{4h} \right].$$

4. GRID PATTERN

The adequate non-uniform distribution of the grid points in normal direction is of crucial importance for the performance of the numerical algorithm. The grid pattern is to be consistent with the intrinsic features of the problem, such as the presence of non-uniform gradients of the sought variables. The best way for that is to devise a rule for governing adaptively the mesh gradientwise (see for instance [31]) during the calculations (for comprehensive survey see [32, 33]). On this stage, however, we are not prepared for such a general approach to the mesh problem. Hence we rely on a particular analytical law for the grid distribution in normal direction, which is selected on the base of general considerations on the behaviour of variables in an order of approximation in longitudinal direction according to formula (30). Using this approach, the calculations remain unequivocally stable and monotonic.

The second group of our numerical experiments has been aimed at assessing the influence of the normalwise grid distribution. In them, in order to minimize the computational time, a rougher spacing in longitudinal direction with 73 points ($h = \frac{2\pi}{72} = 2.5^\circ$) and relatively large time increment ($\tau = 0.04$) were used. In normal direction we took consecutively 26, 51 and 101 mesh points and set the grid parameter ω to 100. The comparisons, cited below in Table 1, are for the displacement thickness which is one of the most spoiled quantities for the problem under consideration, especially in the interval $[100^\circ \leq x \leq 125^\circ]$, where for larger times a non-monotonic behaviour develops. It is seen that the results, obtained with 51 and 101 points in normal direction, differ less than by 0.5%. This accuracy is acceptable and hence the chief portion of the calculations to be mentioned below are conducted with 51 points. For the sake of comparison it has to be mentioned that Cebeci [11, 18] employs meshes with 301 and 161 points, respectively. The attained in the present work good accuracy on rougher meshes we attribute to the adequate choice of the non-uniform grid pattern.

Table 1

Displacement thickness — $t = 2.8$, $\tau = 0.04$, $I = 73$

θ (deg)	105	110	115	120	125	130	135
$J = 101$	2.075	3.001	7.204	9.547	9.094	9.198	9.374
$J = 51$	2.077	3.012	7.237	9.590	9.133	9.238	9.412
$J = 26$	2.087	3.055	7.575	9.752	9.378	9.443	9.547

The third main set of experiments are those that help to reveal the dependence of the results on the particular values of the mesh parameters τ and h (the influence of the normal grid pattern has already been clarified in the above).

An interesting observation is that the flow in the immediate vicinity of the wall depends insignificantly on the said parameters of the difference scheme. This conclusion has been supported by the obtained with different mesh size results for the skin friction coefficient, presented in Table 2 for the critical moment of time $t = 2.8$. It is well seen that those results differ less than by 0.5%. The latter allows us to present separated boundary layer.

Table 2

Friction coefficient — $t = 2.8$, $J = 51$

θ (deg)	30	60	90	120	150
$\tau = 0.04$, $I = 289$	0.5779	0.7966	0.4783	-0.5070	-0.4871
$\tau = 0.02$, $I = 73$	0.5778	0.7964	0.4776	-0.5087	-0.4891

In a separated boundary layer two regions are formed [21, 34]. The first one is adjacent to the rigid wall and evolves slow in time. In that region the longitudinal component of velocity sharply falls from zero to its minimal (the largest negative) value and the velocity gradient is considerable there. The thickening of the boundary layer, however, is due chiefly to the development of the second (outer) region, in which the longitudinal component raises to its asymptotic value, defined from the ideal flow. The gradient there adopts low and moderate magnitudes. So the transverse distribution of the gradients in the separated laminar boundary layer resembles, in a sense, the structure in a turbulent boundary layer with the first region playing the role of a viscous sublayer.

Being guided by the above analogy, we take the following law for the distribution of mesh in normal direction:

$$(35) \quad \eta_j = \frac{1}{\omega} \left(\frac{j-1}{J-1} + 0.4 \right) \left[\exp \left(\frac{j-1}{J-1} \ln \frac{\omega + 1.4}{1.4} \right) - 1 \right],$$

where ω is a parameter responsible for the deviation of grid pattern from the uniform shape. Here is to be reminded the requirement for second order approximation of derivatives on non-uniform mesh stemming from the formula for the accuracy $O[\max(r_j \cdot r_{j-1}, r_j - r_{j-1})]$. A uniform approximation will be present if $\max(r_j - r_{j-1})$ does not exceed $\max(r_j r_{j-1})$. Values of ω , for which $\max(r_j r_{j-1}) \approx \max(r_j - r_{j-1})$, are enclosed in the interval [50, 100].

5. NUMERICAL TESTS AND VERIFICATIONS

In order to assess the approximation of the scheme proposed and the performance of the algorithm as well, a number of numerical experiments have been conducted. We began with the upwind differences in longitudinal direction according to formula (29). The time evolution of the computed quantities was stable and no oscillations were present. That encouraged us to increase the further results for the local skin friction coefficient without mentioning explicitly the particular size of the mesh on which those results are obtained.

Unlike the delighting results for the skin friction coefficient, the dependence of the displacement thickness and displacement velocity ($v_\infty = \partial(\delta^* U_e)/\partial x$) on the mesh parameters has turned out to be significant. A quantitative feeling for the dependence gives Fig. 2a, b, where the mentioned functions of longitudinal coordinate are plotted in the most volatile interval [$110^\circ \leq x \leq 135^\circ$], for sufficiently

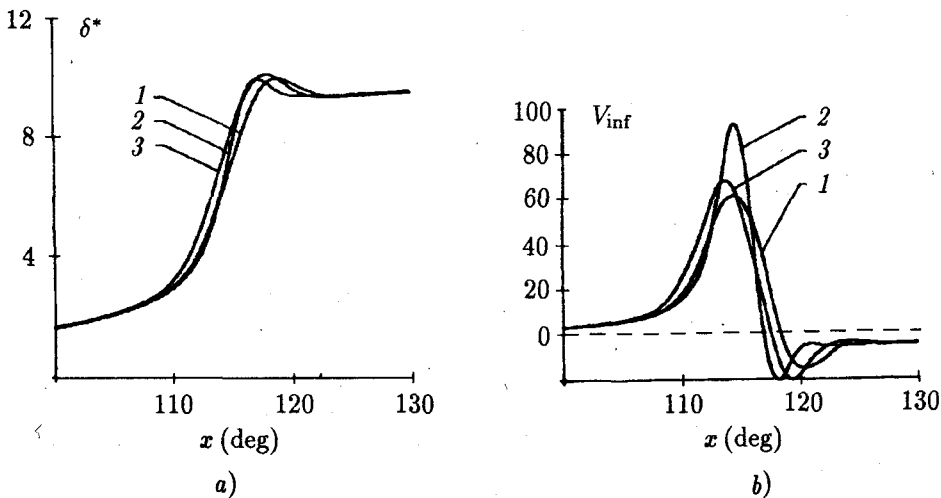


Fig. 2. Susceptibility to the specific values of longitudinal spacing and time increment of the computed characteristics:

1 — $h = 2.5^\circ$, $\tau = 0.04$;

2 — $h = 1.25^\circ$, $\tau = 0.04$;

3 — $h = 2.5^\circ$, $\tau = 0.02$.

a) displacement thickness of boundary layer;

b) displacement velocity

large time $t = 2.8$. It is seen that the values in the immediate vicinity of the detachment point are especially susceptible to the mesh parameters at the time when the rest of the values are virtually not affected from the change of the mesh parameters. The value of time increment τ affects only the longitudinal localization of the displacement thickness maximum (cf. lines 1 and 3) without influencing the gradient of that quantity. Respectively, refining the longitudinal resolution (cf. curves 2 and 3) results into an increase of the thickness gradient. The magnitude of $\max \delta^*$ is predicted reasonably well in all cases and the curves for displacement

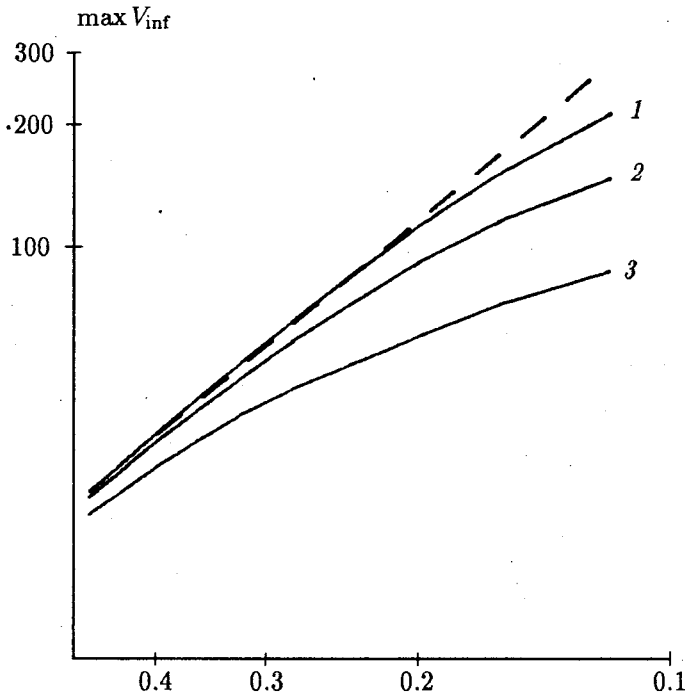


Fig. 3. Evolution of the displacement velocity when $t \rightarrow 3$:

----- — expected behaviour of the exact solution according to $\ln V_{\text{inf}} = -1.7414 \ln(3 - t) + 1.9597$;

1 — $h = 0.625^\circ$; 2 — $h = 1.25^\circ$; 3 — $h = 2.5^\circ$

thickness are close enough, which allows us to conclude that the proposed scheme is accurate enough. It is well seen that the present results are smooth, which is not the case with the results of Henkes & Veldman [19] for $t = 2.85$.

Similar conclusion about the correctness of the results obtained can be drawn from the calculated displacement velocity v_∞ . One should be reminded here that the said velocity is obtained by differentiation of the displacement thickness and hence the eventual differences are amplified.

Here are to be mentioned the measures taken for securing a good approximation of the displacement velocity. As far as the approximation with respect to the longitudinal coordinate x is of second order or even in some cases — of first order, the straightforward numerical differentiation of the displacement thickness with respect to x will result into decreasing the approximation to first or even zeroth order. In order not to lower the accuracy we use a third order spline interpolation for displacement thickness, which gives a second order approximation for the first derivative. Results, depicted in Fig. 2a, are obtained by means of the said spline interpolation.

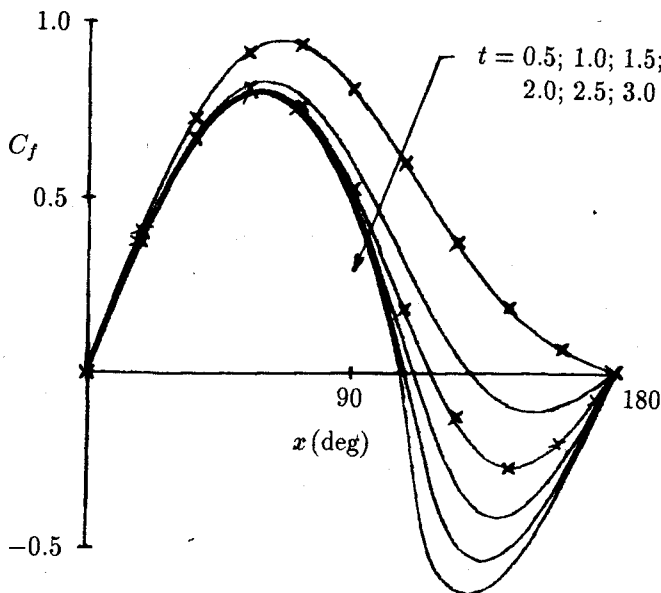


Fig. 4. Evolution of the local friction coefficient with time:
 x-x-x — asymptotic results of Bar-Lev & Yang (1975);
 — — present numerical results

6. RESULTS AND COMPARISONS

After the difference scheme and the algorithm has been properly verified we turn to investigating the separation itself. Our results show (cf. Fig. 2 a) that for $t \geq 2.5$ the displacement thickness δ^* grows fast and for approximately $t \approx 2.8$ a distinct local maximum is formed. These findings are in good agreement with the predicted by van Dommelen & Shen [13] behaviour of the solution.

As it has been already mentioned, the displacement velocity is more suited for quantitative assessment of the separation as it is more sensitive. According to van Dommelen & Shen [12, 13] for $t \rightarrow 3$, $\max(-\partial u / \partial x) \rightarrow \infty$ proportionally to $(3-t)^{-1.75}$. It can be shown that the displacement velocity is a proper indicator for that type of behaviour (cf. [16]), since it grows as $v_\infty \sim (3-t)^{-1.75}$. On the other hand, it is well-known that the value of v_∞ is a measure for the influence of the boundary layer on the outer potential flow. In the classical theory of boundary layers when no separation is expected, the displacement velocity behaves as $v_\infty \sim 0(Re^{-1/2})$. Therefore the above suggested behaviour of v_∞ speaks of singularity, whose occurrence dismantles the classical theory. For this reason the displacement velocity v_∞ turns out to be one of the most important characteristics of the boundary layer to be monitored. Fig. 2 b hints that in order to prove that $v_\infty \rightarrow \infty$ for $t \rightarrow t_s$, one needs a very fine longitudinal resolution of the mesh (very small h). It is instructive, therefore, to trace the variation of solution with

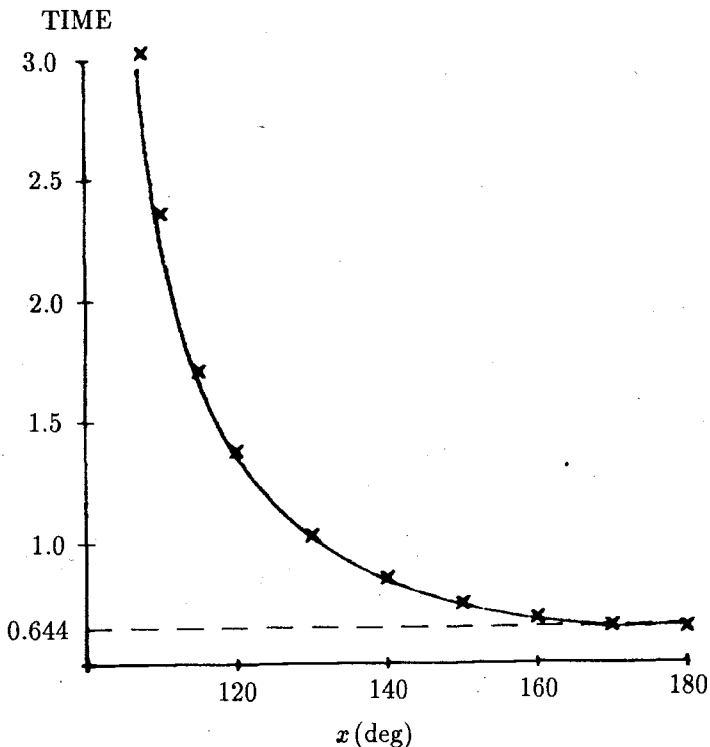


Fig. 5. Trajectory of the point of zero skin friction:
 * * * — asymptotic results of Bar-Lev & Yang (1975);
 — — present numerical results

decreasing the spacing h . In Fig. 3 the results are compiled for the maximal value of the displacement velocity, obtained on three different meshes with number of points in longitudinal direction 73 ($h = 2.5^\circ$), 145 ($h = 1.25^\circ$), 289 ($h = 0.625^\circ$), respectively. In the adopted in Fig. 3 logarithmic scales it is easily seen that the computed curve tends to approach a line when $h \rightarrow 0$. Our result for the value of the line's slope is 1.7414. The respective value of van Dommelen & Shen [13] is 1.75. Very close to it are also the results of Cowley [16] and Ingham [17].

Another important characteristic of the boundary layer flow, whose behaviour in the separation zone is instructive, is the local skin friction coefficient. Van Dommelen & Shen [13] state that this quantity exhibits regular behaviour when $t \rightarrow t_s$, and hence it can not be used as an indicator of occurrence of unsteady singularity. It is important to compare it to the results of other authors in order to have an additional verification of the performance of the algorithm. This is done in Fig. 4, where also the analytic results of Bar-Lev & Yang [35] are plotted. Like the numerical results of Van Dommelen & Shen [12], our results compare well with the analytical ones.

Following Blasius, most of the authors report data concerning the position of a point with zero skin friction on the wall as a function of time which characterizes

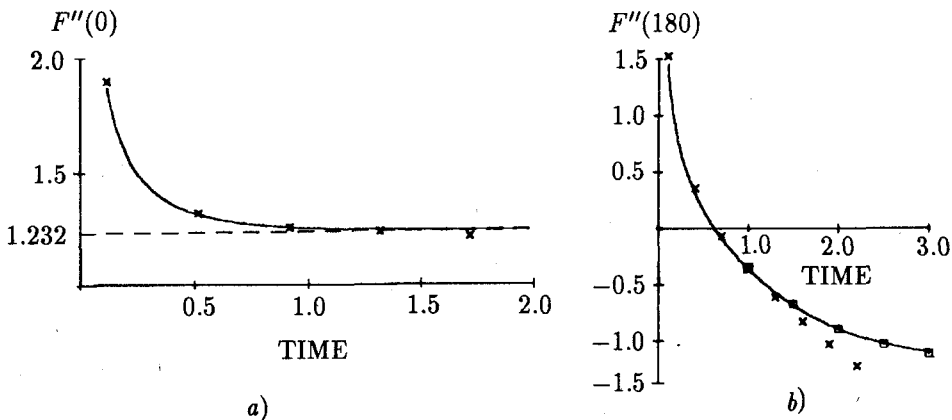


Fig. 6. The skin-friction coefficient rendered in terms of local similar variables:

- ××× — asymptotic results of Bar-Lev & Yang (1975);
- — numerical results of van Dommelen & Shen (1985);
- — present numerical results

a) leadingend point; b) rearend point rendered

adequately the evolution of the separation zone. It is believed now that the point of zero skin friction occurs initially for $t \approx 0.644$ ([8, 12, 16 etc.]). The present results (Fig. 5) are not only in very good agreement with that value but also with the asymptotic formula of Bar-Lev & Yang [35] for the entire time interval. Some slight deviations (less than 1°) are observed only for $t \approx 3$, where the conditions are very harsh for conducting numerical investigation. Here is to be mentioned that the same good agreement is reported by van Dommelen & Shen [12] for the computations with Lagrangian scheme.

In certain numerical schemes for investigating the boundary layer flow around blunt bodies the same similar variables and coordinates as in the asymptotic solutions are employed [11, 12, 14], which allows to use the similar solutions as initial or boundary conditions for the numerical scheme. In the present paper such an eclectic approach is avoided and this gives one more opportunity to check the accuracy of computations through comparing to the mentioned similar solutions. In Fig. 6 *a*, *b* are plotted the rendered in terms of the usual similar variables values of skin friction in the leading and rear end regions, respectively. In both cases the obtained here results are in good comparisons with those in [11, 12, 35]. In Fig. 6 *b* with special symbols are presented the numerical results of Cowley [16], Hommel [36] and van Dommelen & Shen [22] in a generalized form. The agreement is excellent, which once more supports the main notion of the present work that the difference schemes in Eulerian variables can bring the same results as those in Lagrangian variables, provided the scheme is devised properly.

Another important feature of the unsteady separation, observed by van Dommelen & Shen [13] and Ingham [17], is that the point of singularity of solution moves alongside the wall in the opposite direction of the main flow with a constant velocity. Our results are plotted in Fig. 7 and they lie virtually on a straight line,

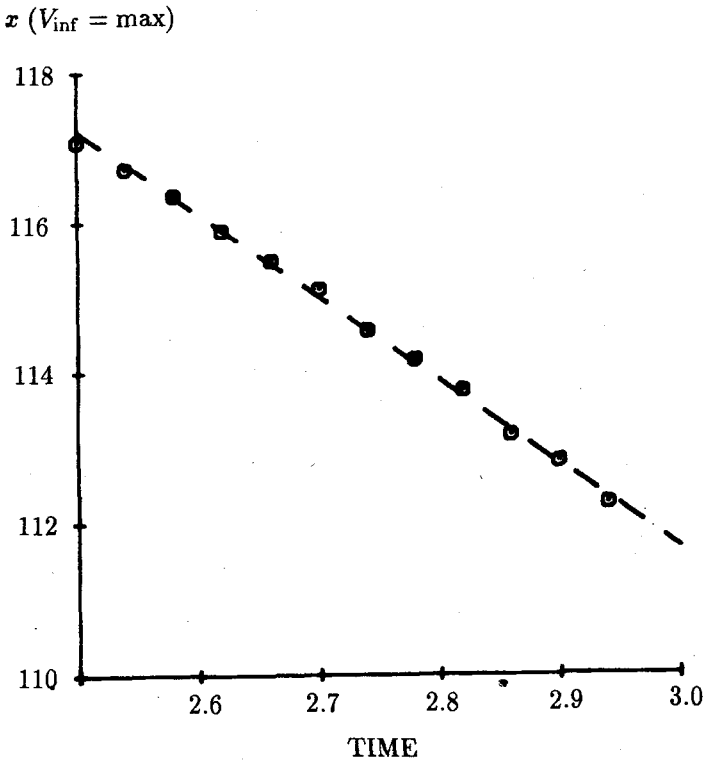


Fig. 7. Trajectory of the point of maximum displacement velocity:
 - - - - - the linear approximation $x = 145.06 - 11.135t$;
 ○-○-○- present numerical results

which for $t = 3$ gives $\theta \approx 111.6^\circ$. Let us note here that van Dommelen & Shen [13] report for the same t the value $\theta \approx 111^\circ$.

CONCLUDING REMARKS

In the present paper a fully implicit unconditionally stable Eulerian difference scheme for numerical investigation of unsteady boundary layers is developed, which performs equally well when a separation occurs. A number of numerical tests and verifications are conducted in order to outline the limits of application of the algorithm. Comparison with the other numerical results in Lagrangian variables and with asymptotic analytical solution is conducted. The agreement is good and the conclusion is that the observed until now discrepancy between the Lagrangian and the Eulerian schemes is not principal and the predictions of the latter can be brought closer to the former if implicit differencing is employed.

The results obtained support the findings of the authors, using Lagrangian schemes, that a singularity develops for finite times $t_s \approx 3$.

Different calculations of physical significance are presented graphically.

Acknowledgments. The authors thank Prof. Riley for making his paper available to us on the stage of galley proofs.

This work is partially supported by the Ministry of Education and Science of Bulgaria under Grant No 741.

REFERENCES

1. Goldstein, S. — *Q. J. Mech. Appl. Math.*, **1**, 1948, 43–69.
2. Ta Phuoc Loc. — *J. Fluid Mech.*, **100**, 1980, 111–128.
3. Ta Phuoc Loc, R. Bouard. — *J. Fluid Mech.*, **160**, 1985, 93–117.
4. Bouard, R., M. Coutanceau. — *J. Fluid Mech.*, **101**, 1980, 583–607.
5. Telionis, D. P. *Unsteady viscous flows*. Springer-Verlag, 1981, p. 408.
6. Elliot, J. W., S. J. Cowley, F. T. Smith. — *Gephys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **25**, 1983, 77–138.
7. Cousteix, J. — *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **18**, 1986, 173–196.
8. Collins, W. M., S. C. R. Dennis. — *Qart. J. Mech. Appl. Math.*, **26**, 1973, 53–75.
9. Telionis, D. P., D. T. Sahalis. — *Acta Astronautica*, **1**, 1974, 1487–1505.
10. Riley, N. — *SIAM Review*, **17**, 1975, 274–297.
11. Cebeci, T. — *J. Comput. Phys.*, **31**, 1979, 153–172.
12. van Dommelen, L. L., S. F. Shen. — *J. Comput. Phys.*, **38**, 1980, 125–140.
13. van Dommelen, L. L., S. F. Shen. — *Numerical and Physical Aspects of Aerodynamic Flows* (ed. T. Cebeci), Springer, 1982, 293–364.
14. Cebeci, T. — *Numerical and Physical Aspects of Aerodynamic Flows* (ed. T. Cebeci), Springer, 1982, 265–277.
15. Wang, K. C. — *Numerical and Physical Aspects of Aerodynamic Flows* (ed. T. Cebeci), Springer, 1982, 279–291.
16. Cowley, S. J. — *J. Fluid Mech.*, **135**, 1983, 389–405.
17. Ingham, D. B. — *J. Comput. Phys.*, **53**, 1984, 90–99.
18. Cebeci, T. — *J. Fluid Mech.*, **163**, 1986, 129–140.
19. Henkes, R. A. W. M., A. E. P. Veldman. — *J. Fluid Mech.*, **179**, 1987, 513–529.
20. Riley, N., R. Vasanta. — *J. Fluid Mech.*, **205**, 1989, 243–262.
21. Robins, A. J., J. A. Howarth. — *J. Fluid Mech.*, **56**, 1972, 161–172.
22. van Dommelen, L. L., S. F. Shen. — *J. Fluid Mech.*, **157**, 1985, 1–16.
23. Keller, H. B. — *SIAM J. Num. Anal.*, **6**, 1969, 8–30.
24. Keller, H. B. — *SIAM J. Num. Anal.*, **11**, 1974, 305–320.
25. Keller, H. B. — *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **10**, 1978, 417–433.
26. Douglas, J., H. H. Rachford. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, **82**, 1956, 2, 421–439.
27. Yanenko, N. N. *Method of fractional steps*. McGraw-Hills, 1971.
28. Roache, P. J. *Computational fluid dynamics*. Hermosa Publishers, 1972.
29. Marchuk, G. I. *Methods of Computational Mathematics*. Novosibirsk, Nauka — Siberian division, 1973.
30. Tzankov, I., C. Christov. — *Proc. of 15-th Jubilee session of the Scientific and Methodological Seminar on Ship Hydrodynamics*, Bulgarian Ship Hydrodynamics Center, Varna 6–11 Oct. 1986, v. 3, Paper No 21.
31. Christov, C. I. — *Numerical Grid Generation* (ed. J. F. Thompson), Elsevier, 1982, 885–894.
32. Thompson, J. F. — *AIAA J.*, **22**, 1984, 1505–1523.
33. Eiseman, P. — *ICASE Report*, No 87–57, 1987.
34. Proudman, I., K. Johnson. — *J. Fluid Mech.*, **12**, 1962, 161–168.
35. Bar-Lev, M., H. T. Yang. — *J. Fluid Mech.*, **72**, 1975, 625–647.
36. Hommel, M. J. — *J. Fluid Mech.*, **132**, 1985, 407–416.

Received 3.03.1991

A NOTE ON THE c^2 -TERM OF THE EFFECTIVE
CONDUCTIVITY FOR RANDOM DISPERSIONS

KONSTANTIN MARKOV, KERANKA ILIEVA

Константин Марков, Керанка Илиева. ЗАМЕЧАНИЕ О c^2 -ЧЛЕНЕ ЭФФЕКТИВНОЙ
ПРОВОДИМОСТИ СЛУЧАЙНОЙ ДИСПЕРСИИ СФЕР

Работа посвящена исследованию эффективной теплопроводности κ^* случайной разряженной суспензии сфер. Специальное внимание уделено c^2 -коэффициенту a_2 в разложении этой проводимости по степеням объемной концентрации сфер c . Пользуясь простыми соображениями показано, что a_2 представляется суммой постоянны и линейного функционала от радиальной функции распределения сфер. В равнинном случае (материал армированный волокнами) найден аналитический вид этого ядра и выведены некоторые простые оценки для него.

Konstantin Markov, Keranka Ilieva. A NOTE ON THE c^2 -TERM OF THE EFFECTIVE
CONDUCTIVITY FOR RANDOM DISPERSIONS

The paper is devoted to the study of the effective conductivity κ^* of a random dilute dispersion of spheres. A special attention is paid to the c^2 -coefficient a_2 in the expansion of κ^* in powers of the volume fraction c of the spheres. The functional dependence of a_2 upon the radial distribution function is discussed and it is shown, using simple arguments, that a_2 is a sum of a constant and a linear functional of the said function. The analytical form and certain estimates for the kernel of this functional are obtained in the two-dimensional case (fiber-reinforced material).

1. INTRODUCTION

Consider a random dispersion of spheres in the three-dimensional case (3D) or cylinders in the two-dimensional (2D) case, i.e. an unbounded matrix of conductivity κ_m , containing an array of either spherical or parallel cylindrical inclusions, each one of radius a and conductivity κ_f . The centers of the inclusions, assumed nonoverlapping, are in the random points \mathbf{x}_j . The statistics of the dispersion is described by the multipoint distribution densities $f_p(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_p)$ that give the probability of finding a center of an inclusion per each of the infinitesimal volumes $\mathbf{y}_i < \mathbf{y} < \mathbf{y}_i + d\mathbf{y}_i$, $i = 1, \dots, p$. We assume, as usual, that the dispersion is statistically homogeneous and isotropic and $f_p \sim n^p$ in the dilute limit $n \rightarrow 0$, where n is the number density of the inclusions. The classical problem consists in evaluating the effective (or overall) conductivity κ^* of the dispersion, making use of the known conductivities κ_m and κ_f of the constituents, and of the statistical information represented by the functions f_p (cf., e.g., [1-6]). The mathematical formulation of the problem reads

$$(1.1) \quad \nabla \cdot \{\kappa(\mathbf{x})\nabla\theta(\mathbf{x})\} = 0, \quad \langle \nabla\theta(\mathbf{x}) \rangle = \mathbf{G},$$

where $\theta(\mathbf{x})$ is the random temperature field, $\kappa(\mathbf{x})$ —the given conductivity field ($\kappa(\mathbf{x}) = \kappa_f$ or κ_m depending on whether \mathbf{x} lies in an inclusion or in the matrix respectively), \mathbf{G} —the prescribed macroscopic gradient of the temperature, and $\langle \cdot \rangle$ denotes ensemble averaging. Upon solving the random problem (1.1), one calculates the mean flux, which is proportional to the macrogradient \mathbf{G} :

$$(1.2) \quad \langle \kappa(\mathbf{x})\nabla\theta(\mathbf{x}) \rangle = \kappa^* \mathbf{G},$$

where κ^* is the effective conductivity of the medium. The difficulties in calculating κ^* are well acknowledged in the literature: they stem from the need to account properly for the multiparticle interactions in the dispersions and for the slow decay of the single-inclusion field [2,4,5]. A number of approximations for κ^* exist; one of the first and most famous of them has been proposed by J. Maxwell [7]. Though he dealt with dispersions of spheres, we give the respective result in a bit more general form in order to be able to cover both 3D (dispersion of spheres) and 2D-case (dispersions of aligned cylinders, i.e. fiber-reinforced materials) simultaneously:

$$(1.3a) \quad \frac{\kappa^*}{\kappa_m} = 1 + \frac{d\beta_d}{1 - \beta_d c} = 1 + d\beta_d c + d\beta_d^2 c^2 + \dots,$$

where

$$(1.3b) \quad \beta_d = \frac{[\kappa]}{\kappa_f + (d-1)\kappa_m}, \quad [\kappa] = \kappa_f - \kappa_m;$$

hereafter $d = 3$ in 3D-case and $d = 2$ in 2D-case, c is the volume fraction of the inclusions, $c = nV_a$, $V_a = \frac{4}{3}\pi a^3$ in 3D-case, or $c = nS_a$, $S_a = \pi a^2$ in 2D-case.

Let

$$(1.4) \quad \frac{\kappa^*}{\kappa_m} = 1 + a_1 c + a_2 c^2 + \dots$$

be the so-called virial (or density) expansion of κ^* in powers of the volume fraction c of the inclusions. As a matter of fact, the coefficient a_1 is the only thing rigorously calculated by J. Maxwell (cf. [7]): $a_1 = d\beta_d$, while for the c^2 -coefficient his formula yields only a certain approximation

$$(1.5) \quad a_2 = d\beta_d^2.$$

The rigorous evaluation of a_2 has attracted the attention of many authors because this is the simplest case in which the multiparticle interaction shows up in a non-trivial way (see, e.g., the papers [4-6], [10]), where a_2 has been expressed in a closed form, making use of the zero-density limit $g_0(r)$ of the so-called radial distribution function for the spheres, and of the one- and two-inclusion fields for the conductivity problem under study. Let us point out also the paper [8], where certain bounds on a_2 are derived in which the same function $g_0(r)$ appears; the counterpart of these bounds in $2D$ -case is given in [9].

In this paper we shall first concentrate on the functional dependence of a_2 upon the above mentioned function $g_0(r)$. We shall show in §2, using the bounds of [8,9], that a_2 is a sum of a constant and a linear functional of $g_0(r)$ with a certain kernel Φ_1 , and estimates on Φ_1 will be then proposed (§3). In §4 we shall evaluate Φ_1 analytically in the $2D$ -case, making use of a method originated by J. Peterson and J. Hermans [10]. In this way we avoid twin expansion technique of D. Jeffrey [4] and B. Felderhof *et al.* [5], needed in $3D$ -case when solving the two-sphere problem, and get the eventual $2D$ -case result for a_2 in an explicit integral form. Moreover, for some simple but important particular cases the integration can be performed analytically employing certain well-known higher transcendental functions. Finally we consider some power series expansions for a_2 which allow us to calculate the latter easily (§5).

2. FUNCTIONAL DEPENDENCE OF a_2 UPON THE RADIAL DISTRIBUTION FUNCTION

Due to the assumption $f_p \sim n^p$, the coefficient a_2 could depend on the two-point distribution density f_2 only. As usual, we represent the latter as $f_2(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = f_2(r) = n^2 g(r) = n^2 g_0(r) + o(n^2)$, where $g(r)$ is the radial distribution function and $g_0(r)$ is its zero-density limit, $r = |\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|$. Obviously, only $g_0(r)$ could influence a_2 , so that

$$(2.1) \quad a_2 = \mathfrak{F}[g_0(\cdot)].$$

The functional \mathfrak{F} is defined on the space \tilde{C} of all bounded, piece-wise continuous functions on the interval $[2, \infty)$, $g_0(\lambda a)$, $\lambda = r/a$ (due to the nonoverlapping assumption) and $g_0(r) \rightarrow 1$ at $r \rightarrow \infty$ (no long-range order in the dispersion). The continuity of this functional in the C -norm seems obvious so that, according to the general representation theorem of V. Volterra [11], we can write down a_2 in the

form of a functional Volterra series:

$$(2.2) \quad a_2 = \Phi_0 + \int_2^\infty \Phi_1(\lambda) g_0(\lambda a) d\lambda + \iint_2^\infty \Phi_2(\lambda_1, \lambda_2) g_0(\lambda_1 a) g_0(\lambda_2 a) d\lambda_1 d\lambda_2 + \dots,$$

where $\Phi_0 = \text{const}$ and $\Phi_1(\lambda)$, $\Phi_2(\lambda_1, \lambda_2)$, etc., are certain kernels that vanish at infinity. These kernels do not depend on the statistics of the dispersions but only on the ratio $\alpha = \kappa_f / \kappa_m$ of the constituent conductivities or, which is the same, on the parameters β_d , introduced in (1.3b); to emphasize this fact we shall use the notations $\Phi_1 = \Phi_1(\lambda; \beta_d)$, etc.

Let us recall now the bounds on a_2 , derived in [8,9] in the 3D- and 2D-cases respectively:

$$(2.3a) \quad d\beta_d^2 \left(1 + \frac{d\beta_d}{1 - (d-1)\beta_d} m_2 \right) \leq a_2 \leq d\beta_d^2 \left(1 + \frac{d\beta_d}{1 + \beta_d} m_2 \right),$$

$$(2.3b) \quad m_2 = (d-1) \int_2^\infty \frac{\lambda^{d-1}}{(\lambda^2 - 1)^d} g_0(\lambda a) d\lambda, \quad d = 2, 3.$$

As a first consequence of (2.3) we shall show that the functional (2.1) has the form

$$(2.4) \quad a_2 = d\beta_d^2 + \int_2^\infty \Phi_1(\lambda; \beta_d) g_0(\lambda a) d\lambda,$$

i.e.

$$(2.4a) \quad \Phi_0 = d\beta_d^2$$

and

$$(2.4b) \quad \Phi_2 = \Phi_3 = \dots = 0.$$

The proof is based on the fact that (2.3) holds for all admissible functions $g_0(r) \in \tilde{C}$. Indeed, consider the class of functions $g_0^A \in \tilde{C}$ such that $g_0^A(r) = 0$ at $r \leq A$ and $g_0^A(r) = 1$ at $r > A$, $A > 2a$. The statistical parameter in (2.3b) depends then on A , $m_2 = m_2^A$, and it can be easily calculated in this case, but we need here only the obvious fact that

$$(2.5) \quad m_2^A \rightarrow 0 \quad \text{at} \quad A \rightarrow \infty.$$

On the other hand,

$$(2.6) \quad \phi_1^A = \int_2^\infty \Phi_1(\lambda) g_0^A(\lambda a) d\lambda \rightarrow 0,$$

$$\phi_2^A = \iint_2^\infty \Phi_2(\lambda_1, \lambda_2) g_0^A(\lambda_1 a) g_0^A(\lambda_2 a) d\lambda_1 d\lambda_2 \rightarrow 0,$$

etc., at $A \rightarrow \infty$. We employ now (2.3a) for the function $g_0(r) = g_0^A(r)$:

$$d\beta_d^2 \left(1 + \frac{d\beta_d}{1 - (d-1)\beta_d} m_2^A \right) \leq \Phi_0 + \phi_1^A + \phi_2^A + \dots \leq d\beta_d^2 \left(1 + \frac{d\beta_d}{1 + \beta_d} m_2^A \right).$$

Letting $A \rightarrow \infty$ and recalling (2.5) and (2.6), we get from the last inequalities that $\Phi_0 = d\beta_d^2$ which proves (2.4a).

The proof of (2.4b) is very simple if the functional series (2.2) is finite, containing N terms, $N \geq 2$. Let $N = 2$ first. Consider the kernel Φ_2 and suppose that in the neighbourhood

$$\Lambda_\epsilon = (\lambda_1^0 - \epsilon, \lambda_1^0 + \epsilon) \times (\lambda_2^0 - \epsilon, \lambda_2^0 + \epsilon)$$

of the point $(\lambda_1^0, \lambda_2^0) \in \mathbf{R}^2$ we have, say, $\Phi_2(\lambda_1, \lambda_2) > 0$. We consider the class of step-constant functions $g_0(r) \in \tilde{C}$, such that $g_0(r) = \mu$ if $r \in (\lambda_1^0 - \epsilon, \lambda_1^0 + \epsilon) \cup (\lambda_2^0 - \epsilon, \lambda_2^0 + \epsilon)$; $g_0(r) = 1$ at $r \geq A$ and vanishes otherwise. In this case the parameter m_2 is a linear function of μ . On the other hand, the two-tuple term in (2.2) is a quadratic function of μ with a positive multiplier of μ^2 . If μ and A are big enough, the inequality (2.3a) will be violated, which proves that $\Phi_2 = 0$. The proof in the case when $N > 2$ but is finite, is fully similar.

We should finally show that the series (2.2) for a_2 is finite. To this end it suffices to recall the definition (1.2) and the representations

$$\begin{aligned} \kappa(\mathbf{x}) &= \langle \kappa \rangle + [\kappa] \int h(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \omega'(\mathbf{y}) d^3 \mathbf{y}, \\ \theta(\mathbf{x}) &= \mathbf{G} \cdot \mathbf{x} + \int T_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \omega'(\mathbf{y}) d^3 \mathbf{y} \\ &+ \iint T_2(\mathbf{x} - \mathbf{y}_1, \mathbf{x} - \mathbf{y}_2) D_\omega^{(2)}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) d^3 \mathbf{y}_1 d^3 \mathbf{y}_2 + o(n^2), \end{aligned}$$

where $\omega'(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x}) - n$,

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)$$

is the random density field for the dispersion and

$D_\omega^{(2)}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \omega(\mathbf{y}_1)[\omega(\mathbf{y}_2) - \delta(\mathbf{y}_{1,2}) - n g_0(\mathbf{y}_{1,2})[\omega'(\mathbf{y}_1) + \omega'(\mathbf{y}_2)] - n^2 g_0(\mathbf{y}_{1,2})]$, $\mathbf{y}_{1,2} = \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2$. The kernels T_1 and T_2 have been specified in [6], but we need here only the fact that the two- and three-point moments of $\omega(\mathbf{x})$ depend linearly on $g_0(r)$, to the needed order n^2 [12], so that the series (2.2) should be finite and, moreover, should indeed have the form (2.2), truncated after the one-tuple term.

3. BOUNDS ON THE KERNEL Φ_1

Let us denote by a_2' the c^2 -deviation of a_2 from its Maxwell value (1.5), i.e. $a_2' = a_2 - d\beta_d^2$. From (2.3) and (2.4) we have

$$(3.1) \quad a_2' = \int_0^\infty \Phi_1(\lambda; \beta_d) g_0(\lambda a) d\lambda,$$

$$(3.2) \quad \frac{d^2 \beta_d^3}{1 - (d-1)\beta_d} m_2 \leq a'_2 \leq \frac{d^2 \beta_d^3}{1 + \beta_d} m_2.$$

Since the statistical parameter m_2 is a linear functional of $g_0(\lambda a)$ and (3.2) should hold for all admissible functions $g_0 \in \tilde{C}$, we can conclude that

$$(3.3) \quad \begin{aligned} & \frac{d^2(d-1)\beta_d^3}{1 - (d-1)\beta_d} \frac{\lambda^{d-1}}{(\lambda^2 - 1)^d} \leq \Phi_1(\lambda; \beta_d) \\ & \leq \frac{d^2(d-1)\beta_d^3}{1 + \beta_d} \frac{\lambda^{d-1}}{(\lambda^2 - 1)^d}, \quad \lambda \in [2, \infty). \end{aligned}$$

The proof employs the arbitrariness of $g_0(\lambda a)$ in the space \tilde{C} and is fully similar to that in §2.

Note that the estimates (3.3) imply that Φ_1 decays as $\lambda^{-(d+1)}$ at $\lambda \rightarrow \infty$ and

$$(3.4) \quad \Phi_1(\lambda; \beta_d) = d^2(d-1)\beta_d^3 \frac{\lambda^{d-1}}{(\lambda^2 - 1)^d} + o(\beta_d^3).$$

If $\kappa_f/\kappa_m \rightarrow \infty$, i.e. $\beta_d \rightarrow 1$, the upper bound (3.3) degenerates; if $\kappa_f/\kappa_m \rightarrow 0$, i.e. $\beta_3 \rightarrow -\frac{1}{2}$ or $\beta_2 \rightarrow -1$, the lower bound (3.3) degenerates (cf. Fig. 2 below).

4. EVALUATION OF THE KERNEL Φ_1 IN 2D-CASE

Let us recall first the formula for a'_2 , derived in [4,10], see also [6], which in the 2D-case reads

$$(4.1) \quad a'_2 \mathbf{G} = \frac{[\kappa]}{\kappa_m} \frac{1}{S_a^2} \int_{S_a} d^2 \mathbf{x} \int_{Z_{2a}} g_0(\mathbf{z}) \left[\nabla_{\mathbf{x}} T^{(2)}(\mathbf{x}; \mathbf{z}) - \nabla T^{(1)}(\mathbf{x}) \right] d^2 \mathbf{z},$$

where $Z_{2a} = \{ \mathbf{z} \mid |\mathbf{z}| \geq 2a \} \subset \mathbb{R}^2$, and

$$(4.2) \quad T^{(1)}(\mathbf{x}) = -\beta \mathbf{G} \cdot \mathbf{x} \quad \text{at } |\mathbf{x}| \leq a; \quad \beta = \beta_2 = \frac{[\kappa]}{\kappa_f + \kappa_m},$$

is the solution of one-inclusion problem at $|\mathbf{x}| \leq a$; the inclusion hereafter is the disc $S_a = \{ \mathbf{x} \mid |\mathbf{x}| \leq a \}$ of radius a , located at the origin. The field $T^{(2)}(\mathbf{x}; \mathbf{z})$ is the solution of the two-inclusion problem which represents the disturbance to the temperature field introduced by the pair of equal discs 1 and 2 centered at the origin and at the point \mathbf{z} , respectively, when the temperature gradient at infinity equals \mathbf{G} . The field $T^{(2)}(\mathbf{x}; \mathbf{z})$ satisfies the equation

$$(4.3) \quad \kappa_m \Delta T^{(2)}(\mathbf{x}; \mathbf{z}) + [\kappa] \nabla \cdot \left\{ [h(\mathbf{x}) + h(\mathbf{x} - \mathbf{z})] [\mathbf{G} + \nabla T^{(2)}(\mathbf{x}; \mathbf{z})] \right\} = 0;$$

here \mathbf{z} plays the role of a parameter and $\mathbf{z} \in Z_{2a}$, since the discs are not allowed to overlap. The integral in (4.1) is conditionally convergent and is understood in the sense

$$(4.4) \quad \int \cdot d^2 \mathbf{z} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{Z_{2a,R}} \cdot d^2 \mathbf{z}; \quad \int \cdot d^2 \mathbf{z} = \int_0^R r dr \int_{\Omega} \cdot d\Omega,$$

where $Z_{2a,R} = \{ \mathbf{z} \mid 2a \leq |\mathbf{z}| \leq R \}$. This means that in the integral over the region $Z_{2a,R}$ we first integrate with respect to the angular coordinates, i.e. on the unit circle $\Omega = \{ \mathbf{z} \mid |\mathbf{z}| = 1 \}$, and then with respect to the radial coordinate $r = |\mathbf{z}|$, see [4,6].

We shall calculate here this integral by means of an obvious extension of the arguments of J. Peterson and J. Hermans [10], who tacitly considered only the well-stirred case $g_0(\tau) = 1$.

Let us introduce the tilted coordinate system (x'_1, x'_2) as shown in Fig. 1, where $|O'O_1| = |O'O_2| = L$, and the bipolar coordinate system (σ, τ) for which

$$(4.5) \quad x'_1 = b \frac{\text{sh } \tau}{\text{ch } \tau - \cos \sigma} = b \left(1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} e^{-p\tau} \cos p\sigma \right),$$

$$x'_2 = b \frac{\sin \sigma}{\text{ch } \tau - \cos \sigma} = 2b \sum_{p=1}^{\infty} e^{-p\tau} \sin p\sigma.$$

The boundaries of the two discs 1 and 2 correspond to the coordinate lines $\tau = \pm\tau_0$, where

$$(4.6) \quad a = \frac{b}{\text{sh } \tau_0}, \quad L = a \text{ch } \tau_0.$$

The solution of the problem (4.3), bounded at infinity can be obtained straightforwardly, making use of the bipolar coordinates (σ, τ) (see, e.g., [10]). We shall need in what follows only the values of the solution at the boundary $\tau = \tau_0$ of the disc 1:

$$(4.7) \quad \left(\mathbf{G} \cdot \mathbf{x} + T^{(2)}(\mathbf{x}; \mathbf{z}) \right) \Big|_{\tau=\tau_0} = bG'_1 \left(1 + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2\kappa_m \cos p\sigma}{\kappa_f \text{sh } p\tau_0 + \kappa_m \text{ch } p\tau_0} \right) + bG'_2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2\kappa_m \sin p\sigma}{\kappa_f \text{ch } p\tau_0 + \kappa_m \text{sh } p\tau_0},$$

where G'_1 and G'_2 are the projections of the temperature gradient at infinity \mathbf{G} on the axes x'_1 and x'_2 , respectively.

As it follows from (4.2),

$$(4.8) \quad T^{(1)}(\mathbf{x}) = -\beta \mathbf{G} \cdot \mathbf{x} = -\beta(G'_1 x'_1 + G'_2 x'_2) + \text{const},$$

so that the field $W(\mathbf{x}; \mathbf{z}) = T^{(2)}(\mathbf{x}; \mathbf{z}) - T^{(1)}(\mathbf{x})$, needed in (4.1), has the form

$$W(\mathbf{x}; \mathbf{z}) = G'_1 W'_1 + G'_2 W'_2,$$

$$(4.9) \quad W'_1 = \sum_{p=0}^{\infty} W'_{p1} \cos p\sigma, \quad W'_2 = \sum_{p=1}^{\infty} W'_{p2} \sin p\sigma,$$

$$W'_{p1} = \frac{2\kappa_m \beta b e^{-2p\tau_0}}{\kappa_f \text{sh } p\tau_0 + \kappa_m \text{ch } p\tau_0}, \quad W'_{p2} = -\frac{2\kappa_m \beta b e^{-2p\tau_0}}{\kappa_f \text{ch } p\tau_0 + \kappa_m \text{sh } p\tau_0}.$$

Let us change now the order of integration in (4.1) and then apply the Gauss theorem

$$(4.10) \quad a'_2 \mathbf{G} = \frac{[\kappa]}{\kappa_m} \frac{1}{S_a^2} \int_{Z_{2a}} g_0(\mathbf{z}) d^2 \mathbf{z} \int_{|\mathbf{x}|=a} \mathbf{n} W(\mathbf{x}; \mathbf{z}) ds;$$

here \mathbf{n} is the unit outward normal to the disk 1 and ds is its element of length

$$(4.11) \quad ds = \frac{d\sigma}{h}, \quad h = \frac{b}{\operatorname{ch} \tau_0 - \cos \sigma}.$$

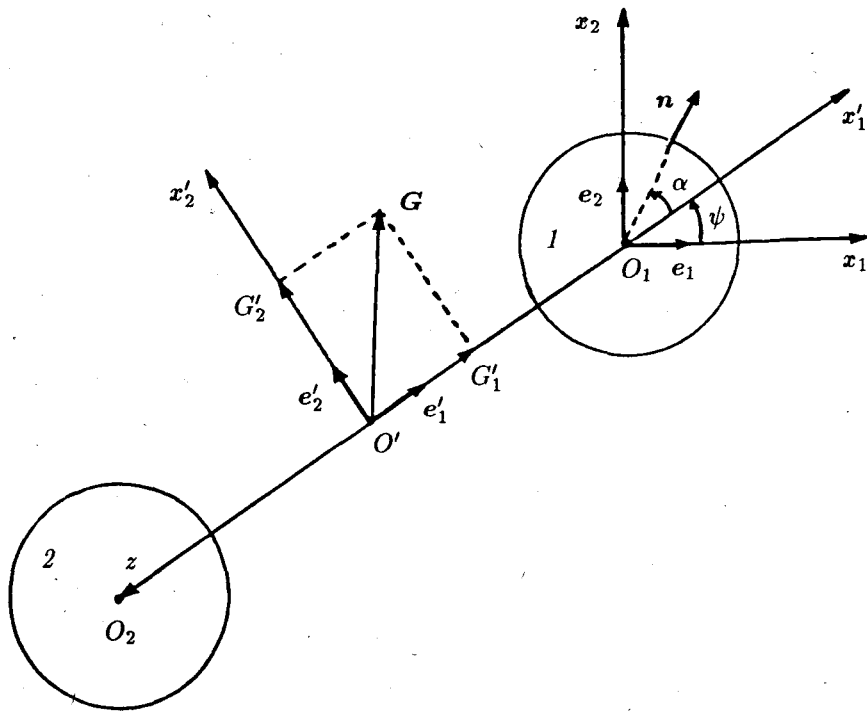


Fig. 1. Coordinate systems in the two-inclusion problem (2D-case).

Since the integral with respect to \mathbf{z} is to be understood in the sense (4.4) and $g_0(\mathbf{z}) = g_0(|\mathbf{z}|)$, we carry out the integration consecutively: first, at fixed $|\mathbf{z}| = 2L = 2a \operatorname{ch} \tau_0$, i.e. at fixed τ_0 , we integrate with respect to all orientations of the dumb-bell shaped figure (see Fig. 1), described by the angle ψ . Next we integrate with respect to all $|\mathbf{z}|$, i.e. to all τ_0 . This procedure is equivalent to a transition to the polar coordinates (ρ, α) in the plane (x_1, x_2) with a center at the point O_1 , so that $\rho = |\mathbf{z}| = 2L$, after which the integration is performed first with respect to α and then with respect to ρ (cf. Fig. 1).

Consider first the integration with respect to ρ . Due to (4.9)₁ and (4.11), we have

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \mathbf{K}(L) &= \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \int_{|x|=a} \mathbf{n} W(\mathbf{x}; a) ds \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \int_{|x|=a} \mathbf{n} (G'_1 W'_1 + G'_2 W'_2) ds = \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \int_{|x|=a} (W'_1 \mathbf{n} \mathbf{e}'_1 + W'_2 \mathbf{n} \mathbf{e}'_2) ds \cdot \mathbf{G}. \end{aligned}$$

In this expression we should once integrate over the orientations of the pair of unit vectors $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ and once over the orientations of the normal \mathbf{n} . Instead, we first fix the angle ψ between \mathbf{n} and \mathbf{e}'_1 :

$$(4.13) \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}'_1 = \cos \psi, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}'_2 = \sin \psi,$$

and rotate rigidly the triad $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{n}$. The dyadics $\mathbf{n} \mathbf{e}'_1, \mathbf{n} \mathbf{e}'_2$, after such an integration become proportional to the unit second-rank tensor \mathbf{I} , so that, in virtue of (4.11) and (4.13), the integral in (4.12) becomes

$$(4.14) \quad \mathbf{K}(L) = \pi \mathbf{G} \int_{-\pi}^{\pi} (G'_1 W'_1 + G'_2 W'_2) \frac{d\sigma}{h}.$$

It remains to integrate with respect to the angle ψ only.

Let us recall now the formulas

$$(4.15) \quad \begin{aligned} \frac{\cos \psi}{h} &= b \frac{\text{ch } \tau_0 \cos \sigma - 1}{(\text{ch } \tau_0 - \cos \sigma)^2} = 2b \sum_{p=1}^{\infty} p e^{-p\tau_0} \cos p\sigma, \\ \frac{\sin \psi}{h} &= b \frac{\text{sh } \tau_0 \sin \sigma}{(\text{ch } \tau_0 - \cos \sigma)^2} = 2b \sum_{p=1}^{\infty} p e^{-p\tau_0} \sin p\sigma, \end{aligned}$$

which, when substituted into (4.14), together with (4.9) yield

$$(4.16) \quad \begin{aligned} \mathbf{K}(L) &= \pi b \mathbf{G} \sum_{p=1}^{\infty} p e^{-p\tau_0} (W'_{p1} + W'_{p2}) \\ &= 16\pi^2 b^2 \beta^2 \frac{\kappa_m}{\kappa_m + \kappa_f} \mathbf{G} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p e^{-6p\tau_0}}{1 - \beta^2 e^{-4p\tau_0}}. \end{aligned}$$

Since the radius a of the discs is fixed, the integration with respect to $\rho = 2a \text{ch } \tau_0$ is an integration over $\tau_0 \in (0, \infty)$ and

$$\rho d\rho = 4a^2 \text{ch } \tau_0 \text{sh } \tau_0 d\tau_0.$$

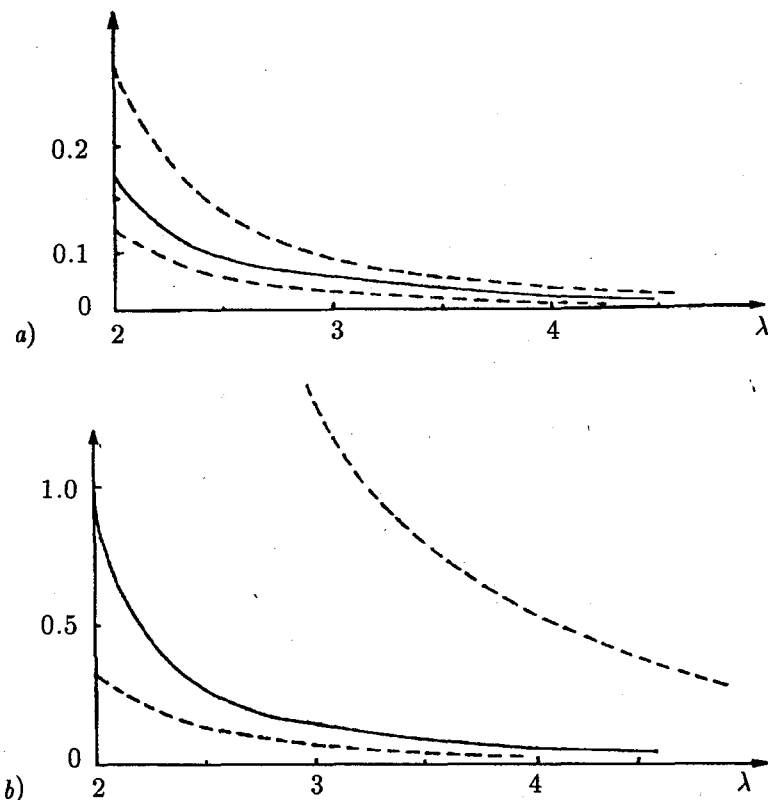


Fig. 2. Plots of the kernel Φ_1 (continuous line) and the bounds Φ_1^L and Φ_1^U (dashed lines) (2D-case); a) $\beta = 0.5$; b) $\beta = 0.9$

Making use of (4.7) and (4.16), we thus get

$$a'_2 \mathbf{G} = \frac{[\kappa]}{\kappa_m} \frac{1}{S_a^2} \int_{2a}^{\infty} \mathbf{K}(L) g_0(\rho) \rho d\rho = 4\beta^3 M(\beta) \mathbf{G}, \quad (4.17)$$

$$M(\beta) = 16 \sum_{p=1}^{\infty} p \int_0^{\infty} g_0(2a \operatorname{ch} \tau_0) \frac{\operatorname{ch} \tau_0 \operatorname{sh}^3 \tau_0}{1 - \beta^2 e^{-4p\tau_0}} e^{-6p\tau_0} d\tau_0.$$

Upon inserting (4.17) into (4.1) we easily obtain the eventual c^2 -formula for the effective transverse conductivity κ^* of a fiber-reinforced material:

$$(4.18) \quad \frac{\kappa^*}{\kappa_m} = 1 + 2\beta c + 2\beta^2 (1 + 2\beta M(\beta)) c^2 + o(c^2),$$

with the function $M(\beta)$ defined in (4.17). This function is obviously even, which implies the relation

$$(4.19) \quad a_2(\beta) + a_2(-\beta) = 4\beta^2$$

for the coefficient a_2 , considered as a function of the parameter β . It is to be noted that (4.19) is a simple consequence of the Keller interchange formula [13], which reads

$$\kappa^*(\kappa_f, \kappa_m) \kappa^*(\kappa_m, \kappa_f) = \kappa_f \kappa_m;$$

here $\kappa^*(\kappa_f, \kappa_m)$ denotes the effective transverse conductivity of the fiber material under study and $\kappa^*(\kappa_m, \kappa_f)$ is the conductivity of the same material, but when the fibers are made of the matrix material and the matrix—of fiber's.

The comparison of (3.1) and (4.17) yields the analytical form of the kernel Φ_1 :

$$(4.20) \quad \Phi_1(\lambda; \beta) = 4\beta^3 \lambda (\lambda^2 - 4) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p \Lambda^{6p}}{1 - \beta^2 \Lambda^{6p}};$$

here $\Lambda = e^{-\tau_0} = \frac{1}{2}(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4})$, $\lambda \geq 2$.

By means of (2.4) and (4.20) we can evaluate numerically the coefficient a_2 for an arbitrary sphere statistics, represented here by the function $g_0(r)$. Thus in 2D-case under study we avoid twin expansion technique of D. Jeffrey [4] and B. Felderhof *et al.* [5], needed in 3D-case when solving the two-sphere problem, and get the eventual result for a_2 as an explicit integral. Moreover, for some simple but important particular cases the integration can be performed analytically employing certain well-known higher transcendental functions, as we shall see in the next Section.

The bounds (3.3) in 2D-case under study have the form

$$(4.21) \quad \Phi_1^L(\lambda; \beta) \leq \Phi_1(\lambda; \beta) \leq \Phi_1^U(\lambda; \beta),$$

$$\Phi_1^L = \frac{4\beta^3 \lambda}{1 + \beta(\lambda^2 - 1)^2}, \quad \Phi_1^U = \frac{4\beta^3 \lambda}{1 - \beta(\lambda^2 - 1)^2}.$$

The exact values of the kernel Φ_1 together with the bounds Φ_1^L and Φ_1^U as functions of λ are shown in Fig. 2 in two cases: $\beta = 0.5$ and $\beta = 0.9$.

5. SOME FORMULAS CONCERNING a_2 IN 2D-CASE

In order to make easier the numerical evaluation of a_2 for the fiber-reinforced materials let us expand the function $M(\beta)$ in (4.17) in powers of the parameter β :

$$(5.1) \quad M(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k \beta^{2k}, \quad \beta = \frac{[\kappa]}{\kappa_f + \kappa_m},$$

$$(5.2) \quad M_k = 16 \sum_{j=1}^{\infty} j \int_0^{\infty} g_0(2a \operatorname{ch} \tau) \operatorname{ch} \tau \operatorname{sh}^3 \tau e^{-2j(3+2k)\tau} d\tau.$$

The estimates (3.2) for a_2 now imply

$$(5.3) \quad \frac{2\beta}{1 + \beta} m_2 \leq 2\beta M(\beta) \leq \frac{2\beta}{1 - \beta} m_2,$$

so that

$$(5.4) \quad M_0 = m_2 = \int_2^{\infty} \frac{\lambda}{(\lambda^2 - 1)^2} g_0(\lambda a) d\lambda,$$

$$(5.5) \quad M(\beta) = m_2 + O(\beta), \quad \text{i.e. } a_2 = 2\beta^2(1 + 2\beta m_2) + o(\beta^3).$$

The formula (5.2) can be recast as

$$M_k = 4 \int_0^{\infty} g_0(2a \operatorname{ch} \tau) \frac{\operatorname{ch} \tau \operatorname{sh}^3 \tau}{\operatorname{sh}^2(3 + 2k)\tau} d\tau.$$

Having used the known formula for $\operatorname{sh} n\tau$ and making the substitution $\lambda = 2 \operatorname{ch} \tau$, we get eventually

$$(5.6) \quad M_k = \int_2^{\infty} \lambda g_0(\lambda a) \left\{ \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j C_{2+2k-j}^j \lambda^{2(2k-j+1)} \right\}^{-1} d\lambda.$$

The formula (5.4) coincides with (5.6) at $k = 0$. At $k = 1$ we have

$$(5.7) \quad M_1 = \int_2^{\infty} \frac{\lambda g_0(\lambda a)}{(\lambda^4 - 3\lambda^2 + 1)^2} d\lambda,$$

and this integral, as well as the integral in (5.4), can be easily evaluated in the most frequently used well-stirred approximation for which $g(r) = g_0(r) = g_0(\lambda a) = 1$ at $\lambda \geq 2$, yielding

$$(5.8) \quad M_0 = M_0^{ws} = \frac{1}{6}, \quad M_1 = M_1^{ws} = \frac{1}{10} + \frac{\sqrt{5}}{25} \ln \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

However, the analytical evaluation of M_k by means of (5.6) at $k \geq 2$ is not easy even in the well-stirred case. In the latter case we employ (5.2) which leads, after simple manipulations, to the following result:

$$(5.9a) \quad M_k^{ws} = c_k^2 \left\{ 2\psi(1 + c_k) - 2\psi(1 + 2c_k) + \frac{1}{c_k} \left(\frac{2\pi c_k}{\sin 2\pi c_k} - 1 \right) \right\},$$

where

$$(5.9b) \quad c_k = \frac{1}{2k + 3}, \quad \psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)},$$

so that $\psi(x)$ is the logarithmic derivative of the Euler Gamma-function which is investigated in detail and tabulated [14,15]. As a matter of fact, the formula (5.9) is given in [10]. Note that since the arguments $1 + c_k$ and $1 + 2c_k$ are rational, we can employ the formula for $\psi(p/q)$, cf. [15, p.722], which allows us to represent M_k^{ws} by means of elementary functions, namely

$$(5.10) \quad M_k^{ws} = c_k^2 \left\{ \frac{1}{2c_k} + 8 \sum_{j=1}^{k+1} \sin(j\pi c_k) \operatorname{si}(3j\pi c_k) \ln \sin(j\pi c_k) \right\}.$$

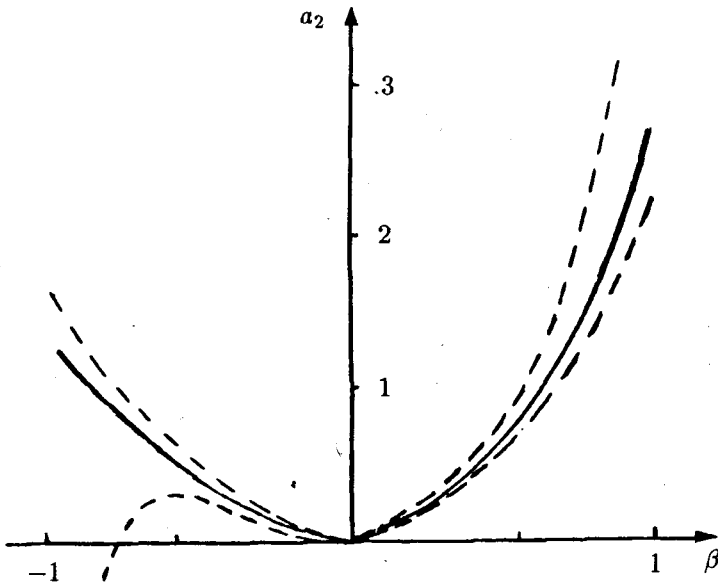


Fig. 3. The c^2 -coefficient a_2 in the well-stirred $2D$ -case as a function of β

Note also the asymptotic formula

$$(5.11) \quad M_k^{ws} = 6\zeta(3)c_k^4 + 30\zeta(5)c_k^6 + o(c_k^6),$$

where $\zeta(3) = 1.2021$ and $\zeta(5) = 1.0369$ are the respective values of the Riman ζ -function. The formula (5.11) gives four correct decimal numbers for M_k^{ws} at $k \geq 4$ and six at $k \geq 6$.

The formulas (5.10) and (5.11) make possible to evaluate a_2 in the well-stirred case, having truncated the series (5.1) and replacing the remaining coefficients M_k^{ws} with their asymptotic values (5.11). In this way one easily finds, e.g.,

$$(5.12) \quad \begin{aligned} a_2^{ws} &= 2.7450 \text{ at } \beta = 1, \text{ i.e. } \kappa_f/\kappa_m = \infty, \\ a_2^{ws} &= 1.2550 \text{ at } \beta = -1, \text{ i.e. } \kappa_f/\kappa_m = 0. \end{aligned}$$

The dependence $a_2 = a_2(\beta)$ is shown in Fig. 3 together with the bounds (2.3a), which in the well-stirred $2D$ -case under study read

$$2\beta^2 \left(1 + \frac{\beta}{3(1+\beta)} \right) \leq a_2^{ws} \leq 2\beta^2 \left(1 + \frac{\beta}{3(1-\beta)} \right).$$

It is instructive to consider as well the more general radial distribution function

$$(5.13) \quad g_0(r) = 1 + A_1 \frac{a}{r}, \quad r \geq 2a,$$

where A_1 is a certain scalar parameter such that $A_1 \geq -2$ (in order to have $g_0(r) \geq 0$). The coefficients M_k , corresponding to the distribution function (5.13) can be easily evaluated by means of (5.2) and the final result is

$$(5.14) \quad M_k = M_k^{ws} + A_1 N_k,$$

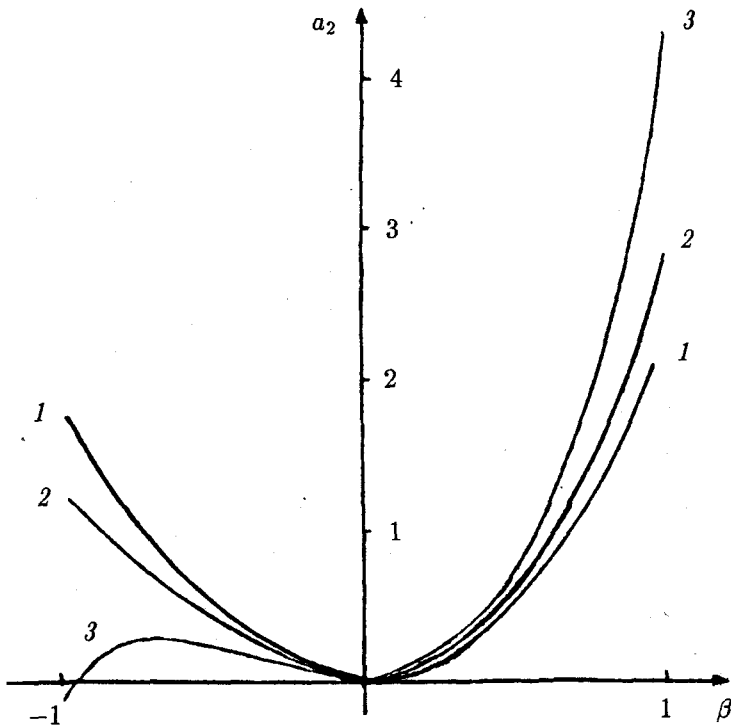


Fig. 4. The c^2 -coefficient a_2 in the well-stirred 2D-case as a function of β for the distribution function $g_0(\tau)$ given in (5.13);

1 - $A_1 = -2$; 2 - $A_1 = 0$ (well-stirred); 3 - $A_1 = 5$

$$(5.15) \quad N_k = \frac{3}{2} c_k^2 \left\{ 2\psi\left(1 + \frac{1}{2}c_k\right) - \psi\left(1 + \frac{3}{2}c_k\right) + \frac{\pi \cos(\pi c_k/2)}{\sin(3\pi c_k/2)} - \frac{2}{3c_k} \right\},$$

$k = 0, 1, \dots$, where c_k are defined in (5.9b) and M_k^{ws} are the respective coefficients in (5.1) in the well-stirred case, cf. (5.10). Having applied the above mentioned formula for $\psi(p/q)$ from [15, p. 722], we get

$$(5.16) \quad N_k = \frac{3}{2} c_k^2 \left\{ \frac{2}{3c_k} + 4 \sum_{j=1}^{2(k+1)} \sin(j\pi c_k) \sin(2j\pi c_k) \ln \sin \frac{j\pi c_k}{2} \right\},$$

so that $N_k > 0$, $k = 0, 1, \dots$

In particular,

$$N_0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ln 3, \quad N_1 = \frac{1}{5} + \frac{9\sqrt{5}}{100} \ln \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

The asymptotic formula for N_k reads

$$N_k = 3\zeta(3)c_k^4 + o(c_k^4).$$

It gives four correct decimal digits at $k \geq 2$ and six at $k \geq 8$.

Since A_1 should only exceed -2 and thus it can take arbitrarily big values, equation (5.14) suggests that the statistics of the dispersion affects very strongly the c^2 -coefficient in the virial expansion (1.4) of the effective conductivity. This is illustrated in Fig. 4 for the radial distribution function (5.13) in the cases $A_1 = -2$, $A_1 = 0$ (well-stirred) and $A_1 = 5$.

Let us note finally that $M(\beta) > 0$ at $\beta \in (-1, 1)$, cf. (4.17), and it could take arbitrarily big values, e.g. for the distribution function (5.13). Then (4.19) implies the following sharp estimates for the coefficient a_2 in 2D-case:

$$(5.17) \quad \begin{aligned} 2\beta^2 < a_2 < \infty, & \text{ if } \beta > 0, \text{ i.e. } \kappa_f > \kappa_m, \\ -\infty < a_2 < 2\beta^2, & \text{ if } \beta < 1, \text{ i.e. } \kappa_f < \kappa_m, \end{aligned}$$

having taken $\sup a_2$ and $\inf a_2$ with respect to all admissible radial distribution functions $g_0(r)$ (so that varying, in particular the parameter A_1 in (5.13) from -2 to infinity). We can thus conclude that there is no finite interval, independent of the statistics of the fibres, within which the c^2 -coefficient a_2 is to be always found. Note that similar to (5.17) estimates are to be expected to hold in the 3D-case, i.e. for dispersions of spheres, with the only difference that the factor 2 should be replaced by 3, and again there will be no finite interval for the coefficient a_2 , independent of the statistics of the dispersion.

ACKNOWLEDGEMENT. The support of this work by the Bulgarian Ministry of Culture, Science and Education under Grant No MM26 is acknowledged.

REFERENCES

1. Landauer, R. Electrical conductivity in inhomogeneous media. — Electrical transport and optical properties of inhomogeneous media (eds. J.C.Garland, D.B.Tanner). Am. Inst. Phys., N. Y., 1978, 2-43.
2. МсСоу, J. J. Macroscopic response of continua with random micro-structure. — Mechanics Today (ed. S. Nemat-Nasser), Vol. 6, Pergamon Press, N. Y., 1981, 1-40.
3. Финкельберг, В. М. Диэлектрическая проницаемость смесей. — Ж. Техн. Физ. 34(3), 1964, 509-518.
4. Jeffrey, D. J. Conduction through a random suspension of spheres. — Proc. Roy. Soc. London, A335, 1973, 355-367.
5. Felderhof, B. V., G. W. Ford, E. G. D. Cohen. Two-particle cluster integral in the expansion of the dielectric constant. — J. Stat. Phys., 28, 1982, 649-672.
6. Марков, К. Z. On the heat propagation problem for random dispersion of spheres — Math. Balkanica (New series), 3, 1989, 399-417.
7. Maxwell, J. C. A treatise on electricity and magnetism. Dover, N. Y., 1954. (Republication of 3rd edition of 1891.)
8. Марков, К. Z. Application of Volterra-Wiener series for bounding the overall conductivity of heterogeneous media. I. General procedure. II. Suspensions of equi-sized spheres. — SIAM J. Appl. Math., 47, 1987, 831-849, 850-870.
9. Марков, К. Z. Bounds on the effective transverse conductivity of fibre materials — Ann. Univ. Sofia, Fac. Math. Méc., Livre 2, Méc., 79/1985, 1988, 113-124.
10. Peterson, J. M., J. J. Hermans. The dielectric constant of nonconducting suspensions. — J. Composite Materials, 3, 1969, 338-354.
11. Volterra, V. Theory of functionals and of integral and integral-differential equations. Blackie, London, 1929 (Republicated by Dover, N. Y., 1959.)

12. Stratonovich, R. L. Topics in theory of random noise. Vol.1, Gordon and Breach, N. Y., 1963.
13. Keller, J.B. A theorem on the conductivity of a composite medium — J. Math. Phys., 5, 1964, 548-549.
14. Janke, E., F. Emde, F. Lösch. Tafeln Höherer Functionen, B.G.Teubner, Stuttgart, 1960.
15. Прудников, А. П., Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. Интегралы и ряды. Специальные функции. Наука, М., 1983.

Received 13.03.1991

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Книга 2 — Механика

Том 84, 1990

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Livre 2 — Mécanique

Tome 84, 1990

СТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ ТЕЛ, СВЯЗАННЫХ СТРУНАМИ

НИКОЛИНА ВАСИЛЕВА, ЛЮБОМИР ЛИЛОВ

Николина Василева, Любомир Лилов. СТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ТЕЛ, СВЯЗАННЫХ СТРУНАМИ

На основе общих уравнений движения голономной системы в инвариантной тензорной форме, выведенных ранее авторами [5], найдены стационарные движения системы абсолютно твердых осесимметрических тел (гироскопов Лагранжа), которые связаны между собой абсолютно гибкими нерастяжимыми струнами.

Nikolina Vasileva, Ljubomir Lilov. STEADY-STATE MOTIONS FOR SYSTEMS OF RIGID BODIES CONNECTED WITH STRINGS

Steady-state motions for systems of rigid bodies with dynamical axes of symmetry (Lagrange's gyroscopes) interconnected by means of absolutely flexible strings are found through the use of general equations of motion, derived by the authors in [5] in an invariant tensor form.

Известно, что в технике часто возникает необходимость теоретического и экспериментального исследования движения твердых тел, связанных между собой струнами. Так, например, метод динамической балансировки тел использует обстоятельство, что тело произвольной формы, подвешенное на струне, может совершать стационарное движение, при котором одна из его главных центральных осей инерции совпадает с вертикалью. Исследование стационарных движений одного тела, подвешенного на струне и их устойчивости является предметом работ [1, 2, 3], в которых приведены примеры различных форм стационарных движений и дается описание проведенных экспериментов. Рассматриваются как осе-

симметрические, так и произвольные абсолютно твердые тела. Использование традиционного математического аппарата аналитической механики для более сложных систем приводит к огромному объему вычислительной работы. Это является следствием того, что в качестве обобщенных координат системы выбираются скалярные величины, которые не имеют конкретный механический смысл. Ряд промежуточных вычислений можно исключить, если использовать тензорную форму уравнений движения. Таким образом, упрощается запись уравнений и избегается зависимость решения поставленной задачи от выбора обобщенных координат. Использование естественных геометрических характеристик рассматриваемых систем в качестве параметров движения делает прозрачным их механическое поведение.

Цель настоящей работы — вывод уравнений движения произвольной системы тел со структурой дерева в инвариантной тензорной форме. Полученные уравнения используются для определения стационарных движений системы осесимметрических тел, которые связаны между собой абсолютно гибкими нерастяжимыми и натянутыми струнами.

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ТЕЛ СО СТРУКТУРОЙ ДЕРЕВА

Рассмотрим голономную систему $n + 1$ абсолютно твердых тел, которая имеет структуру дерева. Допустим, что движение одного из тел, которому присваиваем номер 0, задается как функция времени. Без ограничения общности можно считать, что с телом (0) связано только одно из тел системы, так как в противном случае систему можно разбить на части, которые являются независимыми между собой. Допустим также, что кинематические связи, осуществленные в сочленениях (шарнирах) тел, являются идеальными, т. е. силы реакции не совершают работы на виртуальных перемещениях системы.

Для описания структуры взаимосвязей между телами и сочленениями воспользуемся основными определениями и обозначениями в книге Виттенбурга [4].

Данной системе тел сопоставляем ориентированный граф, в котором дуги u_a ($a = 1, \dots, n$) соответствуют сочленениям, а вершины s_i ($i = 1, \dots, n$) — телам системы. Каждая дуга u_a соединяет в точности две вершины графа. Будем говорить также, что дуга u_a инцидентна этим вершинам. Ориентацию дуги u_a определяем в зависимости от вида соответствующего ей сочленения в системе тел. Обычно при описании относительного движения в любом сочленении u_a одно из тел является основным, а движение другого рассматривается относительно его. Тогда ориентацию дуги u_a выбираем с направлением из вершины, соответствующей основному телу к другой вершине, инцидентной этой дуге.

Пусть s_i и s_j две вершины графа. Перейдем из s_i в s_j вдоль последовательности вершин и дуг (не принимая во внимания направление)

по такому пути, чтобы ни одна дуга не проходила более одного раза. Тогда неупорядочное множество, определенных таким образом дуг, называется путем между s_i и s_j . В графе со структурой дерева путь между s_i и s_j определяется единственным образом. Говорят, что вершина s_k лежит на пути между s_i и s_j , если хотя бы одна дуга, принадлежащая этому пути, инцидентна s_k . Введем обозначения $s_i \leq s_j$ ($s_j \geq s_i$), если вершина s_i лежит на пути между s_0 и s_j и $s_i < s_j$ ($s_j > s_i$), если вершина s_i лежит на пути между s_0 и s_j и не совпадает с s_j . Отношение $s_j \not\leq s_i$ есть отрицание $s_j \geq s_i$.

Дуга u_a называется предшествующей вершине s_i , если u_a принадлежит пути между s_0 и s_i и является инцидентной вершине s_i . Всегда можно нумерировать дуги и вершины графа таким образом, чтобы каждая вершина и предшествующая ей дуга имели один и тот же номер (регулярная нумерация). Для ориентированного графа рассматриваемой системы предполагаем регулярную нумерацию.

Обозначая через $i^+(a)$ начало дуги u_a и через $i^-(a)$ — ее конец, определяем матрицу инцидентности $(\underline{S}_0^T, \underline{S}^T)^T$, где

$$\underline{S}_0 = (S_{01}, \dots, S_{0n}), \quad \underline{S} = (S_{ia})_{i,a=1}^n,$$

$$S_{ia} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = i^+(a) \\ -1, & \text{если } i = i^-(a) \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (i = 0, \dots, n; a = 1, \dots, n).$$

Так как нумерация графа — регулярная, матрица \underline{S} и ее обратная $\underline{S}^{-1} = \underline{T}$ являются верхними треугольными матрицами. Элементы T_{ai} матрицы \underline{T} тоже принимают значения 1, -1, и 0, а именно: $T_{ai} = 1$, если дуга u_a находится на пути от вершины s_0 к вершине s_i и направлена к s_0 , $T_{ai} = -1$, если направление дуги u_a — к s_i и $T_{ai} = 0$, если дуга u_a не принадлежит пути от s_0 к s_i .

Чтобы определить взаимное положение соседних тел в сочленении (а), выбираем фиксированные соответственно в телах $i^+(a)$ и $i^-(a)$ точки

$C_{i^+(a)a}$ и $C_{i^-(a)a}$. Вектор $z_a = \overrightarrow{C_{i^+(a)a} C_{i^-(a)a}}$ называется шарнирным вектором, а точки $C_{i^+(a)a}$ и $C_{i^-(a)a}$ — шарнирными точками. Точку C_{ii} будем называть предшествующей точкой для тела (i). Введем векторы

$$(1) \quad z_{a0} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^n m_j T_{aj} z_a, \quad z_{ai} = z_{a0} - T_{ai} z_a \quad (i, a = 1, \dots, n),$$

где m_j — масса тела (j), $M = \sum_{i=1}^n m_i$.

Так как $T_{aj} \neq 0$ только для тел с номерами j, для которых $s_j \geq s_a$, при том $T_{aj} = T_{aa}$, то

$$z_{a0} = \frac{1}{M} \sum_{j: s_j \geq s_a}^n m_j T_{aj} z_a = \frac{1}{M} \left(\sum_{j: s_j \geq s_a}^n m_j \right) T_{aa} z_a,$$

$$z_{ai} = \begin{cases} z_{a0}, & \text{если } s_i \not\geq s_a \\ z_{aa} = -\frac{1}{M} \left(\sum_{j: s_j \not\geq s_a}^n m_j \right) T_{aa} z_a, & \text{если } s_i \geq s_a. \end{cases}$$

Можно проверить, что имеет место соотношение

$$\sum_{j=1}^n m_j z_{aj} = 0 \quad (a = 1, \dots, n).$$

Рассмотрим тело с номером i . Так как путь между вершиной s_i и произвольной другой вершиной s_j графа — единственный, то на теле (i) существует только одна шарнирная точка, которая ведет к телу (j). К каждой шарнирной точке тела (i) добавляем точечную массу, равную сумме масс всех тел, к которым ведет эта точка. Полученное тело массой M называется дополненным телом (i), а его центр масс — барицентр тела (i). Обозначим через C_i и B_i центр масс и барицентр тела (i). Введем векторы b_{ij} ($j = 0, \dots, n$), где b_{ij} при $i \neq j$ является вектором с началом в точке B_i и концом в шарнирной точке тела (i), которая ведет к телу (j).

В случае $i = j$ положим $b_{ii} = \overrightarrow{B_i C_i}$. Очевидно

$$\sum_{j=1}^n m_j b_{ij} = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Векторы b_{ij} и d_{ij} , определяемые равенствами

$$(2) \quad d_{ij} = b_{i0} - b_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

жестко связанные с телом (i). Отметим также, что для каждого j , выполняющего условие $s_j \not\geq s_i$, справедливы равенства

$$b_{ij} = b_{i0}, \quad d_{ij} = 0.$$

Пусть O — некоторая неподвижная в инерциальном пространстве точка и O' — единственная шарнирная точка тела (0). Так как закон движения тела (0) заданный, то изменение вектора $r_0 = \overrightarrow{OO'}$ в пространстве является известной функцией времени t .

Радиус-вектор $r_i = \overrightarrow{OC_i}$ представляется суммой [4]

$$r_i = -\sum_{j=1}^n d_{ji} - \sum_{a=1}^n T_{ai} z_a + r_0 = \sum_{j=1}^n (b_{ji} - b_{j0}) - \sum_{a=1}^n T_{ai} z_a + r_0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Если обозначить через C центр масс системы тел (за исключением тела (0)), то для радиус-вектора $r_c = \overrightarrow{OC}$ и векторов $R_i = \overrightarrow{CC_i}$ справедливы выражения

$$r_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i r_i = -\sum_{j=1}^n b_{j0} - \sum_{a=1}^n z_{a0} + r_0 = -\sum_{j=1}^n (b_{j0} + z_{j0}) + r_0,$$

$$R_i = r_i - r_C = \sum_{j=1}^n (b_{ji} + z_{ji}) \quad (i = 1, \dots, n),$$

при этом $\sum_{i=1}^n m_i R_i = 0$.

Кинетическая энергия системы определяется формулой ([4])

$$(3) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{R}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot J_{C_i} \cdot \omega_i + \frac{1}{2} M \dot{r}_C^2,$$

ω_i и J_{C_i} — соответственно абсолютная угловая скорость тела (i) и его тензор инерции относительно C_i .

Применяя метод вывода формулы (5.56) в [4], для первой суммы в (3) находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{R}_i^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \sum_{k=1}^n m_k (\dot{b}_{jk} + \dot{z}_{jk}) \cdot (\dot{b}_{ik} + \dot{z}_{ik}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\dot{b}_{ij} + \dot{z}_{ij})^2 m_j \\ &= -\frac{1}{2} M \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} (\dot{b}_{ji} + \dot{z}_{ji}) \cdot (\dot{b}_{ij} + \dot{z}_{ij}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_j \dot{b}_{ij}^2 - M \sum_{i=1}^n \dot{b}_{i0} \cdot \dot{z}_{ii} \\ &\quad - \frac{1}{2} M \sum_{i=1}^n \dot{z}_{i0} \cdot \dot{z}_{ii}. \end{aligned}$$

Принимая в виду равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{r}_C^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} (\dot{b}_{j0} + \dot{z}_{j0}) \cdot (\dot{b}_{i0} + \dot{z}_{i0}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\dot{b}_{i0}^2 + 2\dot{b}_{i0} \cdot \dot{z}_{i0} + \dot{z}_{i0}^2) \\ &\quad - \dot{r}_0 \cdot \sum_{i=1}^n (\dot{b}_{i0} + \dot{z}_{i0}) + \frac{1}{2} \dot{r}_0^2, \\ \dot{b}_{ij} &= \omega_i \times b_{ij}, \quad \dot{b}_{ij}^2 = -\omega_i \cdot \tilde{b}_{ij} \cdot \tilde{b}_{ij} \cdot \omega_i, \\ J_i &= J_C - \sum_{j=1}^n m_j \tilde{b}_{ij} \cdot \tilde{b}_{ij} - M \tilde{b}_{i0} \cdot \tilde{b}_{i0} \\ &= J_C + \sum_{j=1}^n m_j (b_{ij}^2 E_2 - b_{ij} b_{ij}) + M (b_{i0}^2 E_2 - b_{i0} b_{i0}), \end{aligned}$$

где $i = 1, \dots, n$, $j = 0, \dots, n$, E_2 — единичный тензор второй валентности [5], приводим выражение кинетической энергии к виду

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot J_i \cdot \omega_i + \frac{1}{2} M \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} [(\dot{b}_{j0} + \dot{z}_{j0}) \cdot (\dot{b}_{i0} + \dot{z}_{i0}) - (\dot{b}_{ji} + \dot{z}_{ji}) \cdot (\dot{b}_{ij} + \dot{z}_{ij})] \\ &\quad + M \sum_{i=1}^n T_{ii} \left(\dot{b}_{i0} + \frac{1}{2} \dot{z}_{i0} \right) \cdot \dot{z}_{i0} - M \dot{r}_0 \cdot \sum_{i=1}^n (\dot{b}_{i0} + \dot{z}_{i0}) + \frac{1}{2} M \dot{r}_0^2. \end{aligned}$$

Тензор J_i является тензором инерции дополненного тела (i) относительно его предшествующей точки C_{ii} .

Пусть в качестве обобщенных координат системы выбраны тензоры X_1, \dots, X_m валентностей ν_1, \dots, ν_m . Согласно [5], уравнения движения записываются в виде

$$(4) \quad \tilde{X}_k \wedge_{\nu_k} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{[1] \partial \omega_i}{\partial X_k} \cdot (J_i \cdot \omega_i) + M \frac{[1] \partial (b_{i0} + z_{i0})}{\partial X_k} \cdot (T_{ii} \ddot{z}_i - \ddot{r}_0) + T_{ii} \frac{[1] \partial z_i}{\partial X_k} \cdot M \ddot{b}_{i0} + \sum_{j \neq i} \left[\frac{[1] \partial (b_{i0} + z_{i0})}{\partial X_k} \cdot (\ddot{b}_{j0} + \ddot{z}_{j0}) - \frac{[1] \partial (b_{ij} + z_{ij})}{\partial X_k} \cdot (\ddot{b}_{ji} + \ddot{z}_{ji}) \right] \right\} = \tilde{X}_k \wedge_k Q_{\nu_k},$$

где Q_k — обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате X_k . Если r — радиус-вектор произвольного элемента dm и df — действующая на dm сила, то

$$Q_k = \int_{(V)} \frac{[1] \partial r}{\partial X_k} \cdot df,$$

где интегрирование производится по полному объему (V) системы.

Так как векторы b_{ij} являются неподвижными относительно тела (i), то можно применить формулы ([5])

$$(5) \quad \frac{[1] \partial b_{ij}}{\partial X_k} = \frac{[1] \partial \dot{b}_{ij}}{\partial \dot{X}_k} = \frac{[1] \partial \omega_i}{\partial \dot{X}_k} \cdot \dot{b}_{ij} \quad (i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n).$$

Если силы, действующие на систему, являются потенциальными, то $Q_k = -\frac{\partial \Pi}{\partial X_k}$, где $\Pi = \Pi(t, X_1, \dots, X_m)$ — потенциальная энергия системы.

Уравнения (4) можно записать и в следующем виде:

$$(6) \quad \tilde{X}_k \wedge_{\nu_k} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{[1] \partial \omega_i}{\partial X_k} \cdot (J_i \cdot \omega_i) - M \frac{[1] \partial (b_{i0} + z_{i0})}{\partial X_k} \cdot \left[\ddot{r}_0 - T_{ii} \ddot{z}_i - \sum_{j:s_j < s_i} (\ddot{d}_{ji} + T_{ji} \ddot{z}_j) \right] + M \sum_{j:s_j > s_i} \frac{[1] \partial (d_{ij} + T_{ij} z_i)}{\partial X_k} \cdot (\ddot{b}_{j0} + \ddot{z}_{j0}) + MT_{ii} \frac{[1] \partial z_i}{\partial X_k} \cdot \ddot{b}_{i0} \right\} = \tilde{X}_k \wedge_{\nu_k} Q_{\nu_k} \quad (k = 1, \dots, m).$$

Уравнения (6) следуют из преобразований

$$\sum_{j \neq i} \left[\frac{[1] \partial (b_{i0} + z_{i0})}{\partial X_k} \cdot (\ddot{b}_{j0} + \ddot{z}_{j0}) - \frac{[1] \partial (b_{ij} + z_{ij})}{\partial X_k} \cdot (\ddot{b}_{ji} + \ddot{z}_{ji}) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j:s_j \not\leq s_i} \left[\frac{[1] \partial(\mathbf{b}_{i0} + \mathbf{z}_{i0})}{\partial \mathbf{X}_k} \cdot (\ddot{\mathbf{b}}_{j0} + \ddot{\mathbf{z}}_{j0}) - \frac{[1] \partial(\mathbf{b}_{i0} + \mathbf{z}_{i0})}{\partial \mathbf{X}_k} \cdot (\ddot{\mathbf{b}}_{ji} + \ddot{\mathbf{z}}_{ji}) \right] \\
&+ \sum_{j:s_j > s_i} \left[\frac{[1] \partial(\mathbf{b}_{i0} + \mathbf{z}_{i0})}{\partial \mathbf{X}_k} \cdot (\ddot{\mathbf{b}}_{j0} + \ddot{\mathbf{z}}_{j0}) - \frac{[1] \partial(\mathbf{b}_{ij} + \mathbf{z}_{ij})}{\partial \mathbf{X}_k} \cdot (\ddot{\mathbf{b}}_{j0} + \ddot{\mathbf{z}}_{j0}) \right] \\
&= \sum_{j:s_j \not\leq s_i} \frac{[1] \partial(\mathbf{b}_{i0} + \mathbf{z}_{i0})}{\partial \mathbf{X}_k} \cdot (\ddot{\mathbf{b}}_{j0} - \ddot{\mathbf{b}}_{ji} + \ddot{\mathbf{z}}_{j0} - \ddot{\mathbf{z}}_{ji}) \\
&+ \sum_{j:s_j > s_i} \frac{[1] \partial(\mathbf{b}_{i0} - \mathbf{b}_{ij} + \mathbf{z}_{i0} - \mathbf{z}_{ij})}{\partial \mathbf{X}_k} \cdot (\ddot{\mathbf{b}}_{j0} + \ddot{\mathbf{z}}_{j0}).
\end{aligned}$$

Так как в первой сумме отличными от нуля являются только слагаемые, для которых $s_j < s_i$, то имея в виду формулы (1) и (2), получаем выражение

$$\frac{[1] \partial(\mathbf{b}_{i0} + \mathbf{z}_{i0})}{\partial \mathbf{X}_k} \cdot \sum_{j:s_j < s_i} (\ddot{\mathbf{d}}_{ji} + T_{ji} \ddot{\mathbf{z}}_j) + \sum_{j:s_j > s_i} \frac{[1] \partial(\mathbf{d}_{ij} + T_{ij} \mathbf{z}_i)}{\partial \mathbf{X}_k} \cdot (\ddot{\mathbf{b}}_{j0} + \ddot{\mathbf{z}}_{j0}),$$

из которого следуют уравнения (6).

Если представить радиус-вектор \mathbf{r} произвольной точки тела (i) как сумму $\mathbf{r}_{C_{ii}} + \boldsymbol{\rho}$, где $\mathbf{r}_{C_{ii}} = \overrightarrow{OC_{ii}}$, то обобщенная сила \mathbf{Q}_k преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_k &= \sum_{i=1}^n \int_{(V)} \frac{[1] \partial(\mathbf{r}_{C_{ii}} + \boldsymbol{\rho})}{\partial \mathbf{X}_k} df = \sum_{i=1}^n \left[\frac{[1] \partial \mathbf{r}_{C_{ii}}}{\partial \mathbf{X}_k} \int_{(V_i)} df + \frac{[1] \partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \mathbf{X}_k} \int_{(V)} \boldsymbol{\rho} df \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\frac{[1] \partial \mathbf{r}_{C_{ii}}}{\partial \mathbf{X}_k} \cdot \mathbf{F}_i + \frac{[1] \partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \mathbf{X}_k} \cdot \mathbf{M}_i \right],
\end{aligned}$$

где V_i — объем тела (i), а \mathbf{F}_i и \mathbf{M}_i — соответственно результирующая сила и результирующий момент относительно C_{ii} всех сил, действующих на тело (i). Используя то, что

$$(7) \quad \mathbf{r}_{C_{ii}} = \mathbf{r}_0 - \sum_{j:s_j < s_i} (\mathbf{d}_{ji} + T_{ji} \mathbf{z}_j) - T_{ii} \mathbf{z}_i,$$

получаем выражение

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_k &= \sum_{i=1}^n \left[- \sum_{j:s_j < s_i} \frac{[1] \partial(\mathbf{d}_{ji} + T_{ji} \mathbf{z}_j)}{\partial \mathbf{X}_k} \cdot \mathbf{F}_i - T_{ii} \frac{[1] \partial \mathbf{z}_i}{\partial \mathbf{X}_k} \cdot \mathbf{F}_i + \frac{[1] \partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \mathbf{X}_k} \cdot \mathbf{M}_i \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \left[- \sum_{j:s_j > s_i} \frac{[1] \partial(\mathbf{d}_{ij} + T_{ij} \mathbf{z}_i)}{\partial \mathbf{X}_k} \cdot \mathbf{F}_j + \frac{[1] \partial(-T_{ii} \mathbf{z}_i)}{\partial \mathbf{X}_k} \cdot \mathbf{F}_i + \frac{[1] \partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \mathbf{X}_k} \cdot \mathbf{M}_i \right].
\end{aligned}$$

Последняя сумма получена изменением порядка суммирования с последующей перестановкой индексов. Из проделанных вычислений, применяя формулы (7) и (5), записываем уравнения движения в виде

$$(8) \quad \begin{aligned} & \tilde{X}_k \wedge_{\nu_k} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{[1] \partial \omega_i}{\partial \tilde{X}_k} \cdot \left[(\mathbf{J}_i \cdot \omega_i)' - M \mathbf{b}_{i0} \times \ddot{\mathbf{r}}_{C_{ii}} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sum_{j:s_j > s_i} \mathbf{d}_{ij} \times (M \ddot{\mathbf{b}}_{j0} + M \ddot{\mathbf{z}}_{j0} + \mathbf{F}_j) - M_i \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{[1] \partial (-T_{ii} \mathbf{z}_i)}{\partial \tilde{X}_k} \cdot \left[\left(\sum_{j:s_j > s_i} m_j \right) \ddot{\mathbf{r}}_{C_{ii}} - M \ddot{\mathbf{b}}_{i0} - \mathbf{F}_i \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \sum_{j:s_j > s_i} (M \ddot{\mathbf{b}}_{j0} + M \ddot{\mathbf{z}}_{j0} + \mathbf{F}_j) \right] \right\} = \tilde{X}_k \wedge_{\nu_k} \mathbf{O}_{\nu_k}, \end{aligned}$$

где $k = 1, \dots, m$, а \mathbf{O}_{ν_k} — нулевой тензор валентности ν_k .

Уравнения (8) имеют следующий механический смысл. Выражение $(\mathbf{J}_i \cdot \omega_i)' - M \mathbf{b}_{i0} \times \ddot{\mathbf{r}}_{C_{ii}}$ является изменением кинетического момента дополненного тела (i) относительно точки C_{ii} . Если предположить, что в каждой шарнирной точке тела (i) действует сила, которая является суммой векторов $M \ddot{\mathbf{b}}_{j0} + M \ddot{\mathbf{z}}_{j0} + \mathbf{F}_j$, где j — номера тех тел системы, которые связаны с телом (i) посредством этой шарнирной точки, то результирующий момент всех сил, действующих на тело (i) , выражается вектором

$$-\mathbf{d}_{ij} \times \sum_{j:s_j > s_i} (M \ddot{\mathbf{b}}_{j0} + M \ddot{\mathbf{z}}_{j0} + \mathbf{F}_j) + M_i$$

и равенство

$$(9) \quad \mathbf{K}_i = (\mathbf{J}_i \cdot \omega_i)' - M \mathbf{b}_{i0} \times \ddot{\mathbf{r}}_{C_{ii}} - \left[-\mathbf{d}_{ij} \times \sum_{j:s_j > s_i} (M \ddot{\mathbf{b}}_{j0} + M \ddot{\mathbf{z}}_{j0} + \mathbf{F}_j) \right] - M_i = 0$$

выражает теорему о кинетическом моменте (рис. 1а).

Для шарнирного вектора $\mathbf{z}_i = \overrightarrow{C_{i+(i)} C_{i-(i)}}$ независимо от выбора направления дуги u_i графа системы, вектор $-T_{ii} \mathbf{z}_i$ направлен от тела (0) к телу (i) , т. е. его начальная точка G_i находится на теле, предшествующем телу (i) , а его концом всегда является точка C_{ii} (рис. 1б). Полагая, что точки G_i и C_{ii} имеют массы $\sum_{j:s_j \neq s_i} m_j$ и $\sum_{j:s_j \geq s_i} m_j$ соответственно и что

на точку C_{ii} действует сила

$$M \ddot{\mathbf{b}}_{i0} + \mathbf{F}_i + \sum_{j:s_j > s_i} (M \ddot{\mathbf{b}}_{j0} + M \ddot{\mathbf{z}}_{j0} + \mathbf{F}_j),$$

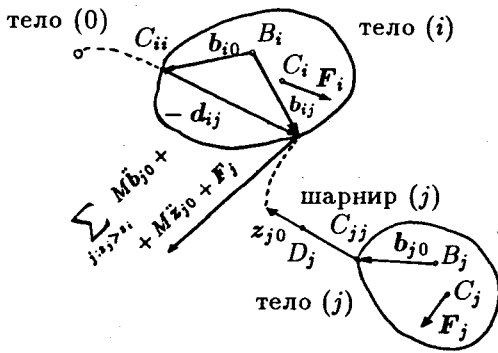


Рис. 1а

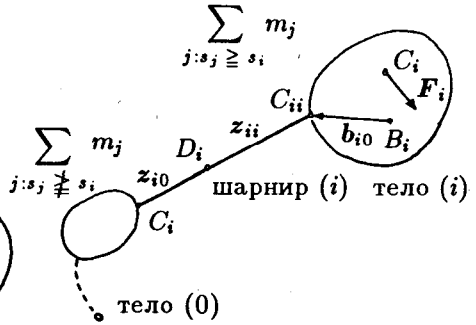


Рис. 16

то абсолютное движение точки C_{ii} определяется уравнением (рис. 16)

$$L_i = \left(\sum_{j:s_j \geq s_i} m_j \right) \ddot{r}_{C_{ii}} - \left[M\ddot{b}_{i0} + F_i + \sum_{j:s_j > s_i} (M\ddot{b}_{j0} + M\ddot{z}_{j0} + F_j) \right] = 0.$$

Если обозначить через D_j центр масс системы из двух точек G_j и C_{jj} , то $\overrightarrow{D_j G_j} = z_{j0}$, $\overrightarrow{D_j C_{jj}} = z_{jj}$, и вектор $M\ddot{z}_{j0}$ можно рассматривать как силу, с которой стержень массы M с центром масс D_j и ускорением \ddot{z}_{j0} действует на свою опорную точку G_i (рис. 16). Подобным образом вектор $M\ddot{b}_{j0} + F_j$ в равенстве (9) является силой, с которой дополнительное тело (j) с центром масс B_j при его движении вокруг неподвижной точки C_{jj} действует на эту точку, в предположении, что дополнительное тело (j) находится под воздействием силы F_j .

В уравнениях (8) производные $\frac{[1] \partial \omega_i}{\partial X_k}$ и $\frac{[1] \partial (-T_{ii} z_i)}{\partial X_k}$ отражают влияние векторов K_i и L_i на уравнения движения. Например, если шарнирный вектор z_i не зависит от координаты X_k , то

$$\frac{[1] \partial (-T_{ii} z_i)}{\partial X_k} \cdot L_i = 0,$$

если $X_i = \theta$ — угол вращения тела (i) относительно некоторой неподвижной оси ξ , то

$$\frac{[1] \partial \omega_i}{\partial \theta_k} = \xi, \quad \frac{[1] \partial \omega_i}{\partial \theta_k} \cdot K_i = \xi \cdot K_i.$$

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ТЕЛ, СВЯЗАННЫЕ МЕЖДУ СОБОЙ ИДЕАЛЬНЫМИ СТРУНАМИ

Рассмотрим систему тел, для которой выполнены следующие условия: система находится под действием силы тяжести, тело (0) — неподвижное ($r_0(t) \equiv 0$), тела системы имеют динамические оси симметрии и связаны между собой в концах своих осей симметрии абсолютно нерастяжимыми, лишенными массой струнами, которые остаются натянутыми во время движения. При наличии таких сочленений удобно рассматривать движение каждого тела относительно его предшествующего тела и, таким образом, $i^-(i) = i$. Отсюда следует также, что все различные от нуля элементы матрицы T равняются -1 .

В качестве шарнирных точек, определяющих вектор z_i , выбираем концы осей симметрии соседних тел, связанных посредством шарнира (i), а в качестве координатного вектора $e_3^{(i)}$, неизменно связанного с телом (i) базиса $\underline{e}^{(i)} = (e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, e_3^{(i)})^T$ — единичный вектор его оси симметрии с направлением от точки $P_i = C_{ii}$ к центру масс C_i . Инерциальную координатную систему, для которой предполагаем, что вектор $e_3^{(0)}$ имеет противоположное силе тяжести направление, обозначаем через $Oe_1^{(0)}e_2^{(0)}e_3^{(0)}$.

Положение тела (i) по отношению к предшествующему телу очевидно определяется пятью скалярными параметрами. Это положение можно определить единичным вектором $u_i = \frac{z_i}{|z_i|}$ и ортонормированным тензором Γ_i , которым задается абсолютное движение базиса $\underline{e}^{(i)}$. Величины $u_1, \dots, u_n, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ принимаем за обобщенные координаты рассматриваемой системы.

Легко увидеть, что от переменной u_i зависят только векторы z_{i0}, \dots, z_{in} , а от переменной Γ_i — векторы $\omega_i, b_{i0}, \dots, b_{in}$ и тензор J_i , при том (так как $|z_{ij}| = \text{const}$)

$$(10) \quad \tilde{u}_i \cdot \frac{[1] \partial z_{ij}}{\partial \tilde{u}_i} = |z_{ij}| \tilde{u}_i \cdot E_2 = \tilde{z}_{ij}, \quad \tilde{\Gamma}_i \cdot \frac{[1] \partial \omega_i}{\partial \tilde{\Gamma}_i} = E_2$$

($i = 1, \dots, n, j = 0, \dots, n$). С учетом формул (10) и, принимая во внимание, что потенциальная энергия системы выражается формулой

$$\Pi = Mgr_C \cdot e_3^{(0)} = -Mg \sum_{j=1}^n (b_{j0} + z_{j0}) \cdot e_3^{(0)},$$

для уравнений движения (4) находим

$$(11) \quad (J_i \cdot \omega_i)' + M \sum_{j \neq i} \left[b_{i0} \times (\ddot{b}_{j0} + \ddot{z}_{j0}) - b_{ij} \times (\ddot{b}_{ji} + \ddot{z}_{ji}) \right] - Mb_{i0} \times \ddot{z}_i - Mgb_{i0} \times e_3^{(0)} = 0,$$

$$M \sum_{j \neq i} \left[z_{i0} \times (\ddot{b}_{j0} + \ddot{z}_{j0}) - z_{ij} \times (\ddot{b}_{ji} + \ddot{z}_{ji}) \right] - M z_{i0} \times \ddot{z}_i - M z_i \times \ddot{b}_{i0} - M g z_{i0} \times e_3^{(0)} = 0,$$

где $i = 1, \dots, n$.

Число эквивалентных уравнениям (11) скалярных уравнений равняется $3n + 2n = 5n$, что совпадает с числом степеней свободы системы.

Для каждого тела (j) длина l_j оси симметрии и величины

$$c_j = |C_j P_j|, \quad \mu_j = -\frac{1}{M} \sum_{i=1}^n T_{ji} m_i = \frac{1}{M} \sum_{i: s_i \geq s_j} m_i,$$

$$b_j = \frac{1}{M} \left[(c_j - l_j) m_j - l_j \sum_{i=1}^n T_{ji} m_i \right] = \frac{1}{M} (c_j - l_j) m_j + l_j \mu_j$$

являются постоянными. С их помощью векторы b_{j0} и b_{ji} выражаются формулами

$$(12) \quad b_{j0} = -b_j e_3^{(j)}, \quad b_{ji} = -(T_{ji} l_j + b_j) e_3^{(j)} \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Векторы z_j , z_{j0} и z_{ji} представляем в виде

$$(13) \quad z_j = p_j u_j, \quad p_j = \text{const}; \quad z_{j0} = -d_j u_j, \quad d_j = \mu_j p_j; \\ z_{ij} = -(T_{ji} p_j + d_j) u_j \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Используя равенство $T_{ij} T_{ji} = 0$ и обозначая

$$(14) \quad g_{ij} = -M(T_{ij} l_j b_j + T_{ji} l_j b_i) = g_{ji}, \\ \nu_{ij} = -M(T_{ij} p_i d_j + T_{ji} p_j d_i) = \nu_{ji}, \\ \lambda_{ij} = -M(T_{ij} l_i d_j + T_{ji} p_j b_i), \\ \lambda_{ii} = M b_i p_i, \quad \nu_{ii} = M p_{ii} d_i,$$

с учетом формул (12) и (13) получаем

$$(J_i \cdot \omega_i) + \sum_{j \neq i} g_{ij} e_3^{(i)} \times \ddot{e}_3^{(j)} + \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} e_3^{(i)} \times \ddot{u}_j + M g b_i e_3^{(i)} \times e_3^{(0)} = 0, \\ u_i \times \left[\sum_{j=1}^n \lambda_{ji} \ddot{e}_3^{(j)} + \sum_{j=1}^n \nu_{ij} \ddot{u}_j + M g d_i e_3^{(0)} \right] = 0.$$

Используя обстоятельство, что тела системы — осесимметрические, можно представить уравнения движения в виде

$$(J_i \cdot \omega_i) \cdot e_3^{(i)} = a_i,$$

$$(15) \quad e_3^{(i)} \times \left[(\bar{e}_3^{(i)} \cdot J_i) \cdot \dot{\omega}_i + (a_i E_2 - \omega_i \cdot e_3^{(i)} J_i) \cdot \omega_i + \sum_{j \neq i} g_{ij} \ddot{e}_3^{(i)} + \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \times \ddot{u}_j \right] + Mgb_i e_3^{(i)} \times e_3^{(0)} = 0,$$

$$(16) \quad u_i \times \left[\sum_{j=1}^n \lambda_{ji} \ddot{e}_3^{(j)} + \sum_{j=1}^n \nu_{ji} \ddot{u}_j + Mgd_i e_3^{(0)} \right] = 0,$$

где a_1, \dots, a_n — произвольные скалярные величины.

3. СТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

Угловое положение базиса $\underline{e}^{(i)}$ по отношению к инерциальному базису $\underline{e}^{(0)}$ можно определить, как известно, тремя скалярными параметрами. В качестве таких параметров выбирают углы трех последовательных поворотов, переводящих базис $\underline{e}^{(0)}$ в базис $\underline{e}^{(i)}$. При этом обычно последний поворот имеет ось вращения $e_3^{(i)}$. Обозначая угол вращения вокруг $e_3^{(i)}$ через φ_i , можно записать, что абсолютная угловая скорость ω_i выражается формулой $\omega_i = \Omega_i + \dot{\varphi}_i e_3^{(i)}$, где как показано в [6], произведение $\Omega_i \cdot e_3^{(i)}$ не зависит от угла φ_i . Тогда из соотношений $(J_i \cdot \omega_i) \cdot e_3^{(i)} = J_3^{(i)} (\Omega_i \cdot e_3^{(i)} + \dot{\varphi}_i) = a_i$, где $J_3^{(i)}$ — главный момент инерции дополненного тела (i) относительно $e_3^{(i)}$, можно определить величины φ_i ($i = 1, \dots, n$). Следовательно, координаты $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ являются циклическими. Известно, что в таком случае система может совершать стационарные движения, в которых явно входящие в уравнения координаты (позиционные) и скорости циклических координат сохраняют свои начальные значения.

Для рассматриваемой системы стационарными являются те движения, при которых остов системы, составленный из осей тел и соединяющих их струн, остается неподвижным относительно базиса, вращающегося вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\psi e_3^{(0)}$, $\dot{\psi} = \text{const}$, а тела вращаются равномерно вокруг своих осей симметрии. Таким образом, абсолютная угловая скорость тела (i) выражается равенством

$$\omega_i = \psi e_3^{(0)} + \dot{\varphi}_i e_3^{(i)}.$$

Для производных векторов $e_3^{(i)}$ и u_i имеем

$$\begin{aligned} \dot{e}_3^{(i)} &= \psi e_3^{(0)} \times e_3^{(i)}, & \ddot{e}_3^{(i)} &= \dot{\psi}^2 e_3^{(0)} \times (e_3^{(0)} \times e_3^{(i)}), \\ \dot{u}_i &= \dot{\psi} e_3^{(0)} \times u_i, & \ddot{u}_i &= \dot{\psi}^2 e_3^{(0)} \times (e_3^{(0)} \times u_i) \quad (i = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Аналогичным образом вычисляются производные векторов

$$s_i = \sum_{j \neq i} g_{ij} e_3^{(i)} + \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \times u_j,$$

$$(17) \quad \mathbf{t}_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ji} \mathbf{e}_3^{(i)} + \sum_{j=1}^n \nu_{ji} \mathbf{u}_j.$$

После несложных преобразований находим из (15) и (16), что уравнения движения записываются в виде

$$(18) \quad (\dot{\psi} \mathbf{e}_3^{(0)} + \dot{\varphi}_i \mathbf{e}_3^{(i)}) \cdot \mathbf{J}_i \cdot \mathbf{e}_3^{(i)} = a_i,$$

$$\mathbf{e}_3^{(i)} \times \left[\dot{\psi} (-a_i \mathbf{E}_2 + \dot{\psi} (\mathbf{e}_3^{(i)} \cdot \mathbf{e}_3^{(0)}) \mathbf{J}_i) \mathbf{e}_3^{(0)} + \dot{\psi}^2 \mathbf{e}_3^{(0)} \times (\mathbf{e}_3^{(0)} \times \mathbf{s}_i) + M g b_i \mathbf{e}_3^{(0)} \right] = 0,$$

$$\mathbf{u}_i \times \left[\dot{\psi}^2 \mathbf{e}_3^{(0)} \times (\mathbf{e}_3^{(0)} \times \mathbf{t}_i) + M g d_i \mathbf{e}_3^{(0)} \right] = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Используя координатное представление тензора \mathbf{J}_i в базисе $\underline{\mathbf{e}}^{(i)}$

$$\mathbf{J}_i = \underline{\mathbf{e}}^{(i)\text{T}} \begin{pmatrix} J_1^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & J_1^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & J_3^{(i)} \end{pmatrix} \underline{\mathbf{e}}^{(i)},$$

где $J_1^{(i)}$ и $J_3^{(i)}$ — главные моменты инерции дополненного тела (i) относительно его предшествующей точки P_i , записываем первые два уравнения в (18) в виде

$$(19) \quad J_3^{(i)} (\dot{\psi} \mathbf{e}_3^{(0)} \cdot \mathbf{e}_3^{(i)} + \dot{\varphi}_i) = a_i,$$

$$\mathbf{e}_3^{(i)} \times (x_i \mathbf{e}_3^{(0)} - \dot{\psi}^2 \mathbf{s}_i) = 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

где постоянные x_1, \dots, x_n определяются равенствами

$$(20) \quad x_i = -a_i \dot{\psi} + \dot{\psi}^2 \mathbf{e}_3^{(0)} \cdot (J_1^{(i)} \mathbf{e}_3^{(i)} + \mathbf{s}_i) + M g b_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Таким образом, так как a_1, \dots, a_n — произвольные, задача нахождения стационарных движений сводится к определению единичных векторов $\mathbf{e}_3^{(1)}, \dots, \mathbf{e}_3^{(n)}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ и постоянных x_1, \dots, x_n , удовлетворяющих уравнениям

$$(21) \quad \mathbf{e}_3^{(i)} \times (x_i \mathbf{e}_3^{(0)} - \dot{\psi}^2 \mathbf{s}_i) = 0,$$

$$(22) \quad \mathbf{u}_i \times \left[\dot{\psi}^2 \mathbf{e}_3^{(0)} \times (\mathbf{e}_3^{(0)} \times \mathbf{t}_i) + M g d_i \mathbf{e}_3^{(0)} \right] = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

После нахождения этих величин, угловые скорости $\dot{\varphi}_i$ определяются из равенств (19) и (20).

Очевидно, если в каждый момент времени векторы $\mathbf{e}_3^{(1)}, \dots, \mathbf{e}_3^{(n)}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ и $\mathbf{e}_3^{(0)}$ остаются компланарными, то $\mathbf{e}_3^{(i)} \times \mathbf{e}_3^{(0)}$ и $\mathbf{e}_3^{(i)} \times \mathbf{s}_i$ являются коллинеарными и постоянные x_1, \dots, x_n можно найти из равенств (21). Следовательно, достаточно определить такие единичные векторы $\mathbf{e}_3^{(1)}, \dots, \mathbf{e}_3^{(n)}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$, которые лежат в одной вертикальной плоскости и удовлетворяют равенствам (22). С этой целью выбираем произвольные компланарные с вектором $\mathbf{e}_3^{(0)}$ единичные векторы $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$, для которых

$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{e}_3^{(0)} \neq 0$ ($i = 1, \dots, n$). Из равенств (22) следует, что векторы $\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n$ должны удовлетворять условиям

$$\mathbf{e}_3^{(0)} \times \left[\mathbf{e}_3^{(0)} \times \left(\psi^2 \mathbf{t}_i + \frac{Mgd_i}{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{e}_3^{(0)}} \mathbf{u}_i \right) \right] = 0,$$

т. е.

$$\psi^2 \mathbf{t}_i + \frac{Mgd_i}{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{e}_3^{(0)}} \mathbf{u}_i = My_i p_i \mathbf{e}_3^{(0)} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Здесь y_1, \dots, y_n — постоянные. Выражая векторы \mathbf{t}_i по формулам (17) и (14), получаем систему

$$\begin{aligned} - \sum_{j=1}^n (T_{ji} \mu_i l_j + T_{ij} b_j) \mathbf{e}_3^{(j)} + \mu_i l_i \mathbf{e}_3^{(i)} - \sum_{j=1}^n (T_{ji} \mu_i p_j + T_{ij} d_j) \mathbf{u}_j + p_i \mu_i \mathbf{u}_i \\ + \frac{g \mu_i}{\psi^2 (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{e}_3^{(0)})} \mathbf{u}_i = y_i \mathbf{e}_3^{(0)} \quad (i = 1, \dots, n), \end{aligned}$$

которая по отношению к величинам $\mathbf{e}_3^{(1)}, \dots, \mathbf{e}_3^{(n)}$ является линейной. Введем n -мерные матрицы-столбцы $\underline{\mu}$, \underline{b} , \underline{d} , \underline{p} , \underline{y} , \underline{e} , \underline{u} , и $\underline{\beta}$ соответственно с элементами μ_i , b_i , d_i , p_i , y_i , $\mathbf{e}_3^{(i)}$, \mathbf{u}_i и $\beta_i = \frac{g \mu_i}{\psi^2 (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{e}_3^{(0)})}$ ($i = 1, \dots, n$). С их помощью получаем матричное уравнение

$$\begin{aligned} [-\text{diag } \underline{\mu} (\underline{T}^T + \underline{E}) \text{diag } \underline{l} - \underline{T} \text{diag } \underline{b}] \underline{e} + [-\text{diag } \underline{\mu} (\underline{T}^T + \underline{E}) \text{diag } \underline{p} - \underline{T} \text{diag } \underline{d}] \underline{u} \\ + \text{diag } \underline{\beta} \underline{u} = \underline{y} \mathbf{e}^{(0)}, \end{aligned}$$

которое умножением слева на матрицу $-\underline{S} = -\underline{T}^{-1}$ приводим в треугольный вид. Действительно, матрица

$$\underline{A} = -\underline{S} \left[-\text{diag } \underline{\mu} (\underline{T}^T + \underline{E}) \text{diag } \underline{l} - \underline{T} \text{diag } \underline{b} \right]$$

имеет элементы A_{ij} , которые выражаются равенствами

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n S_{ik} T_{jk} \mu_k l_j + S_{ij} \mu_j l_j + \delta_{ij} b_j = -S_{ij} \mu_j l_j - \sum_{k:s_k > s_j} S_{ik} \mu_k l_j + S_{ij} \mu_j l_j + \delta_{ij} b_j,$$

где δ_{ij} — символы Кронекера. Элементы S_{ik} матрицы \underline{S} — ненулевые только в случаях $i = i^-(k)$, когда $S_{ik} = S_{ii} = -1$ и $i = i^+(k)$, когда $S_{ik} = 1$. Если через U_i обозначим множество номеров тех струн, для которых тело (i) является предшествующим, т. е. $U_i = \{k : i = i^+(k)\}$, то

$$- \sum_{k:s_k > s_j} S_{ik} \mu_k l_j = \begin{cases} \left(\sum_{k \in U_i} \mu_k \right) l_i, & \text{если } s_i = s_j \\ \mu_i l_j - \left(\sum_{k \in U_i} \mu_k \right) l_j, & \text{если } s_i > s_j \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Используя, что

$$\mu_i = \frac{m_i}{M} + \sum_{k \in U_i} \mu_k, \quad b_i = \frac{1}{M}(c_j - l_j)m_j + l_j \mu_j,$$

находим

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{m_i c_i}{M}, & \text{если } i = j \\ \frac{m_i l_j}{M}, & \text{если } s_i > s_j \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

т. е. $A_{ij} = -T_{ji} \frac{m_i l_j}{M}$ при $i \neq j$, $A_{ii} = \frac{m_i c_i}{M}$.

Подобным образом вычисляем элементы $B_{ij} = -T_{ji} \frac{m_i p_j}{M}$ матрицы $B = -S \left[-\text{diag } \underline{\mu}(T^T + E) \text{diag } \underline{p} - T \text{diag } \underline{d} \right]$, откуда получаем систему

$$(23) \quad \frac{m_i c_i}{M} e_3^{(i)} + \frac{m_i}{M} \left[-\sum_{j \neq i} T_{ji} (l_j e_3^{(j)} + p_j u_j) + p_i u_i \right] - \sum_{j=1}^n S_{ij} \beta_j u_j = \frac{m_i y'_i}{M} e_3^{(0)}.$$

Выражение в квадратных скобках является радиус-вектором r_{P_i} предшествующей шарнирной точки P_i , а величины $y' = -\frac{M}{m_i} \sum_{j=1}^n S_{ij} y_j$ — произвольные. Вектор

$$h_i = -\frac{M}{m_i} \sum_{j=1}^n S_{ij} \beta_j u_j = \frac{gM}{\psi^2 m_i} \left[\frac{\mu_i}{u_i \cdot e_3^{(0)}} u_i - \sum_{j \in U_i} \frac{\mu_j}{u_j \cdot e_3^{(0)}} u_j \right]$$

является функцией тех из единичных векторов u_1, \dots, u_n , которые определяют прилежащие к телу (i) шарнирные векторы. Пусть $(e_2, e_3^{(0)})$ — ортонормированный базис плоскости, в которой расположены векторы u_1, \dots, u_n . Пусть α_i — угол между векторами $e_3^{(0)}$ и u_i с положительным направлением отсчета, определяемое вектором $e_1 = e_2 \times e_3^{(0)}$. Векторы u_i и h_i имеют представление

$$u_i = -\cos \alpha_i e_3^{(0)} + \sin \alpha_i e_2,$$

$$(24) \quad h_i = \frac{g}{\psi^2} e_3^{(0)} - \frac{gM}{\psi^2 m_i} \left[\mu_i \text{tg } \alpha_i - \sum_{j \in U_i} \mu_j \text{tg } \alpha_j \right] e_2.$$

Наконец, постоянные y'_i нужно определить таким образом, чтобы удовлетворяющие уравнениям

$$(25) \quad c_i e_3^{(i)} + r_{P_i} + h_i = y'_i e_3^{(0)}$$

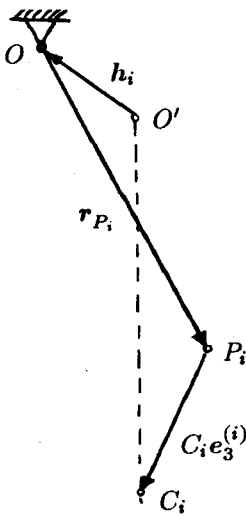


Рис. 2

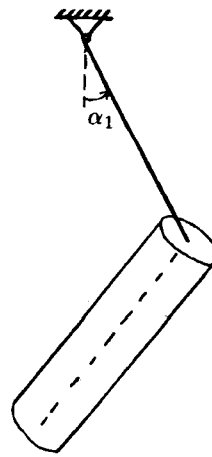


Рис. 3

векторы $e_3^{(1)}, \dots, e_3^{(n)}$ были единичными. Из условий существования реальных решений уравнений

$$(26) \quad |e_3^{(i)}|^2 = \frac{1}{c_i^2} \left[y_i'^2 - 2e_3^{(0)} \cdot (r_{P_i} + h_i) y_i' + (r_{P_i} + h_i)^2 \right] = 1$$

получаем неравенства $|(r_{P_i} + h_i) \cdot e_2| \leq c_i$, которые при помощи (24) записываем в виде

$$(27) \quad \frac{gM\mu_i}{\psi^2 m_i} \operatorname{tg} \alpha_i - (r_{P_i} \cdot e_2) - c_i \leq \frac{gM}{\psi^2 m_i} \sum_{j \in U_i} \mu_j \operatorname{tg} \alpha_j \leq \frac{gM\mu_i}{\psi^2 m_i} \operatorname{tg} \alpha_i - (r_{P_i} \cdot e_2) + c_i.$$

По отношению к величинам $\operatorname{tg} \alpha_j$, $j \in U_i$, эти неравенства являются линейными и при заданных α_i , r_{P_i} и c_i всегда имеют решения.

Для каждого крайнего тела (l) системы, т. е. тело, которое имеет только одну шарнирную точку, множество U_l — пустое. Тогда неравенство (27) имеет вид

$$(28) \quad \left| \frac{gM\mu_l}{\psi^2 m_l} \operatorname{tg} \alpha_l - (r_{P_l} \cdot e_2) \right| \leq c_l$$

и его нужно рассматривать вместе с неравенствами вида (25), которые относятся к предшествующему (l) телу. Так как в выражении для вектора r_{P_l} входит слагаемое $r_l u_l$, то в произведении $r_{P_l} \cdot e_2$ содержится слагаемое $r_l u_l \cdot e_2 = r_l \sin \alpha_l$ и, таким образом, неравенство (28) не является линейным относительно $\operatorname{tg} \alpha_l$.

Уравнения (25) и неравенства (27) имеют простую геометрическую интерпретацию. Уравнение (25) выражает условие коллинеарности вектора $\overrightarrow{O'C_i} = h_i + r_{P_i} + c_i e_3^{(i)}$ вектору $e_3^{(0)}$, а неравенство (27) накладывает ограничение на вектор h_i , при котором возможен такой выбор величины $y_i = |\overrightarrow{O'C_i}|$, чтобы $|\overrightarrow{P_i C_i}| = c_i$ (рис. 2).

Векторы $e_3^{(1)}, \dots, e_3^{(n)}$ и ограничения для векторов u_1, \dots, u_n находим последовательно. При $i = 1$, если $n > 1$, вектор u_1 выбираем произвольно, а векторы $u_j, j \in U_i$ — таким образом, чтобы неравенства (27) выполнялись. Потом определяем y_i' из равенства (26) и $e_i^{(i)}$ — из (25) и т. д. В случае $n = 1$ вектор u_1 определяется из неравенства (28) при $l = 1$.

Отметим, что система (25) упрощается значительно, если умножим соответствующее ей матричное уравнение слева на матрицу $-\underline{S}^T = -(\underline{T})^{-1}$. Тогда получаем систему

$$(29) \quad e_3^{(1)} = \frac{1}{c_1}(p_1 u_1 - h_1) + y_1'' e_3^{(0)},$$

$$e_3^{(i)} = \frac{1}{c_i} \left[(c_{i+(i)} - l_{i+(i)}) e_3^{i+(i)} - p_i u_i - h_i + h_{i+(i)} \right] + y_i'' e_3^{(0)}$$

($i = 1, \dots, n$), где вектор $h_{i+(i)} - h_i$ является коллинеарным вектору e_2 , а величины y_i'' определяем так, чтобы $|e_3^{(i)}| = 1$. Из последнего получаем, что углы $\alpha_j, j \in U_i$, удовлетворяют неравенству

$$(30) \quad \left| \left[(c_{i+(i)} - l_{i+(i)}) e_3^{i+(i)} - p_i u_i - h_i + h_{i+(i)} \right] \cdot e_2 \right| \leq c_i.$$

В формулах (29) и (30) векторы $e_3^{(i)}$ и $u_j, j \in U_i$, выражаются посредством векторов $e_3^{i+(i)}, u_{i+(i)}$ и $h_{i+(i)}$, т. е. тех из векторов u_1, \dots, u_n , которые определяют прилежащие к телу ($i^{+(i)}$) шарнирные векторы.

4. ПРИМЕРЫ

1. Пусть $n = 1$ (рис. 3). Вычисляя постоянные величины для рассматриваемой системы, получаем

$$b_1 = c_1, \quad d_1 = p_1, \quad \lambda_{11} = m_1 c_1 p_1, \quad \nu_{11} = m_1 p_1^2,$$

$$s_1 = m_1 c_1 p_1 u_1, \quad t_1 = m_1 c_1 p_1 e_3^{(1)} + m_1 p_1^2 u_1,$$

$$h_1 = \frac{g}{\psi^2} (e_3^{(0)} + \operatorname{tg} \alpha_1 e_2) \parallel u_1.$$

Вектор $e_3^{(1)}$ определяется из равенства

$$c_1 e_3^{(1)} + p_1 u_1 + h_1 = y_1' e_3^{(0)},$$

а для угла α_1 получаем неравенство

$$p_1 \sin \alpha_1 - c_1 \leq \frac{g}{\psi^2} \operatorname{tg} \alpha_1 \leq p_1 \sin \alpha_1 + c_1.$$

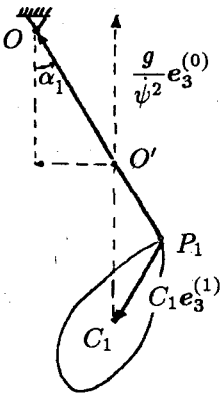


Рис. 4а

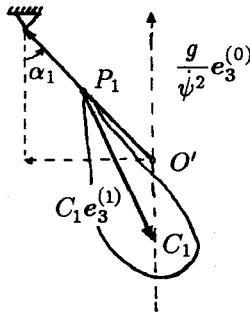


Рис. 4б

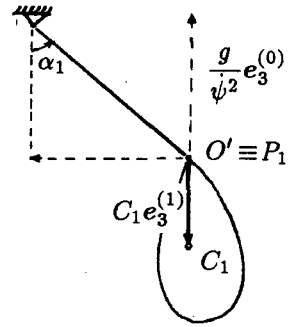


Рис. 4в

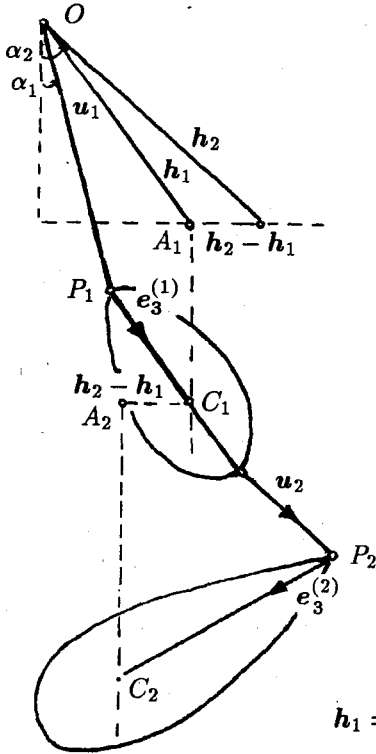


Рис. 5

Геометрическое построение решения представлено на рис. 4. Случай 4а) получается, если $|p_1 \sin \alpha_1| > \left| \frac{g}{\psi^2} \operatorname{tg} \alpha_1 \right|$, если $|p_1 \sin \alpha_1| < \frac{g}{\psi^2} \left| \operatorname{tg} \alpha_1 \right|$ имеем рис. 4б), а случай 4в), когда $|p_1 \sin \alpha_1| = \left| \frac{g}{\psi^2} \operatorname{tg} \alpha_1 \right|$ — невозможен. Действительно, тогда из равенство (21) следует, что

$$x_1 = \frac{\psi^2 \sin \alpha_1}{|e_3^{(1)} \times e_3^{(0)}|} = \infty,$$

откуда, принимая в виду (19) и (20), имеем $\varphi_1 = \infty$.

2. Если $n = 2$, уравнения имеют вид

$$c_1 e_3^{(1)} + p_1 u_1 + h_1 = y_1'' e_3^{(0)},$$

$$(l_1 - c_1) e_3^{(1)} + p_2 u_2 + h_2 - h_1 = y_2'' e_3^{(0)}.$$

где

$$h_1 = \frac{g}{\psi^2} (e_3^{(0)} + \operatorname{tg} \alpha_1 e_2) + \frac{g}{\psi^2} \frac{m_2}{m_1} (\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2) e_2,$$

$$h_2 = \frac{g}{\psi^2} (e_3^{(0)} + \operatorname{tg} \alpha_2 e_2).$$

Соответствующее геометрическое изображение представлено на рис. 5. Угол α_1 считаем произвольный, а α_2 нужно выбрать таким образом, чтобы векторы $\overrightarrow{A_1 C_1}$ и $\overrightarrow{A_2 C_2}$ были коллинеарными вектору $e_3^{(0)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Темченко, М. Е. О стационарных движениях двух связанных тел. Динамика и устойчивость сложных систем. — И-т математики АН УССР, 1981, 95–105.
2. Ишлинский, А. Ю. О разветвлении устойчивых положений динамического равновесия одной механической системы. — Прикладные задачи механики, т. 2, М., Наука, 1986, 94–106.
3. Ишлинский, А. Ю. Метод балансировки вращающихся тел на струнном подвесе. — Прикладные задачи механики, т. 2, М., Наука, 1986, 123–140.
4. Витенбург, Й. Динамика систем твердых тел, М., Мир, 1980.
5. Василева, Н., Л. Лилов. Тензорная форма управлений Лагранжа. — Год. Соф. унив., Фак. мат. и информ., 82, кн. 2 — Механика, 1988.
6. Василева, Н., Л. Лилов. Устойчивость стационарных движений системы гироскопов Лагранжа со структурой дерева. — Теоретична и приложна механика., С., 1987, год. XVIII, №1.

Поступила 12.03.1991

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Книга 2 — Механика

Том 84, 1990

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Livre 2 — Mécanique

Tome 84, 1990

ПРОБЛЕМЫ, СВЯЗАННЫЕ С УПРАВЛЯЕМЫМИ НЕГОЛОНОМНЫМИ СИСТЕМАМИ

СОНЯ ДЕНЕВА, ВАСИЛ ДИАМАНДИЕВ

Соня Денева, Васил Диамандиев. ПРОБЛЕМЫ, СВЯЗАННЫЕ С УПРАВЛЯЕМЫМИ
НЕГОЛОНОМНЫМИ СИСТЕМАМИ

В работе рассмотрены примеры нелинейных неголономных связей первого порядка.

Sonia Deneva, Vasil Diamandiev. PROBLEMS, CONNECTED WITH CONTROLLED NON-HOLONOMIC CONSTRAINTS

In this paper some examples of nonholonomic systems with nonlinear constraints are examined.

В настоящей работе рассматриваются неголономные системы из взаимосвязанных твердых тел, которые часто применяются в технике. Как показал Н. Кирчетов [1], для управления движением механической системы могут быть использованы т. н. управляемые связи. Кроме силового, возможно также и кинематическое управление движением, основанное на выборе соответствующих режимов изменения управляемых связей. В технике можно указать на целые области применения кинематических управляемых систем, но теоретически это направление еще не достаточно развито. Как первый пример в предлагаемой работе рассматривается редуктор с переменным числом передач. Он состоит из двух валов, которые связаны между собой колесом передачи радиуса r (рис. 1). Вал C , жестко связанный с колесом передачи, вращается около своей оси с угловой

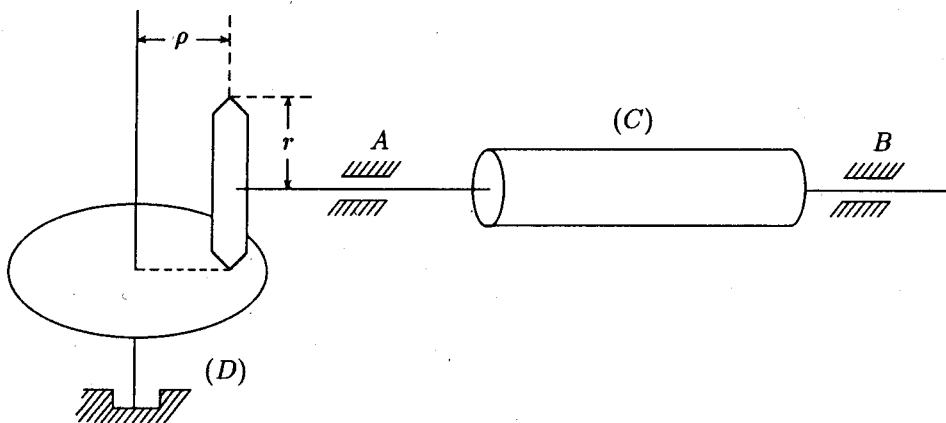


Рис. 1

скоростью $\dot{\varphi}_1$. Колесо своим острым краем зацепляется за маховик вала D и приводит его во вращение с угловой скоростью $\dot{\varphi}_2$. Вращаясь, вал C может перемещаться поступательно по своей оси так, что расстояние ρ от точки контакта колеса с маховиком до оси последнего является некоторой функцией времени, т. е.

$$(1) \quad \rho = \rho(t).$$

Так как в направлении вращения колесо не проскальзывает, то в его точке контакта с маховиком линейные скорости двух вращательных движений одинаковы, т. е. имеем

$$(2) \quad r\dot{\varphi}_1 = \rho(t)\dot{\varphi}_2.$$

Очевидно, неголономная связь системы (2) неинтегрируема. Параметрами системы являются величины φ_1 , φ_2 и ρ . Из-за соотношения (2) только два из них независимы.

Кинетическая энергия системы имеет вид

$$(3) \quad T = \frac{J_1}{2}\dot{\varphi}_1^2 + \frac{J_k}{2}\dot{\varphi}_2^2 + \frac{J_2}{2}\dot{\varphi}_2^2 + \frac{m}{2}\dot{\rho}^2,$$

где J_1 и J_2 — моменты инерции валов относительно их оси, J_k — момент инерции колеса передачи относительно его центра, m — сумма масс первого вала и колеса. Элементарная работа, действующих на систему сил, записывается следующим образом:

$$(4) \quad \delta A = M\delta\varphi_1 + F\delta\rho,$$

где $M(t)$ — крутящий момент вала C , $F(t)$ — сила, создающая поступательное движение оси вала. Величины $M(t)$ и $F(t)$ зависят от управляемых извне связей системы. Из уравнения (4) находим обобщенные силы в виде

$$(5) \quad Q_{\varphi_1} = M, \quad Q_{\varphi_2} = 0, \quad Q_{\rho} = F.$$

К рассматриваемой системе применяются уравнения движения для неголономных систем в форме [2]:

$$(6) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) + \sum_{\mu=k+1}^l \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} \right) \frac{\partial q_\mu}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} - \sum_{\mu=k+1}^l \frac{\partial T}{\partial q_\mu} \frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial \dot{q}_r} = Q_r + \sum_{\mu=k+1}^l Q_\mu \frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial \dot{q}_r}.$$

Из (2) получим

$$(7) \quad \dot{\varphi}_1 = \frac{\rho}{r} \dot{\varphi}_2,$$

т. е. рассматриваем φ_2 как независимый параметр.

В нашем случае уравнения (6) принимают вид

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) \frac{\partial \dot{\varphi}_1}{\partial \dot{\varphi}_2} &= Q_{\varphi_2} + Q_{\varphi_1} \frac{\partial \dot{\varphi}_1}{\partial \dot{\varphi}_2}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) \frac{\partial \dot{\varphi}_1}{\partial \dot{\rho}} &= Q_\rho + Q_{\varphi_1} \frac{\partial \dot{\varphi}_1}{\partial \dot{\rho}}. \end{aligned}$$

Из соотношений (3), (5) и (7) от (8) находим

$$(9) \quad J_2 \ddot{\varphi}_2 + (J_1 + J_k) \dot{\varphi}_1 \frac{\rho}{r} = M \frac{\rho}{r}; \quad m \ddot{\rho} = F.$$

К (9) следует прибавить (7), в результате чего получаем три уравнения для параметров φ_1 , φ_2 и ρ как функции управляющих воздействий F и M .

Остановимся на частном случае, когда $\dot{\varphi}_2 = \omega = \text{const}$. Из (9) и (7) получим

$$(J_1 + J_k) \frac{\omega \dot{\rho}}{r} = M(t)$$

или для трансляционного движения будем иметь

$$(10) \quad \rho(t) = \rho_0 + \frac{r}{\omega(J_1 + J_k)} \int_0^t M(t) dt.$$

Из (7) находим

$$(11) \quad \dot{\varphi}_1 = \frac{\omega}{r} \left[\rho_0 + \frac{r}{\omega(J_1 + J_k)} \int_0^t M(t) dt \right].$$

Уравнения (10) и (11) выражают трансляционное и вращательное движение вала C в случае равномерного вращения вала D .

В качестве второго примера рассмотрим центробежный регулятор, жестко связанный через колесо с острым краем с вертикальным диском, вращающийся вокруг горизонтальной оси (рис. 2). Регулятор OP_1NP_2

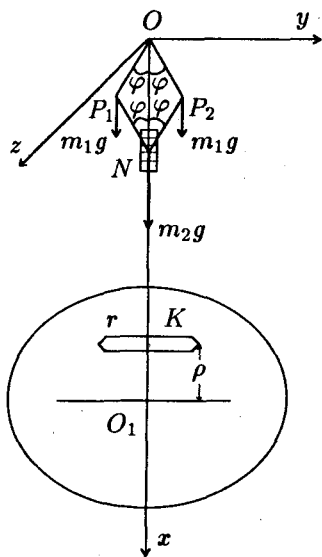


Рис. 2

вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\dot{\varphi}_1$. Вокруг той же оси вращается и колесо K . Шары регулятора P_1 и P_2 , каждый имеющий массу m_1 , закреплены на концах стержней OP_1 и OP_2 , которые в свою очередь шарнирно соединены в точке O . Муфта N массы m_2 может перемещаться вдоль вертикальной оси. Муфта шарнирно соединена со стержнями NP_1 и NP_2 , которые в свою очередь соединены шарнирами со стержнями OP_1 и OP_2 . Кроме того, $OP_1 = OP_2 = NP_1 = NP_2 = l$. Через $\dot{\varphi}_2$ обозначим угловую скорость диска с центром O_1 , который находится на расстоянии ρ от K . Так как колесо катится по доске без проскальзывания, имеем

$$(12) \quad r\dot{\varphi}_1 = \rho\dot{\varphi}_2,$$

где r — радиус колеса.

Обозначим через φ_1 угол, который плоскость регулятора образует с координатной плоскостью Oyz . Тогда для координат точек

$P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ и $N(x_3, 0, 0)$ имеем

$$(13) \quad \begin{aligned} x_1 &= l \cos \varphi, & y_1 &= -l \sin \varphi \cos \varphi_1, & z_1 &= l \sin \varphi \sin \varphi_1; \\ x_2 &= l \cos \varphi, & y_2 &= l \sin \varphi \cos \varphi_1, & z_2 &= -l \sin \varphi \sin \varphi_1; \\ x_3 &= 2l \cos \varphi, & y_3 &= z_3 = 0. \end{aligned}$$

Параметрами системы являются величины φ_1 , φ_2 и φ , причем угол φ_2 зависит от угла φ_1 . Массой стержней OP_1 , OP_2 , P_1N и P_2N будем пренебрегать. Тогда в соответствии с выражениями (13), кинетическая энергия регулятора будет равна

$$T_P = l^2(m_1 + 2m_2 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}^2 + m_1 l^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}_1^2.$$

Следовательно, кинетическая энергия системы принимает вид

$$(14) \quad T = l^2(m_1 + 2m_2 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}^2 + m_1 l^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_2^2,$$

где J_1 — сумма моментов инерции муфты N и колеса K , а J_2 — момент инерции диска.

Элементарная работа внешних сил дается выражением

$$(15) \quad \delta A = m_1 g \delta x_1 + m_1 g \delta x_2 + m_2 g \delta x_3 + M(t) \delta \varphi_1,$$

где $M(t)$ — момент внешних сил, вращающих ось регулятора. Учитывая (13), из (15) получим

$$(16) \quad Q_\varphi = -2lg(m_1 + m_2) \sin \varphi,$$

$$Q_{\varphi_1} = M(t), \quad Q_{\varphi_2} = 0.$$

Таким образом, уравнения движения системы (6), в рассматриваемом случае, принимают вид

$$(17) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) \frac{\partial \dot{\varphi}_2}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \dot{\varphi}_2}{\partial \dot{\varphi}_1} = Q_{\varphi_1}.$$

Согласно (14) и (16) первое уравнение (17) принимает вид

$$(18) \quad \frac{d}{dt} [2l^2(m_1 + 2m_2 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}] - 4m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi =$$

$$= 2m_1 l^2 \dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi \cos \varphi - 2lg(m_1 + m_2) \sin \varphi.$$

Уравнение (18) допускает частное решение

$$(19) \quad \varphi = \text{const}, \quad \cos \varphi = \frac{2(m_1 + m_2)}{m_1 l \dot{\varphi}_1^2},$$

которое является положением равновесия регулятора.

Прежде чем рассмотреть второе уравнение (17), перейдем к исследованию неголономной связи (12). Так как

$$(20) \quad 2l \cos \varphi + NK + \rho = OO_1,$$

то обозначая чрез $L = OO_1 - NK = \text{const}$, из соотношения (20) имеем

$$(21) \quad \rho(t) = L - 2l \cos \varphi.$$

На основе (19) из (21) получим

$$\rho(t) = L - \frac{2g(m_1 + m_2)}{m_1 \dot{\varphi}_1^2},$$

откуда (12) преобразуется в виде

$$r \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 \left[L - \frac{2g(m_1 + m_2)}{m_1 \dot{\varphi}_1^2} \right].$$

Отсюда находим

$$(22) \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{m_1 r \dot{\varphi}_1^3}{L m_1 \dot{\varphi}_1^2 - 2g(m_1 + m_2)},$$

т. е. связь между угловыми скоростями нелинейная. Используя (14), (16) и (22), второе уравнение (17) принимает вид

$$(23) \quad \frac{d}{dt} [J_1 \dot{\varphi}_1 + 2m_1 l^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}_1] + J_2 \ddot{\varphi}_2 \frac{L m_1 \dot{\varphi}_1^4 - 6g(m_1 + m_2) \dot{\varphi}_1^2}{[L m_1 \dot{\varphi}_1^2 - 2g(m_1 + m_2)]^2} = M(t).$$

Подставляя (22) в (23), получим

$$\frac{d}{dt} [J_1 \dot{\varphi}_1 + 2m_1 l^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}_1] + J_2 \ddot{\varphi}_2 \frac{[L m_1 \dot{\varphi}_1^4 - 6g(m_1 + m_2) \dot{\varphi}_1^2]^2}{[L m_1 \dot{\varphi}_1^2 - 2g(m_1 + m_2)]^4} = M(t).$$

Это уравнение можно привести к квадратурам относительно φ_1 .

В частном случае, когда $\dot{\varphi}_1 = \omega = \text{const}$ решение задачи $\varphi = \text{const}$, определенное из (19). В этом случае $\rho = \text{const}$, $\dot{\varphi}_2 = \text{const}$. Тогда из (23) $M(t) = 0$, т. е. вращающий внешний момент регулятора равняется нулю. Этот случай возможен когда момент внешних сил уравновешивается с моментом сил трения при вращении регулятора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Николенко, И. В. Динамика управляемых неавтономных систем. Киев, 1985.
2. Апель, П. Теоретическая механика, т. 1, 1960.
3. Новоселов, В. С. Ученые записки ЛГУ, 217, вып. 31, 1957.
4. Новоселов, В. С. Ученые записки ЛГУ, 280, вып. 35, 1960.
5. Добронравов, В. В. Основы механики неавтономных систем, М., 1970.
6. Летов, А. М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем, 1962.
7. Маслов, Ю. Н. Научные труды Ташкентского государственного университета, 242, 1969.

Поступила 12.03.1991

СОДЕРЖАНИЕ

Книга 1 — Математика

Людмила Николова — Интерполяция некоторых свойств операторов, действующих в семействах банаховых пространств	3
Никола Мартинов — Экстремальные локально-деревообразные графы	17
Йордан Зашев — Наименьшие неподвижные точки в моноидальных категориях с декартовой структуре на объектах	23
Симеон Стефанов — Категория Люстерника-Шнирельмана множества неблуждающих точек	43
Симеон Стефанов — Одна теорема о совпадении	49
Иван Сосков — Программы с хорновыми клаузами на абстрактные структуры с параметрами	53
Красимир Манев, Майа Петкова, Рада Големанова — О вычислении границы линейного программирования для кодов, исправляющих ошибок	63
Иванка Иванова-Каратопраклиева — Бесконечно малые изгибания скольжения высших порядков поверхностей вращения	69
Николай Хаджииванов, Владимир Никифоров — О теоремах Борсука-Улама и Люстерника-Шнирельмана-Борсука	83
Николай Хаджииванов, Симеон Стефанов — О склеиваниях, происходящих при непрерывных отображениях тора в плоскость ...	91
Николай Хаджииванов — О размерности бикомпактов	97

Книга 2 — Механика

Христо Христов, Иван Цанков — Численный расчет нестационарного пограничного слоя около кругового цилиндра	103
Константин Марков, Керанка Илиева — Замечание о C^2 -членные эффективной проводимости случайной дисперсии сфер	123
Николина Василева, Любомир Лилев — Стационарные движения систем тел, связанных струнами	139
София Денева, Васил Диамандиев — Проблемы, связанные с управляемыми неголономными системами	159

CONTENTS

Book 1 — Mathematics

Lyudmila Nikolova — Interpolation of some properties of operators acting in families of Banach spaces	3
Nikola Martinov — External locally-tree-like graphs	17
Jordan Zashev — Least fixed points in monoidal categories with cartesian structure on objects	23
Simeon Stefanov — Ljusternik-Schnirelman category of the non-wandering set ..	43
Simeon Stefanov — A coincidence point theorem	49
Ivan Soskov — Horn clause programs on abstract structures with parameters	53
Krassimir Manev, Maya Petkova, Rada Golemanova — On the calculation of linear programming bound for error correcting codes	63
Ivanka Ivanova-Karatopraklieva — Infinitesimal bendings with sliding of higher order of rotational surfaces	69
Nikolay Khadzhiivanov, Vladimir Nikiforov — On the theorems of Borsuk-Ulam and Ljusternik-Schnirelman-Borsuk	89
Nikolay Khadzhiivanov, Simeon Stefanov — On the identification of points by continuous maps from the torus to the plane	91
Nikolay Khadzhiivanov — On the dimension of compacta	97

Book 2 — Mechanics

Christo Christov, Ivan Tzankov — Numerical investigation of the boundary layer flow around impulsively moved cylinder	103
Konstantin Markov, Keranka Ilieva — A note on the C^2 -term of the effective conductivity for random dispersions	123
Nikolina Vasileva, Ljubomir Lilov — Steady-state motions for systems of rigid bodies connected with strings	139
Sonia Deneva, Vasil Diamandiev — Problems, connected with controlled nonholonomic constraints	159