ГОДИШНИК

НА

СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ
"СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"

ФАКУЛТЕТ
ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

КНИГА 2 — МЕХАНИКА

Том 82
1988

44

ANNUAIRE

DE

L'UNIVERSITE DE SOFIA
"ST. KLIMENT OHRIDSKI"

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET
INFORMATIQUE

LIVRE 2 — MECANIQUE

Tome 82
1988

СОФИЯ, 1992, SOFIA
УНИВЕРСИТЕТСКО ИЗДАТЕЛСТВО "СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"
PRESSES UNIVERSITAIRES "ST. KLIMENT OHRIDSKI"

51+531/534(05)

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 2 — Механика
Том 82, 1988

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA "ST. KLIMENT OHRIDSKI"
FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 2 — Mécanique
Tome 82, 1988

LAGRANGE OR EULER?
PART TWO: THE PRESENT

GEORGI CHOBANOV, IVAN CHOBANOV

> The truth, Mr. Blake, has a habit of making itself known. Even after many years.
>
> Agatha Christie: *Five Little Pigs*

Георги Чобанов, Иван Чобанов. ЛАГРАНЖ ИЛИ ЭЙЛЕР? ЧАСТЬ ВТОРАЯ: НАСТОЯЩЕЕ

Эта работа является второй частью серии статьей по вопросу о динамических традиций Эйлера и Лагранжа, первая часть [1] которой была опубликована в том же самом *Ежегоднике*. Настоящее состояние вещей в аналитической механике можно характеризовать как эклектическое совместное существование двух противоположных тенденций — динамических традиций Эйлера и Лагранжа. В этой статье анализируются самые типичные черты этих традиций и делаются соответствующие заключения. Согласно последных, невозможна какая-нибудь альтернатива динамических аксиом Эйлера (законов или принципах о количестве движения и кинетическом моменте твердого тела), а динамические уравнения Лагранжа являются лишь их проекциями на подходящих осей. Эта работа является предварительной подготовкой для решения шестой проблемы Гильберта об аксиоматической консолидации логических основ аналитической механики.

CONTENTS

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 2 — Механика
Том 82, 1988

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA "ST. KLIMENT OHRIDSKI"
FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 2 — Mécanique
Tome 82, 1988

LAGRANGE OR EULER?
PART TWO: THE PRESENT

GEORGI CHOBANOV, IVAN CHOBANOV

> The truth, Mr. Blake, has a habit of making itself known. Even after many years.
>
> Agatha Christie: *Five Little Pigs*

Георги Чобанов, Иван Чобанов. ЛАГРАНЖ ИЛИ ЭЙЛЕР? ЧАСТЬ ВТОРАЯ: НАСТОЯЩЕЕ

Эта работа является второй частью серии статьей по вопросу о динамических традиций Эйлера и Лагранжа, первая часть [1] которой была опубликована в том же самом *Ежегоднике*. Настоящее состояние вещей в аналитической механике можно характеризовать как эклектическое совместное существование двух противоположных тенденций — динамических традиций Эйлера и Лагранжа. В этой статье анализируются самые типичные черты этих традиций и делаются соответствующие заключения. Согласно последных, невозможна какая-нибудь альтернатива динамических аксиом Эйлера (законов или принципах о количестве движения и кинетическом моменте твердого тела), а динамические уравнения Лагранжа являются лишь их проекциями на подходящих осей. Эта работа является предварительной подготовкой для решения шестой проблемы Гильберта об аксиоматической консолидации логических основ аналитической механики.

Georgi Chobanov, Ivan Chobanov. LAGRANGE OR EULER? PART TWO: THE PRESENT

This paper represents the second part of a series of articles on the Eulerian and Lagrangean dynamical traditions, the first part [1] of which was published in this *Annual*. The present state of affairs in analytical mechanics may be characterized as an eclectic coexistence of two opposite tendencies — the Eulerian and the Lagrangean dynamical traditions. The most typical features of both are analised in this article and corresponding conclusions are drawn. According to them, no alternative of the Eulerian dynamical axioms (the laws or principles of momentum and of kinetical moment of rigid bodies) is possible, the Lagrangean dynamical equations being only their projections on appropriate axes. This paper is a preliminary preparation for the solution of Hilbert's sixth problem concerning the axiomatical consolidation of the logical foundations of analytical mechanics.

Several years ago we have published the first part [1] of a series of articles dealing with the Eulerian and Lagrangean dynamical traditions. This is a topic we have worked out in the course of a clear decade, see for instance the article [2]. The paper [1] contains a brief historical account on the conception, birth, and flourish of the Lagrangean dynamical tradition, antagonistic to the Bernoullis-Eulerian one. The *modus operandi* of the Lagrangean approach toward analytical mechanics has been aimed at the strangulation *in-cunabula*, if not in embryo, of the Eulerian dynamical tradition. Its after-effects on the supervenient development of rational mechanics, in general, and of analytical dynamics, in particular, resulted in an utmost formalism that transmuted into the domineering mechanical philosophy of the twentieth century. This philosophy is still in its climax in the current mechanical literature even of recent time.

Our initial intention, as regards this second part, has been to proclaim the anticlimax of the Lagrangean dynamical tradition. This is obviously not an easy task, especially if one aims at fundamentalistic goals, as we did, namely the solution of Hilbert's sixth problem concerning the axiomatical consolidation of the logical foundations of analytical mechanics — a problem, at the face of which the Lagrangean dynamical tradition is entirely helpless. In order to expose clearly the rise and fall of the Lagrangean dynamical tradition we had to replough a virgin soil, since never before, in the course of a well-nigh a century, has rational mechanics been even in the slightest touched by that critical spirit which made contemporary mathematics what it now is. The results of these efforts are reflected in the present paper — some of them, at least. In order to attain them, however, we badly needed time. This is the main reason for the ten years' delay of the pnblication of this second part of the series in question.

In the meantime a considerable list [3 — 24] of publications dealing with the interplay of the Eulerian and Lagrangean dynamical traditions has been printed in this *Annual*. Now some words about these articles are, to a not unconsiderable degree, necessary. As a matter of fact, the problems thetein discussed are corner-stones on the meandering way one has to follow in order to throw light upon the very essence of the Lagrangean dynamical tradition.

What does, by the way, this term mean? What do the authors of mechanical writings bear in mind when using the word combination "Lagrangean mechanics"?

The Lagrangean dynamical tradition has been conceived in the moment when Lagrange's notorious mechanical work *Méchanique Analitique* (sic!) [25] has seen the light of day. In the *Avertissement* of this *Traité* which is the only part of his treatise well known nowadays by the mathematicians he has written:

"On a déjá plusieurs Traités de Méchanique, mais le plan de celui-ci est entiérement neuf. Je me suis proposé de réduire la théorie de cette Science, et l'art de résoudre les problèmes qui s'y rapportent, à des formules générales, dont le simple développement donne toutes les équations nécessaires pour la solution de chaque probléme. J'espère que la manière dont j'ai tâché de remplir cet objet ne laissera rien à desirer.

Cet Ouvrage aura d'ailleurs une autre utilité: il réunira et présentera sous un même point de vue les différents principes trouvés pour faciliter des questions de Méchanique, en montrera la liaison et la dépendance mutuelle, et mettra à portée de juger de leur justesse et de leur étendue.

Je le divise en deux Parties: la Statique ou la Théorie de l'Équilibre, et la Dynamique ou la Théorie du Mouvement, et chacune de ces Parties traitera séparément des corps solides et des fluides.

On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes j'y expose ne démandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou méchaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche réguliere et uniforme."

All these statements of Lagrange's and all the claims he has laid to the mechanical performances the *Méchanique Analitique* contains have been taken by his contemporaries and by all coming generations of mathematicians and mechanicians at their face value. Not only Hamilton has praised the *Méchanique Analitique* as "a kind of scientific poem", but even today there are authors of mechanical writings who maintain that "the whole of analytical dynamics is based upon, and is developed from, the theorem of Lagrange that I call the fundamental equation" [26, p. VII]. The only critical notes apropos of Lagrange's mechanical achievements as a whole we have come across in all our professional days may be found in Truesdell's *Essays* [27] where one may read:

"At the end of the [eighteenth] century there was a dismaying tendency to turn away from the basic problems, both in mechanics and in pure analysis. Directly contrary to the great tradition set by James Bernoulli and Euler, this formalism grew rapidly in the French school and is reflected in the *Méchanique Analitique*. Much of the misjudgement that historians and physicists have passed upon the work of the eighteenth century comes from unwillingness to look behind and around the *Méchanique Analitique* to the great work of Euler and the Bernoullis which is left unmentioned. As its title implies, the *Méchanique Analitique* is not a treatise on rational mechanics, but rather a monograph on one method of deriving differential equations of motion, mainly in the special branch now called, after it, analytical mechanics" (p. 134).

And later, as a general estimation of Lagrange's mechanical performances:

"1. There was little new in the *Méchanique Analitique*; its contents derive from earlier papers of Lagrange himself or from works of Euler and other predecessors.

2. General principles or concepts of mechanics are misunderstood or neglected by Lagrange.

3. Lagrange's histories usually give the right references but misrepresent or slight the contents.

4. Lagrange's best ideas of mechanics derive from his earliest period, when he was studing Euler's papers and had not yet fallen under the personal influence of D'Alembert...

Granted its more modest scope, estimates of Lagrange's performance must remain a matter of taste. In music, in painting, in literature, tastes have changed in the past century. Why should they not also change in mechanics? The historians delight in repeating Hamilton's praise of the *Méchanique Analitique* as "a kind of scientific poem", but it is unlikely that many persons today will find Hamilton's recommendations in non-scientific poetry congenial" (p. 134 – 135, 246 – 248).

We give expression to our greatest regret that we cannot agree with this standpoint of the author of the excellent *Essays in the History of Mechanics*, but the acceptance of Lagrange's main dynamical pretension — his famous dynamical equations of motion — is by no means a matter of taste, even if a bad one: for analytical mechanics the problem *Lagrange or Euler?* is not a question of an alternative. It turns out that the lawsuit *Lagrange versus Euler* is a struggle for existence. The opposition of Lagrange against the Eulerian dynamical tradition has begun five years after Euler's death and nowadays the battle-field lies entirely in the hands of the Lagrangeanists. The result is a total obscurantism, both ideological and technical, in a vast domain of human knowledge, and no glimmer of hope is at hand for the time being.

But let us not anticipate events. Before answering the question what does Lagrangean dynamical tradition mean and which are its most characteristic features, let us first pose the problem: are Lagrange's statements in his *Avertissement* true?

Is it, in other words, true that Lagrange succeeded in his *Méchanique Analitique* "de réduire la théorie de cette Science, et l'art de résoudre les problèmes qui s'y rapportent, à des formules générales, dont le simple développement donne toutes les équations nécéssaires pour la résolution de chaque problème"?

Is it true that the *modus operandi* Lagrange applied in order "de remplir cet objet ne laissera rien à désirer"?

Is it true that "cet Ouvrage ... réunira et présentera sous un même point de vue les différents principes trouvés jusqu'ici pour faciliter des questions de Méchanique, en montrera la liaison et la dépendance mutuelle, et mettra à portée de juger de leur justesse et de leur étendue"?

Is it true that the statical and dynamical parts of the *Méchanique Analitique* treat "des corps solides"?

Is it true that analytical dynamics may be exposed by means of "méthodes ... ne démandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou méchaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties a une marche régulière et uniforme"?

Is all this true?

Not a word, with the only exception that "on ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage". There are none, indeed.

All these claims are false in the utmost degree, and one of the main aims of the present paper is to prove this in an unambiguous way.

To begin with, let us first analyse Lagrange's pretensions that the *Méchanique Analitique* presents "les différents principes trouvés jusqu'ici pour faciliter des questions de la Méchanique".

Why ask the Bishop when the Pope is around? In *Section première: Sur les différents principes de la dynamique* of *Second partie: La dynamique* of his *Méchanique Analitique* Lagrange writes:

"... auparavant, il ne sera inutile d'exposer les principes qui servent de fondement à la Dynamique, et de presenter la suite et la gradation des idées qui ont le plus contribué à étendre et à perfectionner cette science ... les principes ou théorèmes connus sous les nomes de *conservation des forces vives*, de *conservation du mouvement du centre de gravitè*, de *conservation des moments de rotation* ou *Principe des aires*, et de *Principe de la moindre quantuté de l'action.*"

Apropos of the principle of *conservation des forces vives* Lagrange states:

"Le premier de ces quatre principes, celui de la conservation des forces vives, a été trouvé par Huygens, mais sous une forme un peu différente de celle qu'on lui donne présentement... Ainsi le principe de Huygens se réduit à ce que, dans le mouvement des corps pesants, la somme des produits des masses par les carrés des vitesses à chaque instant est la même, soit que les corps se meuvent conjointement d'une manière quelconque, ou qu'ils parcourent librement des mêmes hauteurs verticales ... Jean Bernoulli ... donna ainsi a ce principe le nom de *conservation des forces vives*, et il s'en servit avec succès pour résoudre quelques problèmes qui n'avaient pas encore été résolus et dont il paraissait dificile de venir à bout par des méthodes directs. Daniel Bernoulli a donné ensuit plus d'extension à ce principe et il en a déduit les lois du mouvement des fluides ... Enfin il l'a rendu très général ... en faissant voir comment on peut l'appliquer au mouvement des corps animés par des attractions mutuelles quelconques ou attirés vers des centres fixes par des forces proportionnelles à quelques fonctions des distances que ce soit."

In order to penetrate this text of Lagrange's, some detailed explications are unavoidable. Let us suppose that a rigid body B is acted on by the *active forces*

$$\vec{F}_\mu = (\boldsymbol{F}_\mu,\ \boldsymbol{M}_\mu) \qquad (\mu = 1, \ldots, m), \tag{1}$$

all moments $\boldsymbol{M}_\mu$ ($\mu = 1, \ldots, m$) being taken with respect to the origin O of an orthonormal right-hand orientated Cartesian system of reference $Oxyz$. Besides, let B be subjected to certain geometrical constraints generating *passive forces* or *reactions of the constraints*

$$\vec{R}_\nu = (\boldsymbol{R}_\nu,\ \boldsymbol{N}_\nu) \qquad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

the moments N_ν ($\nu = 1, \dots, n$) being taken again with respect to O. For the sake of brevity let by definition

$$\vec{F}_{m+\nu} = \vec{R}_\nu \qquad (\nu = 1, \dots, n), \tag{3}$$

i. e.

$$F_{m+\nu} = R_\nu, \; M_{m+\nu} = N_\nu \qquad (\nu = 1, \dots, n) \tag{4}$$

provided

$$\vec{F}_{m+\nu} = (F_{m+\nu}, \; M_{m+\nu}) \qquad (\nu = 1, \dots, n). \tag{5}$$

Moreover, let P_ν ($\nu = 1, \dots, m+n$) be points of B, coinciding at the moment of time t with the directrices of $\vec{F}_\nu$ ($\nu = 1, \dots, m+n$) respectively. In other words, if

$$r_\nu = OP_\nu \qquad (\nu = 1, \dots, m+n), \tag{6}$$

then the following two conditions are, by hypothesis, satisfied. First,

$$\frac{d}{dt}(r_\nu - r_\Omega) = \varpi \times (r_\nu - r_\Omega) \qquad (\nu = 1, \dots, m+n), \tag{7}$$

where

$$r_\Omega = \overline{O\Omega}, \tag{8}$$

Ω denoting the origin of an orthonormal right-hand orientated Cartesian system of reference $\Omega\xi\eta\zeta$ invariably connected with B, and

$$\varpi = \frac{1}{2}(\bar{\xi}^{\circ} \times \dot{\bar{\xi}}^{\circ} + \bar{\eta}^{\circ} \times \dot{\bar{\eta}}^{\circ} + \bar{\zeta}^{\circ} \times \dot{\bar{\zeta}}^{\circ}) \tag{9}$$

being the instantaneous angular velocity of $\Omega\xi\eta\zeta$ with respect to $Oxyz$; $\bar{\xi}^{\circ}$, $\bar{\eta}^{\circ}$, $\bar{\zeta}^{\circ}$ in (9) denote the unit vectors of the axes $\Omega\xi$, $\Omega\eta$, $\Omega\zeta$ respectively with respect to $Oxyz$. Second,

$$r_\nu \times F_\nu = M_\nu \qquad (\nu = 1, \dots, m+n). \tag{10}$$

Further, let

$$T = \frac{1}{2}\int v^2 dm \tag{11}$$

denote the *kinetic energy* of B with respect to $Oxyz$. In other words, if P denotes any point of B and

$$r = OP, \tag{12}$$

$$v = \frac{dr}{dt}, \tag{13}$$

the derivative in (13) being taken with respect to $Oxyz$, then the integral in the right-hand side of (11) is expanded over the space occupied by B, dm denoting elementary mass of B.

A classical theorem of analytical mechanics reads

$$dT = \sum_{\nu=1}^{m+n} F_\nu dr_\nu. \tag{14}$$

The equation (14) is usually called the *kinetic energy theorem*. Let us now see how is this theorem proved?

Let by definition

$$F = \sum_{\nu=1}^{m+n} F_\nu,\ M = \sum_{\nu=1}^{m+n} M_\nu \tag{15}$$

be the *basis* and the *moment* (with respect to O) of all forces, both active and passive, acting on B. Then (10) and the second relation (15) imply

$$M = \sum_{\nu=1}^{m+n} r_\nu \times F_\nu. \tag{16}$$

Besides, let

$$v_\Omega = \frac{dr_\Omega}{dt}, \tag{17}$$

the derivative being taken with respect to $Oxyz$. Now the relations (7), (15) – (17) imply

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{m+n} F_\nu \frac{dr_\nu}{dt} &= \sum_{\nu=1}^{m+n} F_\nu (v_\Omega + \bar{\omega} \times (r_\nu - r_\Omega)) \\ &= (v_\Omega + r_\Omega \times \bar{\omega}) \sum_{\nu=1}^{m+n} F_\nu + \bar{\omega} \cdot \sum_{\nu=1}^{m+n} r_\nu \times F_\nu, \end{aligned} \tag{18}$$

i. e.

$$\sum_{\nu=1}^{m+n} F_\nu \frac{dr_\nu}{dt} = (v_\Omega + r_\Omega \times \bar{\omega}) F + \bar{\omega} \cdot M. \tag{19}$$

On the other hand, P being a point of B, the relations (12) and (13) imply

$$v = v_\Omega + \bar{\omega} \times (r - r_\Omega). \tag{20}$$

Now (20) and the definition (11) imply

$$\frac{dT}{dt} = \int vwdm = \int (v_\Omega + \varpi \times (r - r_\Omega))wdm \tag{21}$$

$$= (v_\Omega + r_\Omega \times \varpi) \int wdm + \varpi \cdot \int r \times wdm,$$

provided

$$w = \frac{dv}{dt}. \tag{22}$$

Let by definition

$$K = \int vdm, \qquad L = \int r \times vdm \tag{23}$$

denote the *momentum* and the *moment of momentum* (*kinetical moment*) of B with respect to $Oxyz$. Then *Euler's dynamical axioms* or the *laws* (*principles*) *of momentum* and *of moment of momentum* (*of kinetical moment*) governing the motion of any rigid body read

$$\frac{dK}{dt} - F = O, \qquad \frac{dL}{dt} - M = O. \tag{24}$$

The relations (22), (23) imply that the laws (24) may be written in the form

$$\int wdm = F, \quad \int r \times wdm = M. \tag{25}$$

By virtue of (25), the relation (21) may be written in the form

$$\frac{dT}{dt} = (v_\Omega + r_\Omega \times \varpi)F + \varpi \cdot M. \tag{26}$$

The right-hand sides of (19) and (26) obviously coincide. Hence (14), *q. e. d.*

In such a manner it is clear that the kinetic energy theorem (14) is unprovable unless Euler's dynamical laws (24) come to its help. Lagrange, however, does not mention these principles among his "principes qui servent de fondament à la Dynamique". This is, by the way, a topic we shall later come back to. Let us now see how the kinetic energy theorem (14) may be used in solving dynamical problems.

Strange though it may seem, in the general case the plain answer is: *not the least bit.*

In order to explain this somewhat disappointing conclusion, let us write down (14) in the equivalent form

$$dT = \sum_{\mu=1}^{m} F_\mu dr_\mu + \sum_{\nu=1}^{n} R_\nu dr_{m+\nu} \tag{27}$$

by virtue of (4). Now (27) clearly displays that the right-hand side of the kinetic energy theorem consists of two addends. The first one, namely

$$\sum_{\mu=1}^{m} \boldsymbol{F}_\mu d\boldsymbol{r}_\mu \tag{28}$$

is well known for any position of the rigid body B consistent with the geometrical constraints imposed on it. Indeed, the bases $\boldsymbol{F}_\mu$ ($\mu = 1, \ldots, m$) of the active forces (1) are known since the forces (1) themselves are known: an active force is, by definition, a force which is wholly defined in the conditions of the dynamical problem. As regards $\boldsymbol{r}_\mu$ ($\mu = 1, \ldots, m$), the only conditions imposed on these quantities are (7) and (10). In such a way the quantity (28) may be regarded as given.

The case with the second addend

$$\sum_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{R}_\nu d\boldsymbol{r}_{m+\nu} \tag{29}$$

is a quite different one. Indeed, nothing is known about the reactions (2) of the constraints save that their directrices pass through the corresponding points of contact of the rigid body with the geometrical constraints.

In such a way, the rigid-hand side of the relation (14) is unknown, in the general case at least. Consequently, the kinetic energy theorem (14) implies no dynamical integral, unless additional hypotheses are made in the condition of the dynamical problem in question.

As a rule, these additional hypotheses reduce to the condition

$$\sum_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{R}_\nu d\boldsymbol{r}_{m+\nu} = 0. \tag{30}$$

Obviously, (30) is satisfied trivially if the rigid body is *free*. Another case when (30) holds good is especially favoured by the Lagrangeanists. It is the case of the so-called *ideal constraints.*

Geometrical constraints are called *ideal* if the work the reactions of these constraints accomplish is equal to zero. The ideal geometrical constraints are called also *frictionless*. Since the work in question is, by definition, represented by the quantity (29), the geometrical constraints under consideration are ideal if, and only if, the condition (30) holds good. In such a case the kinetic energy theorem (14) becomes

$$dT = \sum_{\mu=1}^{m} \boldsymbol{F}_\mu d\boldsymbol{r}_\mu. \tag{31}$$

The condition (30) is called the *postulate of ideal constraints.*

This form of the kinetic energy theorem is much more hopeful than (14), since the right-hand side of (31) is, as already emphasized, wholly determined. Alas, these hopes are premature ones: in the general case (31) given also no dynamical integral.

Indeed, in the general case the active forces (1) are functions of the position of the rigid body B, of its velocities, and of the time t, rather than of its position only, so that the differential relation (31) cannot be integrated. Let us discuss this question somewhat closer.

Let the rigid body B possess l degrees of freedom; in other words, let any of its positions in space consistent with the geometrical constraints imposed on B be determined by the aid of exactly l mutually independent quantities

$$q_\lambda \qquad (\lambda = 1, \ldots, l) \tag{32}$$

(*independent parameters*, or only *parameters*, of B). The very definition (32) implies that, if nothing else is required in the condition of the dynamical problem under consideration, then not only the parameters of B, but also their derivatives

$$\dot{q}_\lambda \qquad (\lambda = 1, \ldots, l) \tag{33}$$

with respect to the time t (*generalized velocities*, or only *velocities*, of B) are mutually independent. Moreover, the *canonic parameters* of B, namely the Cartesian coordinates x_Ω, y_Ω, z_Ω of Ω with respect to $Oxyz$ and the Eulerian angles ψ, φ, θ between $Oxyz$ and $\Omega\xi\eta\zeta$, are functions of (32) and of t:

$$x_\Omega = x_\Omega(q_1, \ldots, q_l, t), \quad y_\Omega = y_\Omega(q_1, \ldots, q_l, t), \quad z_\Omega = z_\Omega(q_1, \ldots, q_l, t), \tag{34}$$

$$\psi = \psi(q_1, \ldots, q_l, t), \quad \varphi = \varphi(q_1, \ldots, q_l, t), \quad \theta = \theta(q_1, \ldots, q_l, t). \tag{35}$$

Now in the general case the active forces (1) are wholly determined functions

$$\vec{F}_\mu = \vec{F}_\mu(q_1, \ldots, q_l; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_l, t) \qquad (\mu = 1, \ldots, m) \tag{36}$$

of (32), (33), and possibly of t. This implies that the bases F_μ of $\vec{F}_\mu$ ($\mu = 1, \ldots, m$) are completely determined (i.e. given) functions

$$F_\mu = F_\mu(q_1, \ldots, q_l; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_l, t) \qquad (\mu = 1, \ldots, m) \tag{37}$$

of q_λ, $\dot{q}_\lambda$ ($\lambda = 1, \ldots, l$), and of t. On the other hand, the very definition of the quantities (6) implies that they are wholly determined functions

$$r_\nu = r_\nu(q_1, \ldots, q_l; t) \qquad (\nu = 1, \ldots, m+n) \tag{38}$$

of the parameters q_λ ($\lambda = 1, \ldots, l$) of B and possibly of the time t (in the case when the geometrical constraints imposed on B are *rheonomic*, rather than *scleronomic*). Now (38) imply

$$dr_\nu = \sum_{\lambda=1}^{l+1} \frac{\partial r_\nu}{\partial q_\lambda} dq_\lambda \qquad (\nu = 1, \ldots, m), \tag{39}$$

provided, for the sake of brevity, by definition

(40) $$q_{l+1} = t.$$

Then (39), (31) imply

(41) $$dT = \sum_{\lambda=1}^{l+1} Q_\lambda dq_\lambda,$$

where by definition

(42) $$Q_\lambda = \sum_{\mu=1}^{m} \boldsymbol{F}_\mu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\mu}{\partial q_\lambda} \qquad (\lambda = 1, \ldots, l+1).$$

The quantities (42) are called the *generalized active forces* acting on B. It is immediately seen that, in the general case, the generalized active forces are wholly determined functions

(43) $$Q_\lambda = Q_\lambda(q_1, \ldots, q_l; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_l; t) \qquad (\lambda = 1, \ldots, l)$$

of the parameters (32) of the rigid body B, of its generalized velocities (33), and possibly of the time t. For that reason, in the general case, the kinetic energy theorem (31) does not, even when the rigid body is free or the postulate of ideals constraints (30) is satisfied (the rigid body being not free), lead to a dynamical integral.

A necessary condition for the integrability of (41) is

(44) $$\frac{\partial Q_\lambda}{\partial \dot{q}_\mu} = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, l+1;\ \mu = 1, \ldots, l).$$

In other words, Q_λ $(\lambda = 1, \ldots, l+1)$ must be independent of the generalized velocities of the rigid body. In such a case the generalized active forces (42) become wholly determined functions

(45) $$Q_\lambda = Q_\lambda(q_1, \ldots, q_l; t) \qquad (\lambda = 1, \ldots, l+1)$$

of the parameters of B and of t only, and (41) becomes

(46) $$dT = \sum_{\lambda=1}^{l+1} Q_\lambda(q_1, \ldots, q_{l+1}) dq_\lambda.$$

We were sent from pillar to post, our woes have, however, not yet finished. The Pfaffian form (46) leads to no conclusion. We are compelled to hypothecate still, pledging the generality of the dynamical problem. Namely, we are coerced to hypothesize that the right-hand side of (46) springs from a potential function

(47) $$U = U(q_1, \ldots, q_{l+1}).$$

of the parameters of B and possibly of t by virtue of (40), in other words, that

$$Q_\lambda = \frac{\partial U}{\partial q_\lambda} \qquad (\lambda = 1, \ldots, l+1) \tag{48}$$

or, just the same, that the right-hand side of (46) is complete differential

$$dU = \sum_{\lambda=1}^{l+1} Q_\lambda dq_\lambda. \tag{49}$$

In such a case, and in such a case only, the kinetic energy theorem (46) leads to a dynamical integral (the *kinetic energy integral*)

$$T = U + h, \tag{50}$$

h being an arbitrary constant with respect to t. The quantity (47) is called a *function of forces*, and the quantity

$$V = -U \tag{51}$$

is called a *potential*. Now (50) and (51) imply

$$T + V = h, \tag{52}$$

in other words, the quantity $T+V$ remains constant. It is called the *full mechanical energy* of B, and (52) implies that it does not change during the motion of B. A system of rigid bodies is called *conservative* when its full mechanical energy preserves a constant value in the course of its motion.

Mais revenons à nos moutons. The reason for all these considerations was Lagrange's *principe de conservation des force vives*. The term *force vive* means $2T$, and the expression *conservation des forces vives* is incorrect, since not the *force vive*, but the *full mechanical energy* is conserved in some mechanical processes. Anyway, let us make a brief comment on the situation we are confronted with.

Lagrange claims in the *Mèchanique Analitique* "d'exposer les principes qui servent de fondement à la Dynamique" and adduces, in the capacity of principle No 1 "le principe de conservation des forces vives". In other words, he claims that "le principe de conservation des forces vives" is sufficient for "de fondement à la Dynamique". Maybe it is, but "la Dynamique" which? Certainly not the dynamics as we understand it today. Surely, "la Dynamique" as it existed in Lagrange's head. But the dynamics of conservative mechanical systems is certainly too miserable for a scientific ideal.

Let us remember the restrictions we were compelled to impose on a dynamical problem in order that the kinetic energy theorem could provide a dynamical integral (50).

First, the postulate of ideal constraints (30).

Second, generalized active forces independent of the generalized velocities (44).

Third, existence of a potential function (48).

Even if we suppose that the analytical dynamics is such a freak of nature that its whole essence is run dry, being restricted to the conservative dynamical systems only — even in this case, we say, "le principe de conservation des forces vives" is insufficient in the capacity of a "fondement à la Dynamique". The dynamical integral (50) provides a single equation among the parameters (32) of the rigid body, its generalized velocities (33), and the time t. At the same time, the full solution of the dynamical problem requires $2l$ equations involving $2l$ arbitrary constants of integration: this solution consists in discovering (32) as completely determined functions

$$q_\lambda = q_\lambda(t;\ q_{10}, \ldots, q_{l0};\ \dot{q}_{10}, \ldots, \dot{q}_{l0}) \tag{53}$$

($\lambda = 1, \ldots, l$), where the initial values

$$q_{\lambda 0} = q_\lambda(0) \qquad (\lambda = 1, \ldots, l) \tag{54}$$

of the parameters (32) of B and the initial values

$$\dot{q}_{\lambda 0} = \dot{q}_\lambda(0) \qquad (\lambda = 1, \ldots, l) \tag{55}$$

of its generalized velocities (33) play the role of $2l$ arbitrary constants.

The range of action of "le principe de conservation des forces vives" is extremely narrow.

As we have already mentioned, the question that the kinetic energy theorem (14), and hence the kinetic energy integral (50), is undeducable save by the aid of Euler's dynamical axioms (24) is, for the time being, laid aside.

Apropos of the principle of *conservation du mouvement du centre de gravité* Lagrange writes:

"Le second principe est dû à Newton, qui, au commencement de ses *Principes mathématiques*, démontre que l'état de repos ou de mouvement du centre de gravité de plusieurs corps n'est point altéré par l'action réciproque de ces corps, quelle qu'elle soit; de sorte que le centre de gravité des corps qui agissent les unes sur les autres d'une manière quelconque, soit par des fils ou des leviers, ou des lois d'atraction, etc.; sans qu'il y ait aucune action ni aucun obstacle extérieur, est toujours en repos ou se meut uniformément en ligne droit. D'Alembert a donne depuis à ce principe une plus grande étendue, en faisant voir que, si chaque corps est solicité par une force accélératrice constante et qui agisse suivant des lignes paralléles, ou qui soit dirigée vers un point fixe et agisse en raison de la distance, le centre de gravité doit décrire la même courbe que si les corps étaient libres; a quoi l'on peut ajouter que le mouvement de ce centre est, en général, le même que si toutes les forces des corps, quelles qu'elles soient, y étaient appliquées, chacune suivant sa propre direction."

The first remark that this text of Lagrange's provokes concerns Newton's name. According to Lagrange, "Newton . . . démontre que l'état de repos ou de mouvement du centre de gravité de plusieurs corps n'est altéré par l'action réciproque de ces corps, quelle qu'elle soit". As a matter of fact, one finds in Newton's *Principia* [28] nothing of the kind.

The statement that in *Principia* the foundations of rational mechanics have been laid pertains to the Newtonian mythology. The reality is quite different:

"Except for certain simple if important special problems, Newton *gives no evidence of being able to set up differential equations of motion for mechanical systems.* It is not the function of the historian to guess what Newton might have done or could have done, not is what Mach could do with Newton's principles relevant; the cold fact is, the equations are not in Newton's book. As we shall see, a large part of the literature of mechanics for sixty years following the *Principia* searches various principles with a view to finding the equations of motion for systems Newton has studied and for other systems nowadays thought of as governed by the "Newtonian" equations. To summarize: In Newton's *Principia* occur no equations of motion for systems of more than two free mass-points or more than one constrained mass-point; Newton's theories of fluids are largely false; and the spinning top, the bent spring, lie alltogether outside Newton's range" [27, p. 92 – 93].

Clearly and simply, no dynamical problem concerning a single rigid body is solved in Newton's *Principia*. The whole of rigid body dynamics is a creation of Euler's hands. Euler was the first to realize that "while Newton had used the word "body" vaguely and in at least three different meanings ... the statements of Newton are generally correct only when applied to masses concentrated at isolated points; he [Euler] introduced the precise concept of *mass-point*, and his is the first treatise [29] devoted expressly and exclusively to it" [*ibid.*, p. 107].

In other words, citing Newton's name is connection with *le principe de conservation du mouvement du centre de gravité*, Lagrange allows a historical mistake to slip in. As regards the name of D'Alembert mentioned in the same connection, it is, inasmuch as rigid body dynamics is concerned, controversial to the highest degree. The criticism the following fragment from Truesdell's *Essays* contains is, by our opinion, not as categorical as it should be:

"At the age of twenty-four, D'Alembert published a book with a title indicative of what mechanics was in the Age of Reason: "Treatise on Dynamics, in which the laws of equilibrium and motion of bodies are reduced to the smallest possible number and are proved in a new way, and where is given a general principle for finding the motion of several bodies which react mutually in any way." This is the book to which we have several times referred in connection with the program of the age. In regard to practice, it is less successful. Contrary to the usual claims, neither did D'Alembert reduce dynamics to statics, nor did he, here or anywhere, propose either of the two forms of the laws of dynamics now usually called "D'Alembert's principle", these being due to Euler and Lagrange, respectively, at a later period" [*ibid.*, p. 112 – 113].

By our opinion, D'Alembert's *Traité* [30] does not contain the complete solution of a single dynamical problem concerning rigid bodies. For that reason we find it inadequate that Lagrange refers to D'Alembert in connection with *le principe de conservation du mouvement du centre de gravité*, as far as namely rigid bodies are concerned. Anyway, let us see somewhat closer what does, as a matter of fact, this principle state.

According to Lagrange's formulation, already cited, "l'état de repos ou de mouvement cu centre de gravité de plusieurs corps n'est point altéré par l'action réciproque de ces corps, quelle qu'elle soit". Three remarks are relevant in this connection.

First, Lagrange's *principe de conservation du mouvement du centre de gravité* is a non-constructive statement, while a mathematical axiom, or principle, or law, must contain in itself something constructive. (If a mathematical axiom, like Euclid's fifth postulate, for instance, states the impossibility of a mathematical phenomenon. its goal is to ensure the soleness of a mathematical object, the existence of which is already independently established.)

Second, Lagrange's second principle does not imply the laws of motion of a single rigid body, being either meaningless or trivial in the case of one only rigid body.

Third, the principle of conservation of the motion of the center of gravity of a system of several bodies is a *trivial corollary* from Euler's first dynamical axiom. Indeed, the definitions

$$m = \int dm \quad , \tag{56}$$

and

$$\boldsymbol{r}_G = \frac{1}{m} \int \boldsymbol{r} dm \tag{57}$$

of the mass and the radius-vector

$$\boldsymbol{r}_G = \boldsymbol{OG} \tag{58}$$

of the mass-center G respectively of any rigid body B imply

$$m \boldsymbol{w}_G = \int \boldsymbol{w} dm \tag{59}$$

provided

$$\boldsymbol{w}_G = \frac{d^2 \boldsymbol{r}_G}{dt^2}, \tag{60}$$

since by hypothesis

$$\frac{d}{dt}(dm) = 0, \quad \frac{d}{dt}(m) = 0. \tag{61}$$

Now (59) and the first relations (23), (24) imply

$$m \boldsymbol{w}_G = \boldsymbol{F}. \tag{62}$$

The equation (62) which is an immediate corollary from Euler's law of momentum, expresses an important fact, classical for rigid body analytical dynamics, namely that the mass-center G of any rigid body B is moving in the same manner, as would a mass-point, located at G, the mass of which is equal to that of B and which is acted on by the same forces that act on B.

Let now a system S of n rigid bodies B_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n > 1$) be given and let m_ν and G_ν be the mass and the mass-center of B_ν ($\nu = 1, \ldots, n$) respectively. Let

$$\boldsymbol{r}_\nu = OG_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{63}$$

Then the mass-center G of S is defined by

$$\boldsymbol{r}_G = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + \cdots + m_n\boldsymbol{r}_n}{m_1 + \cdots + m_n}. \tag{64}$$

On the other hand, let $\boldsymbol{F}_\nu$ be the basis of the system of forces, acting on B_ν ($\nu = 1, \ldots, n$) respectively and let

$$\boldsymbol{w}_\nu = \frac{d^2\boldsymbol{r}_\nu}{dt^2} \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{65}$$

Then Euler's theorem (62) implies

$$m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{66}$$

and (66), (64) imply that G is moving according

$$\boldsymbol{w}_G = \frac{\boldsymbol{F}_1 + \cdots + \boldsymbol{F}_n}{m_1 + \cdots + m_n}. \tag{67}$$

Let us now suppose that the bodies of the system S are subjected to additional interactions. More precisely, let the rigid body B_ν ($\nu = 1, \ldots, n$) be acted on by the rigid body B_μ ($\mu = 1, \ldots, n$; $\mu \neq \nu$) by a system of forces with basis $\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$. Then, according to Newton's law of action and reaction,

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu} + \boldsymbol{F}_{\nu\mu} = 0. \tag{68}$$

The rigid body B_ν ($\nu = 1, \ldots, n$) is moving according to the law

$$m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu + \sum_{\mu=1}^{n} \boldsymbol{F}_{\mu\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{69}$$

provided

$$\boldsymbol{F}_{\nu\nu} = o \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{70}$$

Adding the equations (69) with (70) together and taking into consideration (68), one obtains

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu w_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} F_\nu. \tag{71}$$

The last relation, together with (64), implies again (67), therewith proving Lagrange's *principe de conservation du mouvement du centre de gravité.* Let us note that it is undeducable save by the aid of Euler's first dynamical law which does not occur among Lagrange's dynamical principles.

We do not know how this *principe de la Dynamique* has been used in rigid body dynamics of Lagrange's predecessors and contemporaries for solving special problems. For us, however, it is wholly useless in the capacity of a mathematical tool for such aims. By our opinion, today it represents nothing more than a curious mathematical fact. In any case, the claims that it could serve *de fondement à la Dynamique*, as Lagrange unambiguously states, are frankly ridiculous.

Apropos of the principle of *conservation des moments de rotation* or *principe des aires* Lagrange writes:

"Le troisième principe est beaucoup moins ancien que les deux précédents, et parait avoir été découvert en même temps par Euler, Daniel Bernoulli et d'Arcy, mais sous des formes différentes. Selon les deux premiers, ce principe consiste en ce que, dans le mouvement de plusieurs corps autour d'un centre fixe, la somme des produits de la masse de chaque corps par sa vitesse de circulation autour du centre et par sa distance au même centre est toujours independente de l'action mutuelle que les corps peuvent exerces les uns sur les autres, et se conserve la même tant qu'il n'y a aucune action ni aucun obstacle extérieur. Daniel Bernoulli a donné ce principe dans le premier Volume des *Mémoires de l'Académie de Berlin,* qui a paru en 1746, et Euler l'a donné la même année dans le tome I[er] de ses *Opuscules;* et c'est aussi le même problème qui les y a conduit.... Le principe de d'Arcy, tel q'il l'a donné à l'Académie des Sciences, dans les *Mémoires* de 1747, qui n'ont paru qu-en 1752, est que la somme des produits de la masse de chaque corps par l'aire que son rayon vecteur décrit autour d'un centre fixe sur un meme plan de projection est toujours proportionelle au temps. On voit que ce principe est une généralisation du beau théorème de Newton sur les aires décrites en vertu de forces centripètes quelconques; et pour an apercevoir l'analogie ou plutôt l'identité avec celui d'Euler et de Daniel Bernoulli, il n'y a qu'à considérer que la vitesse de circulation est exprimée par l'éléments, multiplié par la distance au centre, donne l'élément de l'aire décrite autour de ce centre; d'où l'on voit que ce dernier principe n'est aurte chose que l'expression différentielle de celui de d'Arcy. Cet auteur a présenté ensuit son principe sous une autre forme qui le rapproche davantage du précédent. et qui consiste en ce que la somme des produits des masses par les vitesses et par les perpendiculaires tirées du centre sur les directions du corps est une quantité constante. Sous ce point de vue, il en a fait même une espèce de principe métaphysique qu'il appelle la *conservation de l'action,* pour l'opposer ou plutot pour le substiteur à celui de *la moindre quantité d'action*; comme si des dénominations vagues et arbitraires faisaient l'essence des loi de la nature et pouvaient, par quelque vertu secrète, ériger en causes finales de simples résultats des lois connues de la Mécanique. Quoiqu'il en soit, le principe don't il s'agit a lieu généralement pour tous les systèmes de corps qui agissent les uns sur les autres d'une façon quelconque, soit par des fils, des lignes inflexibles, des lois d'attraction, etc., et qui sont de plus sollicités par des forces quelconques dirigées à un centre fixe, soit que le système soit d'ailleurs entièrement libre, ou qu'il soit assujetti à ce mouvoir autour de ce même centre. La somme des produits des masses par les aires décrites autour de ce centre et projetées sur un plan quelconque est toujours proportionelle au temps."

The formulations of Lagrange's in connection with the *principe de conservation des moments de rotation* or *principe des aires* are considerably more indistinct than those concerning the first two principles: his explanations are obscure to such a degree that quite a lot of historical generosity is required for their acceptance.

In accordance with Lagrange's own words, the principle of conservation of the moments of rotation consist in the fact that, if several bodies are moving around a fixed center, the sum of the products of the masses of the bodies with their velocities of rotation around the said center and with their distances from the latter is always independent from the mutual interactions of the bodies, whatever they might be. It is, however, completely meaningless to speak about velocity of rotation of a body around a center and about a distance of a body from a center, unless the body in question is infinitesimal, i.e. a mass-point. In such a manner, a century after Newton and five years after Euler's death Lagrange is using a mechanical language, cast aside by Euler fifty years ago [29]. It is clear that, in Lagrange's formulation at least, the *principe des aires* belongs to mass-point dynamics and has, therefore, nothing to do with rigid body dynamics, no matter that Lagrange is speaking about *corps* and not about patricles.

The use of the term *centre* in Lagrange's formulation is a quite formal one: the role of this *centre* could play any other fixed point in space. This term is used only in the capacity of a system of reference and not as a source of forces (central forces) acting on the mass-points.

One should not disregard the fact that all three principles already cited in Lagrange's formulation concern systems of (finite or infinitesimal) bodies and not a single rigid body. This fact is by no means accidental: it is the result of a mechanical politics with far reaching sequels.

Indeed, as it has been emphasized in the first part [1] of this series, a characteristic feature of the Lagrangean dynamical tradition consists in the fact that anything done by the Lagrangeanists is accomplished for ***systems of a finite number of mass-points*** only, being afterwards quite unpardonably applied to rigid bodies in a completely illegal way (see the analysis on p. 18 – 20 of [1]). This is the quintessence of Lagrange's dynamical politics, his mechanical *Weltanschauung*, his scientific credo.

A most remarkable scientific incident, if that is the word, will throw additional light on Lagrange's ideological positions in mechanics. In his article [31] he has written:

"Je considére les corps proposés comme l'assemblage d'une infinité de corpuscules ou points massifs unis ensemble de manière qu'il gardent toujours nécéssairement entre eux les mêmes distances... J'aurai par les principes de mécanique, à cause que le système est supposé libre autour d'un point fixe, et qu'il n'est d'ailleurs sollicité par aucune force étrangère, j'aurai, dis-je, sur-le-champ ces trois équations..." (quoted by [32, p. 590]).

Thence Lagrange claims to have derived the theorem of moment of momentum. Euler, who refused to accept the picture of a rigid body as composed of infinitely many mass-points, wrote apropos of [31] in the introduction of his memoir [33] with ill-concealed if latent irony:

"But when I tried with greatest avidity to follow his extremely profound thoughts, truly I could not get myself to go through all his calculations. Even the first lemma so deterred me that on account of my blindness I could not hope in any way to check through all the analytical devices he used" (quoted by [27, p. 260], see also [34]).

A broad hint — blindness. This is written in 1775, and Euler has been stone-blind years ago. His blindness did not prevent him from printing many tens of articles every year. Moreover, namely this paper that "confession" is taken from contains the greatest mechanical discovery of Euler in all his scientific life — his dynamical axioms. In order to understand Euler's delicacy, one must bear in mind, that all his life through Euler has been extremely tolerant of his younger scientific colleague. The inverse theorem is not true.

Summing up, one should clearly state that Lagrange's *principe des aires* could by no means serve *de fondament à la Dynamique*.

Apropos the last *principe de la moindre quantite de l'action* Lagrange writes:

"Je viens enfin au quatrième principe, que j'appelle de la *moindre action*, par analogie avec celui que Maupertuis avait donné sous cette dénomination et que les écrits de plusieurs auteurs illustres ont rendu ensuit si fameux. Ce principe, envisagé analytiquement, consiste en ce que, dans le mouvement des corps qui agissent les unes sur les autres, la somme des produits des masses par les vitesses et par les espaces parcurus est un minimum. L'auteur en a deduit les lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière, ainsi que celles du choc des corps, dans deux Mémoires lus, l'un à l'Académie des Sciences de Paris, en 1744, et l'autre, deux ans aprés, a celle de Berlin. Mais ces applications sont trop particulières pour servir à établir la vérité d'un principe général, elles ont d'ailleurs quelque chose de vague et d'arbitraire, qui ne peut que rendre incertaines les conséquences, qu'on en pourrait tirer pour l'exactitude même du principe. Aussi l'on aurait tort, ce me semble, de mettre ce principe, présenté ainsi, sur la même ligne que ceux que nous venons d'exposer. Mais il y a une autre manière de l'envisager, plus générale et plus rigoureuse, et qui mérite seule l'attention des géomètres. Euler en a donné la première idée à la fin de son Traité des isopérimètres, imprimé à Lausanne en 1744, en y faisant voir que, dans les trajectoites décrites par des forces centrales, l'intégrale de la vitesse multipliée par l'élément de la courbe fait toujours un maximum ou un minimum. Cette propriété, qu'Euler avait trouvée dans le mouvement des corps isolés, et qui paraissait bornée à ces corps, je l'ai étendue, par le moyen de la conservation des forces vives, au mouvement de tout système de corps qui agissent les unes sur les autres d'un manière quelconque; et il en est résulté ce nouveau principe général, que la somme des produits des masses par les intégrales des vitesses multipliées par des éléments des espaces parcourus est constammement un maximum ou un minimum. Tel est le principe auquel je donne ici, quoique improprement, le nom de *miondre action*, et que je regarde, non comme un principe métaphysique, mais comme un résultat simple et général des lois de la Mécanique. On peut voir dans le tome II des *Mémoires de Turin* l'usage que j'en ai fait pour résoudre plusieurs problèmes difficiles de Dynamique. Ce principe, combiné avec celui des forces vives et développé suivant les régles du calcul des variations, donne directement toutes les équations nécéssaires pour la solution de chaque problème."

(All fragments of *Méchanique Analitique* concerning the four dynamical principles of Lagrange are quoted after [35, t. I, p. 238, 257 – 262].)

This last principle of Lagrange's is obviously a variational one. As a such, its range of action is restricted to conservative dynamical systems only, and in this connection it falls under the criticism made apropos of the principe *de conservation des forces vives*, third point. Therefore, the last statement of Lagrange's, namely that this principle "donne directement toutes les équations nécéssaires pour la solution de chaque problème", belongs to the fairy-tales of the Lagragean tradition.

At that, let us underline that no variational principle of analytical dynamics is up to now proved save for mechanical systems consisting of a finite number of mass-points only. In order words, any application of such a principle to rigid bodies is mathematically illegal, at least till the contrary is proved.

In such a way it is established beyond doubt that Lagrange's claims in the *Méchanique Analitique*, namely that "cet Ouvrage ... réunira et presentera sous un même point de vue les différents principes trouves jusqu'ici pour faciliter des questions de Mécanique, en montrera la liaison et la dépendance mutuelle, et mettra à portée de juger de leur justesse et de leur étendue", is not true. Indeed, as already emphasised, the four principles discussed above purely and simply cannot serve "de fondement à la Dynamique". The fact that Lagrange included them in his treatise is not yet the biggest misfortune. Far worse is the circumstance that he overlooked the only dynamical principles on which the mathematical consolidation of the logical foundations of analytical mechanics is possible: the Eulerian laws of momentum and of kinetical moment.

Before we enter this topic, it is necessary to turn our attention to a phenomenon inherent to the early history of mechanics and focused on the existence of an immense number of mechanical principles. Come to that, what does in actuality a *dynamical principle* mean?

A categorical answer of this question is nowhere to be found in the mechanical literature. An attempt along these lines has been made at the beginning of this century by A. Voss in the *Encyclopedia of Mathematical Sciences* [36].

Voss begins his article *Die Prinzipien der rationellen Mechanik* with a brief periphrastic explanation of the various features of the notion:

"*Prinzipe and Prinzipien der Mechanik*. Der Ausdruck Prinzipe oder Prinzipien wird in der Mechanik in sehr verschiedener Weise angewendet. Unter *Prinzipien* versteht man in irgend einer Wissenschaft, hier speziell der *Mechanik*, *erstens* Aussagen, die nicht wieder auf andere demselben wissenschaftlichen Gebiete angehörige Behauptungen zurückgeführt, sondern als Ergebnisse anderer Resultate der Erkenntnis angesehen werden..., z.B. die *Axiome* oder *Postulate*..., und die teils logischer oder methodologischer, teils metaphysischer oder physikalischer, Art sein können; *zweitens*, *allgemeine aus den Grundvorstellungen der Mechanik gewonnene Sätze*, die, wenn auch in ihren einfacheren Fällen auf Grund früherer deduzierbar, doch in ihrem weitesten Umfange tatsächlich nicht mehr vollständig beweisbar erscheinen (z.B. das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, das *d'Alembert*'sche, resp. *Gauss*'sche Prinzip); *drittens*, ... allgemeine *rein mathematische Methoden für die Behandlung der Mechanischen Probleme*, die an sich zunächst völlig auf Grund von Prinzipien der zweiten Art erweisbar, zur rein deduktiven Behandlung ausgedehnter Teile der Mechanik ausreichend sind, in ihrer weitesten Ausdehnung allerdings wieder einen heuristischen Charakter erhalten (*Hamilton*'sches Prinzip, Prinzip der kleinsten Aktion); *endlich*, nach *C.G.J.Jacobi* ... *analytische Methoden*, Integralgleichungen der dynamischen Differentialgleichungen zu gewinnen... Die methodologische Stellung der Prinzipien zweiter und dritter Art zueinander wird sehr verschieden beurteilt. Auch wenn man beide, wie vielfach zu geschehen scheint, gleichsam als Beschwörungsformeln anseht, in denen ein lange fortgesetzter Prozess induktiver Erkenntnis seinen Ausduck gefunden hat, besteht doch ein sehr wesentlicher Unterschied in dem Grade der Abstraktion, der in beiden Fällen eintritt. — Die im Texte getroffene Unterscheidung von Prinzipien verschiedener Art kann überhaupt nur eine allgemeine sein; an welcher Stelle jede einzelne der mannigfaltigen als "Prinzipe" im Laufe der Zeit bezeichneten Aussagen einzuordnen ist, wird von den oft schwankenden Vorstellungen abhängen, die den Ausdruck Prinzip begleiten" [36, *erster Teilband*, S. 10 – 11].

Apropos of the fourth sort of mechanical principles Voss says:

"Wir rechnen dahin die analytische Verwendung des Satzes von der lebendigen Kraft, die Schwerpunktsintegrale, das Prinzip der Flächen, des letzten Multiplikators, *Hamilton*'sches Prinzip der varierenden Wirkung, das *Poisson-Jacobi*'sche Prinzip, die mannigfachen Transformations- und Äquivalenzprinzipe etc. etc." [*ibid.*, S. 10 – 11].

It is worth noting that Voss is fully aware of the contemporary unenviable state of the logical foundations of rational mechanics as well as of the hopelessness, in these strained circumstances, of any try at strict formulations:

"Die Erscheinung, dass die Resultate mathematischer Lehrgebäude von grundliegender Wichtigkeit oft eine lange Zeit hindurch ihrer strengen wissenschaftlichen Begründung vorausgeeilt sind, hat sich in weit höherem Grade bei der *Mechanik*, wie bei der Arithmetik oder Infinitesimalrechnung wiederholt. Man kann den Standpunkt, welchen die systematische Entwicklung der Mechanik in ihrer gegenwärtigen Gestalt einnimmt, etwa mit dem der Infinitesimalrechnung vor *Cauchy* vergleichen, auf den sich fast wörtlich die Bemerkungen von *Hertz* in seiner Einleitung zur Mechanik anwenden lassen ... über das bei der Exposition der Grundlagen der Mechanik häufig hervortretende Bestreben, über die Schwierigkeiten und Verlegenheiten in denselben möglichst bald hinaus und zu konkreten Beispielen zu kommen... Ein Blick auf den gegenwärtigen Zustand der Werke über Mechanik, soweit sich dieselben nicht auf eine rein mathematische Behandlung, sondern auf die Entwicklung der eigentlich mechanischen Vorstellungen beziehen, dürfte indes zeigen, dass unter denselben, da wo es sich nicht um stereotype Wiederholung gewisser Wendungen handelt, die grössten Verschiedenheiten hinsichtlich der Prinzipien bestehen" [*ibid.*, S. 8 – 9].

In the second part *Die allgemeinen Prinzipien der rationellen Mechanik* of his article Voss discusses three classes of mechanical principles.

Apropos of the first class *philosophische Prinzipien* Voss writes:

"Von den philosophischen Prinzipien muss hier neben dem schon oben erwähnten *Kausalitätsprinzip* der *Satz vom zureichenden Grunde* hervorgehoben werden. Man schloss aus dem letzteren, dass der in Bewegung unabhängig von allen anderen Dingen vorgestellte materielle Punkt seine *Richtung* nicht ändern könne, während ein gleiches auch von der *Grösse* der Geschwindigkeit zu behaupten erst durch die *dialektische Unterscheidung* von Ursache und Wirkung möglich wird, welche die Ursache *ausserhalb* des Bewegten verlegt... Auch bei der Entwicklung des Kraftbegriffes, den Beweisen für das Parallelogramm der Kräfte, der Betrachtung der Fernwirkung zwischen zwei materiellen Punkten etc., spielt dieser Satz eine historische Rolle...

Dass man aus *bloss logischen* Prämissen keine Entscheidung über *reale* Verhältnisse treffen kann, wird gegenwärtig wohl nicht bezweifelt... Anders aber steht es, wenn der Satz vom zureichende Grunde in der Form eines logischen Schlusses auftritt, *dessen Prämissen vollständig als aus der Erfahrung bekannt vorausgesetzt werden*...

Von ganz wesentlichen Einflusse sind für die Entwicklung der Mechanik *teleologische* Prinzipien gewesen. Das Prinzip der kleinsten Wirkung ist geradezu von *Euler* ... aus einem solchen Gesichtspunkte abgeleitet; *Gauss*' Prinzip des kleinsten Zwanges, sowie gewisse Prinzipe der Elastizitätstheorie ... knüpfen ebenfalls an solche Vorstellungen an. — Die Frage, ob in der Natur wirklich Thatsachen vorliegen, welche den Gedanken beschäftigen, dass mit dem kleinsten Aufwande von Mitteln der grösste Effekt erreichbar werde, braucht man indessen hier nicht zu berühren. Bei Überlegungen dieser Art dürfte meistens ein sicheres *Maass* weder der aufgewandten Mitteln noch des erreichten Effektes zugrunde gelegt sein, sodass *die Behauptung einen klaren Sinn überhaupt nicht besitzt.* Was aber die Anwendung desselben in der *Mechanik* betrifft, so sind diese teleologischen Gesichtspunkte im *eigentlichen Sinne* schon um deswillen ganz unzutreffend ..., weil keineswegs — weder beim Prinzip der kleinsten Aktion, noch beim *Gauss*'schen Prinzip — die wirkliche Bewegung durch eine Minimumeigenschaft vor allen anderen ebenfalls *möglichen* ausgezeichnet ist, sondern nur gegenüber gewissen rein fingierten, im allgemeinen aber *unmöglichen* Bewegungen. Thatsächlich haben sich allerdings diese teleologischen Gesichtspunkte für den Aufbau der Wissenschaft als sehr förderlich erwiesen, und es erscheint in mehrfacher Beziehung von Interesse, die allgemeinen Gründe hierfür aufzusuchen...

Mach ... hat dagegen auf andere Prinzipien aufmerksam gemacht, welche aller

Naturauffassung zugrunde liegen sollen, die der *Ökonomie* und *Einfachheit.* Nach ihm ist es das Ziel aller Wissenschaft, das Gebiet der einzelnen Erfahrungen durch zusammenfassende Beschreibung derart zu ersetzen, dass durch den geringsten Aufwand an Gedankenarbeit dasseble übersehen werden kann. Das ist natürlich nur dadurch möglich, dass man die den einzelnen Erfahrungen zugrunde liegenden *Elemente* aufsucht und durch deren gesetzmässige Konstruktion eine Erklärung der Vorgänge liefert, für deren fortschreitende Ausbildung dann wieder rein formale Prinzipien, wie das der *Kontinuität* und *Stetigkeit*, — dem *Hankel*'schen... Prinzip der *Permanenz der formalen Gesetze* vergleichbar — vor allem die *Prinzipien der Analogie*..., d.h. die Übertragung gewisser Gedankenreihen, welche für ein Gebiet vollständig entwickelt sind, auf *neue* Gebiete, maassgebend werden" [*ibid.*, S. 18 – 20].

Apropos the second class mathematische Prinzipien Voss says:

"Insbesondere ergeben sich aus dem Prinzip der Einfachheit gewisse *allgemeine Gesichtspunkte rein mathematischer Art.* Solche liegen vor, wenn man den Bewegungsraum als *Euklidischen* mit seiner unendlichen Theilbarkeit..., die Koordinaten der Bahnen der Punkte als *stetige*, beliebig oft differenzierbare Funktionen der Zeit..., wenigstens insoweit von einzelnen singulären Stellen abgesehen wird, ansehen, wenn wir demgemäss von den Grenzwerten..., d.h. den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen reden..., wenn wir voraussetzen, dass das Verhältniss von Masse zum Volum bei kontinuierlicher Raumerfühlung bei stets abnehmender Grösse des letzteren sich einem bestimmten, überdies wieder differenzierbaren Grenzwerte, der Dichtigkeit, nähere. Die Mathematik ist freilich gegenwärtig so weit entwickelt, dass auch bei Zugrundelegung des allgemeinen Begriffes der stetigen Funktion noch bestimmte Aussagen möglich sind, doch hat sich bisher kein Bedürfnis gezeigt, in die Mechanik diese von der anschaulichen Form der Bewegungsvorgänge weit abliegenden Abstraktionen aufzuheben... Man betrachtet es ferner als ein allgemeines Prinzip, dass eine durch Kräfte definierte Bewegung, durch ihren Anfangszustand vollkommen bestimmt sei...; ausreichend ist dafür, die Kräfte als eindeutige beliebig oft differenzierbare, insbesondere als reguläre Funktionen der Koordinaten und Geschwindigkeiten vorauszusetzen... Hierher gehört auch das Homogeneitätsprinzip. Die Begriffe der Mechanik erfordern die Festsetzung einer Reihe *fundamentaler Einheiten* (z.B. für Länge, Zeit, Masse in der reinen Kinetik), aus denen weitere Begriffe (wie z.B. Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft etc.) abgeleitet werden. Es liegt nun in der Natur der Sache, dass bei vielen Betrachtungen *Beziehungen zwischen diesen Begriffen von der Wahl dieser Grundeinheiten unabhängig* sein müssen. Solche Gleichungen bleiben daher invariant, wenn die Fundamentaleinheiten der Maassbestimmung durch irgend welche andere unabhängig von einander ersetzt werden. In diesem Charakter der Invarianz besteht das *Prinzip der Homogeneität*...; durch dasseble wird denjenigen Gleichungen der Mechanik, welche zur Beschreibung von den gewählten Einheiten unabhängiger Vorgänge dienen sollen, ein *formeller Charakter* zugeschrieben, der sich zur Prüfung solcher Gasätze selbst nützlich erweist... In einer etwas andere Form kommt das Prinzip bei der Untersuchung dynamischer Verhältnisse als *Prinzip der Ähnlichkeit* (principe de similitude) zur Verwendung... Endlich sei noch an das *Su-*

perpositionsprinzip, als einer unmittelbaren Folgerung aus den Eigenschaften der Lösungen linearer homogener Differentiagleichungen, erinert" [*ibid.*, S. 20 – 23].

At last, apropos of the third class *mechanisch-physikalischen Prinzipien* Voss writes:

"In naher Beziehung stehen den mathematischen Prinzipien die *mechanisch-physikalischen*, insbesondere die *Kontinuitätshypothese*, die man über die *Materie*... die *bewegliche Substanz*, zugrunde legt. Es scheint nicht angebracht, hier zu erörten, ob die Mechanik ein Interesse daran hat, den Begriff der Materie neben dem für sie allein maassgebenden der *Masse* beizubehalten. Die Mechanik geht zunächst von dem Begriff des *materiellen Punktes*..., d.h. eines geometrischen, aber vermöge seiner Masse inserer Beobachtung zugängligen, Punktes, dann von dem System n solcher Punkte aus, und man wird geneigt sein, die Vorgänge bei einem beliebig grossem n, wenigstens soweit allgemeine Theoreme in Frage kommen, hiernach zu beurteilen. Es ist aber leicht zu sehen, dass man auf diesem Wege nicht unmittelbar zu der Vorstellung der Bewegung eines kontinuierlich mit Masse erfüllten Raumes kommt" [*ibid.*, S. 24 – 25].

While in the third part *Die Grundbegriffe der rationellen Mechanik* of Voss' article the basic notions of phoronomy, statics, and dynamics are introduced and discussed, the fourth part *Die speziellen Prinzipien der rationellen Mechanik* contains a formulation and analysis, together with detailed historical and bibliographical data, of the principle of virtual velocities, the principle of Fourier, the principle of D'Alembert and Lagrange's dynamical equations, the principle of Gauss, the principle of Hamilton, the principle of least action, the principle of living force, and the general principle of energy in physics.

Although written almost a century ago ("abgeschlossen im Juli 1901"), this article of Voss' is distinguished by its exactness, elaborateness, and thoroughness, which are scarcely found in the later literary sources on the subject. It penetrates into the historical roots of the idea of mechanical principles, its role in the development of mechanics, its many-sided aspects, and, after all, its prejudices if not superstitions. These are the important reasons inciting us to carry here such vast fragments from this article: after all, the encyclopedia [36] is nowadays not easy of access for the ordinary reader. Nevertheless, after studing even such a profound account on the principles of rational mechanics, one keeps on being at a loss when faced with the question: *what does namely a mechanical principle mean*?

No wonder Voss could not give an explicit answer of this question: the only way to such an answer leads through Hilbert's axiomatic scheme, and his *Grundlagen* [37] have been published only two years before Voss finished *Die Prinzipien der rationellen Mechanik*. If rational mechanics is nothing but mathematics, and mathematics of the first water at that, as Truesdell maintains [27, p. 335, 337], then mechanical principles should differ in no way from mathematical principles. In order words, a principle in mechanics should mean the same thing as a principle in mathematics. Hence, the answer of the question "what does a mechanical principle mean?" would be completely trivial if one knows the answer of the question "what does a mathematical principle mean?" What does it mean, indeed?

As a matter of fact, the term *principle* is in mathematics a historical remnant and its use today may be exculpated only by the language tradition. In reality, this is avoided in modern mathematical texts as an anachronism.

A *principle* in mathematics means a *theorem* or an *axiom*: *tertium non datur*. In other words, a mathematical principle is a mathematical statement which, as such, is either provable (or disprovable) or unprovable (or undisprovable): in the first case it is, purely and simply, a (true or untrue) mathematical theorem; in the second case it is, also purely and simply, a mathematical axiom — neither more, nor less. Classical examples for mathematical principles of the first and second kinds are the principle of Cavalieri and the principle of mathematical induction, respectively: nowadays the principle of Cavalieri is a simple theorem of integral calculus, and the principle of mathematical induction is an arithmetic axiom.

Naturally, the qualification of a mathematical statement as "provable" or "unprovable" is a relative, rather than an absolute, procedure: it depends upon the adopted axioms of the specific mathematical theory. In such a sense, a mathematical principle, qualified as a "theorem" in a given axiomatic system may turn out to be an "axiom" in another one.

This interpretation of the term *principle* is by no means something new: Hilbert proclaimed is more or less a century ago. Hilbert's name is mentioned here in no way accidentally: when the word *axiom* was used above, its meaning was in Hilbert's sense — not the old-fashioned, discredited, disreputed, though nevertheless frequently used by the physicists, in general, and by the mechanicians, in particular, namely "an obvious truth needing no demonstration". Dedekind used to say: *Was beweisbar ist, soll in der Wissenschaft nicht ohne Beweis geglaubt werden.* An axiom is a mathematical statement without a proof not because it does not need one, but for the simple reason that it cannot be proved (in the frames in a given system of other axioms). Hilbert was the first to see that an axiom must unconditionally include undefinable mathematical notions: if all the terms an axiom includes were defined preliminarily, then it would be a (true or untrue) theorem and no axiom at all. The indefinable terms the axioms of a special mathematical theory (arithmetic, geometry, topology, analytical mechanics, in the long run) include are, according to Hilbert's axiomatical principles, defined implicitly namely by this system of axioms.

All these things are truisms today for all educated mathematicians all over the world. Their repetition here may be excused only by the fact that, all the same, they have not yet become a part of the intellectual furniture of most contemporary mechanicians, of their scientific mental constitution. The uninitiated in the present state of affairs in rational mechanics may find it hard to believe; the cold fact, however, remains that ideologically most modern representatives of such a fundamental mathematical theory as analytical mechanics share the logical prejudices of their colleagues from the epoch before the French revolution.

Why should Lagrange call principles the laws de conservation des forces vives, de conservation du mouvement du centre de gravité, de conservation des moments de rotation, and de la moindre quantité de l'action, all these propositions being simple mechanical theorems? A taste for a pompous language? Putting on a consequential air? Or amenability to irrationality? The philosophers delight in chewing upon das Wesen der Dinge, over den Kern der Sache, on weltumfassende

Gedanken; the mathematicians are, however, men of quite another kind: they believe in cats that catch mice.

Similarly, why should one call "principles" those propositions Voss refers to, dividing them into three groups? As regards the *Kausalitätsprinzip*, the *Satz vom zureichende Grunde*, and the *teleologische Prinzipien*, mathematically they are hardly worthy of being mentioned. The same holds good for the *Kontinuitätshypothese*, for Mach's principles of *Ökonomie* and *Einfachheit*, for Hankel's *Prinzip der Permanenz der formalen Gesetze*, *die Prinzipien der* Analogie, the *Stetigkeitshypothese*, the principles of *Homogeneität*, of *Ähnlichkeit*, and the *Superpositionsprinzip* — all these must be regarded as general requirements that are satisfied in a most natural way in the process of technical development of the special mathematical theory under consideration. However, as regards the other mechanical "Prinzipien" Voss mentions — for instance, *das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, das d'Alembert'sche Prinzip, Gauss'sche Prinzip des kleinsten Zwanges, das Hamilton'sche Prinzip, das Prinzip der kleinsten Aktion*, etc. — all these statements are specific mechanical theorems to which the qualification "principle" is nowadays attached without the slightest motive or any leg to stand on.

The only two legitimate pretendents for the principles of rigid body analytical dynamics in the whole history of this science among all other impostors are Euler's two dynamical axioms. If one has not become conscious of this fact, then he does not know a B form a buffalo foot in rational mechanics. The essence of the laws of momentum and of kinetical moment is discussed at length in the articles [16, 17], so that in this connection the reader is referred to these sources. What we shall do here is to write down the analytical expressions of Euler's axioms (24) called the *Eulerian dynamical equations*: they will serve us for deepening our understanding of a rigid body dynamical problem.

Let $\bar{p} = \overline{\Omega P}$ for any point P of the rigid body B and let $\bar{p}_G = \overline{\Omega G}$. Then the identity

(72)
$$r = r_\Omega + \bar{p}$$

implies

(73)
$$\int r dm = \int r_\Omega dm + \int \bar{p} dm$$

or

(74)
$$r_G = r_\Omega + \frac{1}{m} \int \bar{p} dm$$

by virtue of (56), (57). Now (74) and the identity

(75)
$$r_G = r_\Omega + \bar{p}_G$$

imply

$$\overline{\rho}_G = \frac{1}{m}\int \overline{\rho}\, dm. \tag{76}$$

If by definition

$$\boldsymbol{L}_\Gamma = \int \overline{\rho} \times (\overline{\omega} \times \overline{\rho})dm - m\overline{\rho}_G \times (\overline{\omega} \times \overline{\rho}_G) \tag{77}$$

and

$$\boldsymbol{M}_G = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{r}_G \tag{78}$$

denotes the moment with respect to G of all forces, both active and passive, acting on B, then Euler's second dynamical axiom takes the form

$$\dot{\boldsymbol{L}}_\Gamma - \boldsymbol{M}_G = \boldsymbol{O}. \tag{79}$$

Let by definition

$$\overline{\rho} = \xi\overline{\xi}^{\circ} + \eta\overline{\eta}^{\circ} + \zeta\overline{\zeta}^{\circ}, \tag{80}$$

$$\overline{\rho}_G = \xi_G\overline{\xi}^{\circ} + \eta_G\overline{\eta}^{\circ} + \zeta_G\overline{\zeta}^{\circ}, \tag{81}$$

$$I_{\xi\eta} = \int (\xi^2 + \eta^2)dm, \quad I_{\eta\zeta} = \int (\eta^2 + \zeta^2)dm, \quad I_{\zeta\xi} = \int (\zeta^2 + \xi^2)dm, \tag{82}$$

$$D_{\xi\eta} = \int \xi\eta\, dm, \quad D_{\eta\zeta} = \int \eta\zeta\, dm, \quad D_{\zeta\xi} = \int \zeta\xi\, dm, \tag{83}$$

$$A = I_{\eta\zeta} - m(\eta_G^2 + \zeta_G^2), \; B = I_{\zeta\xi} - m(\zeta_G^2 + \xi_G^2), \; C = I_{\xi\eta} - m(\xi_G^2 + \eta_G^2), \tag{84}$$

$$D = D_{\eta\zeta} - m\eta_G\zeta_G, \quad E = D_{\zeta\xi} - m\zeta_G\xi_G, \quad F = D_{\xi\eta} - m\xi_G\eta_G. \tag{85}$$

Besides, let $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ be the unit vectors of the axes Ox, Oy, Oz respectively of the inertial system of reference $Oxyz$ and let by definition

$$\boldsymbol{r}_G = x_G\boldsymbol{i} + y_G\boldsymbol{j} + z_G\boldsymbol{k}, \tag{86}$$

$$\boldsymbol{F}_\mu = F_{\mu x}\boldsymbol{i} + F_{\mu y}\boldsymbol{j} + F_{\mu z}\boldsymbol{k} \qquad (\mu = 1, \ldots, m), \tag{87}$$

$$\boldsymbol{R}_\nu = R_{\nu x}\boldsymbol{i} + R_{\nu y}\boldsymbol{j} + R_{\nu z}\boldsymbol{k} \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{88}$$

At last, let

$$\overline{\omega} = \omega_\xi \overline{\xi}^{\,\circ} + \omega_\eta \overline{\eta}^{\,\circ} + \omega_\zeta \overline{\zeta}^{\,\circ}, \tag{89}$$

$$M_G = M_{G\xi} \overline{\xi}^{\,\circ} + M_{G\eta} \overline{\eta}^{\,\circ} + M_{G\zeta} \overline{\zeta}^{\,\circ}. \tag{90}$$

Then Euler's first dynamical axiom is equivalent with the following system of differential equations

$$m\ddot{x}_G - \sum_{\mu=1}^{m} F_{\mu x} - \sum_{\nu=1}^{n} R_{\nu x} = 0, \tag{91}$$

$$m\ddot{y}_G - \sum_{\mu=1}^{m} F_{\mu y} - \sum_{\nu=1}^{n} R_{\nu y} = 0, \tag{92}$$

$$m\ddot{z}_G - \sum_{\mu=1}^{m} F_{\mu z} - \sum_{\nu=1}^{n} R_{\nu z} = 0, \tag{93}$$

and Euler's second dynamical axiom (79) is equivalent with the following system of differential equations

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_\xi - (B - C)\omega_\eta\omega_\zeta - D(\omega_\eta^2 - \omega_\zeta^2) - E(\dot{\omega}_\zeta + \omega_\xi\omega_\eta) \\ -F(\dot{\omega}_\eta - \omega_\zeta\omega_\xi) - M_{G\xi} = 0, \end{aligned} \tag{94}$$

$$\begin{aligned} B\dot{\omega}_\eta - (C - A)\omega_\zeta\omega_\xi - E(\omega_\zeta^2 - \omega_\xi^2) - F(\dot{\omega}_\xi + \omega_\eta\omega_\zeta) \\ -D(\dot{\omega}_\zeta - \omega_\xi\omega_\eta) - M_{G\eta} = 0, \end{aligned} \tag{95}$$

$$\begin{aligned} C\dot{\omega}_\zeta - (A - B)\omega_\xi\omega_\eta - F(\omega_\xi^2 - \omega_\eta^2) - D(\dot{\omega}_\eta + \omega_\zeta\omega_\xi) \\ -E(\dot{\omega}_\xi - \omega_\eta\omega_\zeta) - M_{G\zeta} = 0. \end{aligned} \tag{96}$$

The differential equations (91) – (96) namely are called the Eulerian dynamical equations. In particular, the equations (91) – (93) are called the ***Eulerian dynamical equations for the motion of the mass-center of a rigid body***, and the equations (94) – (96) are called the ***Eulerian dynamical equations for the motion of the rigid body around its mass-center.***

Since the Eulerian dynamical equations are equivalent to the Eulerian dynamical axioms, in the sense that (91) – (96) are implied by (24) and, inversely, (24) are implied by (91) – (96), sometimes the Eulerian dynamical equations (91) – (93) and (94) – (96) are (incorrectly) called the ***first*** and the ***second Eulerian dynamical law*** respectively.

Let us now give a brief professional characterization of the Eulerian dynamical equations (91) – (96): what in them is given, and what is sought in a dynamical rigid body problem?

There are *given*: first, the *inertial moments* (82) and the *deviational moments* (83), as well as the *mass-center* (76) of the rigid body (or, if not explicitly given, they can be computed, the geometry of the rigid body B and its density being known by the conditions of the dynamical problem under consideration), hence the quantities (84), (85); and, second, the *active forces* (1) acting on B (i.e. their bases and moments).

There are sought, first, the independent parameters (32) of B as *functions* (53) of the time t and of the initial conditions (54), (55); and, second, the *reactions* (2) of the geometrical constraints, which take part in (91) – (96) by means of their *bases* (88) in view of

$$(97) \qquad \boldsymbol{N}_\nu = \boldsymbol{r}_{m+\nu} \times \boldsymbol{R}_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Let us note that, by virtue of (78), (15), (10) the relations

$$(98) \qquad \boldsymbol{M}_G = \sum_{\nu=1}^{m+n} (\boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{F}_\nu \times \boldsymbol{r}_G)$$

hold good: at that, the radius-vectors (6) are given functions of the parameters (32) of B and possibly of the time t.

Formulated in such a manner, the dynamical problem is, in the general case, mathematically indetermined: the number of the unknown functions (53), together with that of the unknown components $R_{\nu x}$, $R_{\nu y}$, $R_{\nu z}$ ($\nu = 1, \ldots, n$) of the bases (88) of the reactions (2) is greater than the number of the Eulerian dynamical equations (91) – (96) which is 6 at most (5 in the case of a rectilinear rigid rod). From a mathematically formal point of view this indeterminateness is of the kind of the indefiniteness in a geometrical problem, say, for a triangle, the two only sides of which are given. The physical motivation of this indeterminateness is, however, much deeper.

For the time being we shall not enter into detail in this problem. It is closely connected with the definition of the notion of geometrical constraints imposed on rigid bodies and with the dynamical nature of such constraints. We shall confine us to the remark that the simplest way to make a dynamical problem mathematically completely determined passes through the hypothesis that the geometrical constraints imposed on the rigid body are *smooth*. By definition, a geometrical constraints is *smooth* if, and only if, the reaction it generates is normal to this constraint. Applied to the reactions (2) this hypothesis implies

$$(99) \qquad \boldsymbol{R}_\nu d\boldsymbol{r}_{m+\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Now (99) implies that in the case of smooth constraints the postulate (30) of ideal constraints is satisfied trivially: if a geometrical constraint is smooth, it is *eo ipso* ideal.

The hypothesis of smooth constraints is classical for analytical dynamics and it is traditionally accepted in the predominant majority of problems this science solves.

Now one can state completely categorically that the competence of the Eulerian dynamical equations (91) – (96) or, just the same, of the Eulerian dynamical axioms (24), is extended over any dynamical problem concerning rigid bodies, in the presence of any geometrical constraints imposed on them and under any sufficiently determined conditions concerning the mathematical nature of the forces of friction. Moreover, although in Euler's times the non-holonomic dynamics belonged to the distant future, nevertheless the Eulerian dynamical equations (91) – (96), and they only, are in the position to solve completely any non-holonomic dynamical rigid body problem.

In other words, the Eulerian dynamical equations (91) – (96) provide a possibility to give, for any (holonomic or non-holonomic) dynamical rigid body problem, a mathematically completely correct answers of the following three questions:

First, are the conditions of the problem consistent: *does the dynamical problem possess a solution or not* (or, in a mechanical aspect, is the motion, described in the conditions of the dynamical problem, possible or not)?

Second, *if a motion exists, then which is it?*

Third, *which are the reactions that generate this motion?*

There we are: here is what Euler has done for analytical dynamics. This is — using Lagrange's own words — what *ne laissera rien à désirer*. These are – again quoting Lagrange — *des formules générales, dont le simple développment donne toutes les équations nécéssaires [et suffisantes] pour la solution de chaque problème*. This is what Euler has published *thirteen years* before the *Méchanique Analitique* saw the light of day and what Lagrangé passed over in silence in seven languages in his *Traité*. This is what is seldom found in the mechanical textbooks and is completely omitted in Pars' treatise [26] dealing with twentieth century's analytical dynamics and claiming "to give a compact, consistent, and reasonably complete account on the subject *as it now stands*" [p. VII, our italics]. Because the Eulerian dynamical equations are the nightmare of the Lagrangean dynamical tradition, — a rope in hanged-man's house.

We come now to the sign of the cross of this tradition — to the notorious *Lagrangean dynamical equations*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\lambda} - \frac{\partial T}{\partial q_\lambda} - Q_\lambda = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, l) \tag{100}$$

for whose validity the postulate (30) of ideal constraints is a *conditio sine qua non*: the equations (100), simply and purely, do not hold if this postulate is violated.

Almost any modern textbook on analytical dynamics inflames over these equations. Pars, for instance, writes:

"The whole of analytical dynamics is based upon, and is derived from, the theorem of Lagrange that I call the *fundamental equation*... The presentation of the subject ... involves the translation of the fundamental equation into a number of different forms ... six in all... The beautiful and powerful theorem contained in the equations (6.2.1) and (6.2.2) was established by Lagrange in 1760. It provides a simple and expeditious method of forming the equations of motion for any dynamical system... The equations have a central place in Lagrange's great work, the "Mécanique Analytique" [sic] ... published in 1788, one of the epoch-making books in the history of mathematics... The *Mécanique Analytique* is the primary source of the subject of analytical dynamics, and it is rightly regarded as one of the outstanding intellectual achievement of mankind" [*ibid.*, p. VII, 76].

A more sober appraisal is found in Truesdell's *Essays*:

"For systems of mass-points, in 1782 Lagrange had introduced "generalized coordinates" and had achieved the invariant formulation of analytical dynamics now called "Lagrange's equations", from which his treatise has gained its main fame.

Much has been said in praise of these equations which belong to the only part of mechanics of the eighteenth century that is reasonably well known today. Their importance for later work in analytical mechanics and in modern physics is clear. Less clear, perhaps, is that abstractness of formulation conceals the main conceptual problems of mechanics: The role of inertial frames and the concept of rigidity, essential to the classical idea of "observer", are hidden in the invariance of algebra.

It is true that Lagrange's equations have the same form in all descriptions, but it is not true that a system of differential equations in Lagrange's form necessarily belong to a dynamical system satisfying Euler's law in some frame, let alone an inertial frame. By obscuring the forces, Lagrange's equations conceal the invariance group of classical mechanics, which is immediately plain from Euler's equations. Moreover, Lagrange's equations do not reflect the space-time geometry of classical mechanics, the main property of which is the possibility of adding together vectors located at different points. Without this distant parallelism, we may speak of energy, but we cannot even form those other basic quantities of classical mechanics, momentum, center of mass, and moment of momentum. From Lagrange's equations, we cannot tell whether a system has momentum or not; Euler's equations show at once that it does, and this is borne out by the fact that the general integrals of linear momentum first appear in treatments based upon Euler's formulation. In any case, Lagrange's equations are relevant only to special kinds of mechanical systems and are far less general than Euler's laws or than Lagrange's principle of virtual work" [27, p. 133].

It is strange that such an illustrious author as Truesdell makes no mention of other ailments of Lagrange's dynamical equations that are as grave as inborn vices. We shall begin our exposition with the first of them, which is remediable in contrast to the other ones.

Let us remind Voss' remark, already cited: "Es ist aber leicht zu sehen, dass man auf diesem Wege nicht unmittelbar zu der Vorstellung der Bewegung eines kontinuierlich mit Masse erfüllten Raumes kommt." Now, it turns out, that this "leicht zu sehen" is inapplicable to the author of the dynamical treatise [26]. Indeed, all he accomplishes in his book does not a whit touch rigid bodies. The rigid bodies slip out of his fingers as water runs out a sieve. The "fundamental equation" he writes down, the "six forms" of it he derives, all dynamical theories he develops on all the pages of his composition [26] — all this is meaningless as far as rigid bodies are concerned. Because all Pars performs is dynamics of systems of a finite number of discrete mass-points: of one mass-point, of two mass-points, of three mass-points, of four mass-points, of ten mass-points, of hundred mass-points, of thousand mass-points, of million mass-points, of milliard mass-points, of milliard milliards mass-points, of n mass-points, at last, where n is any natural number. And that is it! No body: no sphere, no ellipsoid, no cube, no pyramid, no rod, no disc... In two words: no continuum, only discrete mass-points, no matter how great their number may be.

Incredible dictu? Incredible. *Factum*? Fact.

Hic Rhodus, hic salta. Hic L.A.Pars' *A Treatise on Analytical Dynamics, hic* his "fundamental equation". If somebody states that it is meaningful, to say nothing of valid, for a single rigid body, then this somebody is not all there.

Things being so, what about the solemn promise of the author of [26] "to give a compact, consistent, and reasonably complete account on the subject as it now stands"? *Nominibus mollire licet mala.*

Let us play fair, however. As a matter of fact, promising to expose "the subject as it now stands" he is speaking the naked truth, by an irony of fate. In the traditional literary sources analytical dynamics stands now exactly as he presents it in [26]. It would be unjust, however, if we let him bear the brunt alone. He is not solitary. He only accomplishes what his teachers have taught him. What all his colleagues do. (And what all his pupils will do.) It is not the person — it is the system. It is not the professor — it is the profession. And it is not the analytical dynamics — it is the Lagrangean tradition in it. The Lagrangean tradition is as dangerous as a highway robber: it kills the intellectual faculties of the mechanicians, their individuality, their abilities to think independently, critically, and authentically.

In order not to let the author of [26] take the rap alone, let us invite for company some other authors, adherents of the same mechanical philosophy, say those of the monograph [38] on non-holonomic dynamics. Both books are almost coevals. Though quite different in contents, approaches, and style, far reaching analogues may, nevertheless, be observed.

The first of these similitudes is the attitude towards Euler's dynamical laws. It is true that chapter II of [38], entitled "Изучение движений неголономных систем на основе общих законов динамики. Классические задачи о качении твердого тела по поверхности", is dedicated to the solutions of some classical non-holonomic problems concerning rolling of rigid bodies on surfaces without sliding and slipping (inertial rolling of a dynamically symmetrical ball on a sphere; a heavy symmetrical ball rolling on an inclined plane; rolling of a heavy ball inside a sphere; rolling of a ball inside a sphere, which on its part is rolling on an inclined plane; rolling of a disk and a torus on a horizontal plane; rolling of a hollow sphere with an inside gyroscope on a horizontal plane; motion of Tchapligin's sled; rolling of a homogeneous ball on any surface under the action of a system of forces, the basis of which passes through the center of the ball, ect.). In the same time, however, it is true that the authors of [38] use, at least in their theoretical considerations, Newton's rather than Euler's laws of momentum and of kinetical moment; the first sentence of § 1, entitled "Общие законы динамики. Обобщение теоремы площадей", reads: "Рассмотрим систему, состоящую из N материальных точек с масами $m_i (i = 1, 2, \ldots, N) \ldots$", and all that follows afterwards is derived for such systems only, being in the sequel, nevertheless, applied namely to rigid bodies (just now listed above). On the other hand, in the "Введение" of this book one reads the following most queer statement:

"Зарождение динамики неголономных систем, по-видимому, следует отнести к тому времени, когда всеобъемляющий и блестящий аналитический формализм, созданный трудами Эйлера и Лагранжа, оказался, к всеобщему удивлению, неприменимым к очень простым механическим задачам о качении без проскальзывания твердого тела по плоскости" (стр. 7).

Such a statement is perfectly unacceptable by virtue of two reasons. First, Euler never created "analytical formalism", the contrary may be maintained only by him who is ignorant of the very essence of Euler's work in mechanics, as well as in analysis. Second, it is absolutely false that Euler's mechanical apparatus is inapplicable to the problems of non-holonomic dynamics: as we have already emphasized above, namely Euler's dynamical laws of momentum and of kinetical moments are the genuine and only tools for solving non-holonomic dynamical problems.

In any case, the authors both of [26] and [38] are unanimous in their attitude that, as far as non-holonomic dynamics is concerned, Euler is a *persona non grata*, although, it is true, the name itself is not mentioned explicitly: *homines notos nominare odiosum est.*

Chapter III of the monograph [38] entitled "Аналитическая динамика неголономных систем" deals with various non-holonomic versions of the Lagrangean holonomic dynamical equations: equations of motion of non-holonomic systems with Lagrangean multipliers (equations of Routh), equations of Tchapligin and Voronetz, equations of Volterra and Maggi, equations of motion in quasicoordinates, equations of Appell, etc. The role of a starting point of all the following exposition plays § 1 of this chapter, entitled "Принцип виртуальных перемещений и уравнения Даламбера–Лагранжа", where the principle of virtual displacements (as the principle of virtual work is called in [38]) and the dynamical equation of D'Alembert–Lagrange are deduced.

In order to understand the principle of virtual displacements one must understand the meaning of the term virtual displacement itself. Now the authors of [38] write:

"... виртуальным перемещением системы называется перемещение, которое система совершает при виртуальным варьировании ее обобщенных координат. Под виртуальном варьированием при этом понимается бесконечно малое изменение координат, совместимое с наложенными на систему связями и совершаемое в фиксированный момент времени" (стр. 91).

We do not know the reaction of the readers of this article in connection with the above excerpt from [38]. As to the authors of this article they confess that their feelings would hardly be different, if they were confronted with a fragment from the

Koran. They think, at that, that they are scarcely the only people in this world for which such "definitions" sound enigmatically. And they have good grounds for such suspicions.

Indeed, what other reason, save complete lack of understanding of the essence of the (metaphysical?) notion of virtual displacement, could raise the well-known violent dispute concerning the commutativity or non-commutativity of the d-operation and δ-operation, a far away echo of which resounds in the following text from [38]:

"Какие же перестановочные соотношения правильны? До последнего времени даже в учебной литературе не было единой точки зрения в вопросе о перестановочности операций дифференцирования по времени $\frac{d}{dt}$ и виртуального варьирования δ (или, коротко говоря, операций d и δ) при наличии неинтегрируемых кинематических связей. Известны две точки зрения. Согласно одной (которой придерживаются, например, Вольтерра и Гамель), перестановочность операций d и δ имеет место для всех истинных координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$, независимо от того, является система голономной или неголономной. Согласно другой точки зрения (Суслов, Леви-Чивита и Амальди), переместимость операций d и δ имеет место только для голономных систем. В случае неголономных систем соотношение

$$d\delta q_i - \delta dq_i = 0 \tag{6.4}$$

принимается только для тех обобщенных координат, вариации которых (в соответствии с уравнениями неголономных связей) являются независимыми, а для остальных координат перестановочные соотношения выводятся, изходя из уравнений неголономных связей, и оказываются отличными от (6.4). Эта вторая точка зрения получила всеобщее признание, и ее приверженцы считали первую точку зрения ошибочной. Однако Гамель показал, что обвинение в ошибке не бесспорно, так как, если рассуждать иначе, то первая точка зрения также оказывается приемливой, а именно: противоречие можно снять, если вариации квазикоординат соответствующих связей не полагать равными нулю. Вместе с тем Гамель не дал обоснования своему рассуждению и на вопрос, почему именно так следует поступать, а не иначе, он не ответил. В последнее время в этом вопросе была внесена ясность в работе ..., где показано, что при надлежащем подходе к перестановочным соотношениям обе точки зрения верны и не противоречат, как это казалось, друг другу. Анализ вопрос показывает, что противоречие возникает из-за отсутствия определения исходных понятий, т.е. операций d и δ, содержащихся в перестановочных соотношениях" (стр. 139).

It is obvious that all these profound thoughts — to use Euler's expression apropos of Lagrange's mental speculations — are anything save mathematics. We shall not enter into the essence (if any) of the notion virtual displacement — this *deus ex machina* of the Lagrangean dynamical tradition. In any case we have not yet found an irreproachable definition of this term in all the mechanical literature we have had an opportunity to hold in our hands in the course of a not quite brief professional life, and we think it is very problematic whether there is any at all: otherwise the debates around (6.4) would be quite pointless. At the same time any diplomaed mechanician all the world over would feel deeply offended if one makes the slightest allusion that there is something to be desired in his understanding of the virtual displacements. *C'est la vie*. In result disputes about $d\delta - \delta d$, as if the problem $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = ?$ is a question of "единной точки зрения", of "всеобщее признание", of "приверженцы", ect., and so on, и так далее. As regards the above fragment from [38], one is puzzled. Mechanics? — Maybe, being printed in a mechanical monograph — Lagrangean mechanics, however. Mathematics? — Mathematics, my foot.

Things being as they are, let us give a look in [38] in order to see how the principle of virtual displacements is derived in this book. There we read:

"Как известно, движение материальной точки полностью определяется совокупностью сил, приложенных к точке. Для написания уравнений движения системы материальных точек мы должны ввести силы, действующие на каждую из точек, образующих рассматриваемую систему. В число этих сил будут входить и силы, возникающие из-за наличия связей между отдельными точками системы. Таким образом, уравнения движения системы оказываются записанными в виде

$$m_i \boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i \tag{1.1}$$

где m_i — масса i-й точки, $\boldsymbol{w}_i$ — ее ускорение, $\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i$ — действуящая на нее суммарная сила, причем $\boldsymbol{R}_i$ — результирующая сил связей, наложенных на i-ую точку. Поскольку мы интересуемся только движением системы, силы связей $\boldsymbol{R}_i$ оказываются лишь спомагательными величинами, которые мы вынуждены ввести и которые затем следует исключить" (стр. 90 – 91).

Several objections simply obtrude themselves in connection with these formulations, especially as regards the reactions. It is true that "мы интересуемся движением системы", but it is not true that "мы интересуемся *только* движением системы". We are deeply concerned with two other extremely important problems:

First, *does* the mechanical system move at all?

Second, if it does, then *why* does it move?

The answer of the first question is equivalent to the answer of the question whether the system of equations (1.1) is *consistent* or not, in other words, does it possess a *solution* or not? This problem cannot be solved without the reactions $\boldsymbol{R}_i$, since they take part in (1.1) and predestinate the conclusion.

Second, if the system of equations (1.1) has a solution (i.e. if the mechanical system can move), then it moves under the actions not only of the active forces $\boldsymbol{F}_i$, but of the passive forces $\boldsymbol{R}_i$ as well. Hence, $\boldsymbol{R}_i$ represent one of the reasons for the motion of the mechanical system and, consequently, the half at least of the answer of the question *why* does the system move.

In both cases the role of the reactions of the constraints R_i is decisive. Therefore they by no means can be qualified as "лишь вспомагательными величинами". They are *unknown quantities* of the dynamical problem under consideration completely equal in rights with all the other unknown quantities of this problem, the *existence* of which we must establish in a mathematically perfectly irreproachable way, and which, if they exist, we must *determine* from these very equations (1.1) which the authors of [38], like any genuine Lagrangeanists, so vigorously endeavour to eliminate. After these comments the statement of the authors of [38] that the reactions of the constraints are something that "мы вынуждены ввести и которые затем следует исключить" sounds more than queer.

Another objection, not less categorical than that concerning the reactions, affects the relations of the mechanical objects mass-points and rigid bodies. The mechanical ideology of the authors of [38] apropos of these relations is manifested in the following considerations.

"Таким образом, вначале были установлены законы движения материальных точек.

Для изучения законов движения более сложных механических систем стали прибегать к мысленному разбиению такой системы на материальные точки. Такой подход привел к точечному представлению механической системы, т.е. механическую систему стали представлять в виде совокупности материальных точек, которые подчинены определенным связям.

Эта точка зрения проникла даже в гидромеханику в виде так называемого лагранжевого задания движения жидкости, но затем в значительной мере была вытеснена понятием сплошной среды и соответствующим ему эйлеровым способом задания движения жидкости" (стр. 90).

The primitivism of this speculative scheme comprehended by Euler more than two clear centuries ago has never put out of countenance the Lagrangeanists who persevere in it with a doggedness deserving a better destiny. This primitivism involuntarily reminds the historical dawn of integral calculus when Democrite considered the geometrical bodies as sums of an extremely large number of extremely small atoms – hence the denomination of the *method of indivisibles* of this approach by the Latinized *individuum* of the Greek *'ἄτομος*. The development of these ideas should be very instructive for the Lagrangean mechanicians of the Twentieth Century. Archimedes computed the areas and volumes of many figures combining the principles of the level with the idea that a plane figure is composed of an infinite number of parallel rectilinear segments, and a geometrical body is composed of an infinite amount of parallel plane sections. Still in the antiquity, however, such ideas and methods came in for serious criticism. Archimedes, for instance, took the view that it is absolutely obligatory to redemonstrate by the *method of exhaustion* (to use a denomination introduced in the seventeenth century; the essence of the method consists in infinite succesive approximation of unknown quantities by known ones) of any result obtained by the method of indivisibles. Not lesser instructive should be the fact that ardent disputes around the structure of the continuum have arisen still in the mediaeval science, to be continued not less passionately in our times. In any case, no mathematicians of today would apply to the circle a theorem on those only grounds that it is proved for any regular polygon: the *точечные представления* of continual media are, in times long ago, not only completely compromised in mathematical science, but even once and for all exiled out of its paradise.

(This picture does not a whit lessen the heuristic importance of discrete approach to continua, especially in physical theories; in any case, the Archimedean model of mind should not be cast aside.)

We see, in the long run, that the authors of the monograph [38] are intending to derive the principle of virtual displacements for systems of a finite number of mass-points. Here is the formulation of the result of their efforts in this direction:

"Перейдем теперь к формулировке принципа виртуальных перемещений; необходимое и достаточное условие равновесия системы материальных точек с идеальными связями заключается в равенстве нулю виртуальной работы задаваемых сил, т.е.

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \qquad (1.6).$$

Уравнение (1.6) не содержит реакций связей" (стр. 92).

This "result" is absolutely chimerical. Or, using mathematical rather than poetical language, it is completely false.

We shall disprove the sufficiency of the principle of virtual displacements (1.6) for the equilibrium of a system of mass-points using the very arguments of its authors. Their immediate text reads:

"Таким образом, в статике задача об исключении реакций идеальных связей...

$$\delta A = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{R}_i \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \qquad (1.2)$$

... решается следующим образом: прилагая к каждой точке соответствующую реакцию, осуществляющую наложенную связь, заменяют систему совокупностью "свободных" точек, условием равновесия для каждой из которых будет следующее:

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{O} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N) \qquad (1.7).$$

Если теперь каждое из уравнений (1.7) умножить скалярно на $\delta \boldsymbol{r}_i$ и все выражения сложить, тогда получим уравнение

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \delta \boldsymbol{r}_i = -\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{R}_i \delta \boldsymbol{r}_i \qquad (1.8),$$

которое совпадает с (1.6), поскольку правая часть обращается в нуль согласно условию (1.2) идеальности связей" (стр. 92 – 93).

Let us display some mathematical leniency, accepting that in this manner it is proved that (1.7) and (1.2) imply (1.6) indeed. What of it? This proves that the principle of virtual displacement (1.6) is, in the presence of ideal constraints (1.2), a necessary condition for the equilibrium (1.7) of N mass-points. But the authors of [38] state that this same condition (1.6) is also sufficient for (1.7). Is it indeed?

By no means.

First, these same authors do not say in their book a single word more in connection with the proof of the principle of virtual displacement. They have done their work, washed their hands of, shut the door in the reader's face, and locked it out with seven padlocks. The sentence immediately following the just now cited text from [38] reads: "Возвращаясь к динамике, естественно решить задачу об исключении реакций связей сначала также для систем с идеальными связями" (стр. 93). *Acta est fabula.*

Second, there exist counter-examples. In other words, there exist mass-point problems, in which the would-be-sufficient condition (1.6) of the principle of virtual displacements is satisfied, but the mass-points are not in equlibrium.

Here is such a counter-example.

Let a mass-point P be given, on which no active force acts and which is constrained to move on a smooth sphere S. Then P is under the action of the reaction $\boldsymbol{R}$ of S. At that,

$$\boldsymbol{R} \neq \boldsymbol{0}, \tag{101}$$

since otherwise P would be moving alond a straight line and not on S. If $\boldsymbol{F}$ denotes the active force acting on P, then by condition

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} \tag{102}$$

and (101), (102) imply

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{R} \neq 0. \tag{103}$$

The relation (103) displays that P is not in equilibrium under the action of $\boldsymbol{F}$ and $\boldsymbol{R}$.

But it is in equlibrium according to the authors of [38]. Indeed, if O denotes the center of S and $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OP}$, then, on the one hand,

$$\boldsymbol{F}\delta\boldsymbol{r} = 0 \tag{104}$$

in view of (102); on the other hand,

$$\boldsymbol{R}\delta\boldsymbol{r} = 0, \tag{105}$$

since S is smooth by condition. Now (105) displays that the postulate of ideal constraints is satisfied by $\boldsymbol{R}$, and (104) is, according to the authors of [38], a sufficient condition for the equilibrium of P. *Q.e.d.*

This counter-example has been constructed not later than November 1, 1967 and published in the article [39]; in other words, it and [38] are the same age. Nevertheless, up to now it has been set at naught by the mathematical and mechanical public. Never mind: *Nolo episcopari.*

Other counter-examples, displaying the insufficiency of the principle of virtual displacements for the equilibrium of rigid bodies, are given in the articles [9] and [24], while the principle itself is discussed in the article [13].

If we have paid so much attention to the principle of virtual displacements, the reason is that *abyssus abyssum invocat*, as the Bible preaches: the statical principle of virtual displacements has, thanks to the efforts of D'Alembert and Lagrange, in analytical dynamics a most crooked abortion. It is called the *principle* or the *equation of D'Alembert-Lagrange*, and it namely is what Pars in [26] calls the *fundamental equation*, insisting that "the whole of analytical dynamics is based upon, and is derived, from" it. Let us see what are the authors of [38] doing on this occasion:

"Рассматривая в дальнейшем системы с идеальными связями, заметим, что уравнения (1.1) по форме аналогичны уравнениям (1.7). На эту аналогию обратил внимание уже Даламбер, который сформулировал свой известный принцип, позволивший задачу о составлении уравнений динамики формально свести к составлению уравнений статики. Умножая теперь (1.1) на $\delta \boldsymbol{r}_i$ и складывая все выражения, мы получим уравнение, известное под именем уравнения Даламбера-Лагранжа

$$\sum_{i=1}^{N}(m_i w_i - \boldsymbol{F}_i)\delta \boldsymbol{r}_i = 0 \qquad (1.9),$$

которое в динамике играет такую же большую роль, как и принцип виртуальных перемещений (1.6) в статике" (стр. 93).

In such a way, the authors of [38], on the one hand, and the author of [26], on the other hand, are in perfect harmony apropos of their appraisals of the notorious principle of D'Alembert-Lagrange. In this respect they do not differ from any Lagrangeanist whoever, whenever, and wherever all the world over. But — there is a "but", nevertheless...

But all these men are moving along a one-way street. Indeed, both treatises [26] and [38] are lacking in the slightest hint that the routine mathematical manipulations by the aid of which (1.9) is derived from (1.1) possess the necessary quality of reversibility. The text of [38] immediately following the last citation reads:

"Таким образом, мы пришли к тому, что для любого виртуального перемещения произвольной механической системы с идеальными связями имеет место равенство (1.9). В координатной форме уравнение Даламбера-Лагранжа (1.9) может быть представлено в виде

$$\sum_{j=1}^{3N}(m_j \ddot{x}_j - X_j)\delta x_j = 0 \qquad (1.10).$$

Пусть $q_1, q_2, \ldots, q_n$ обобщенные координаты рассматриваемой системы..." (стр. 93).

Afterwards the authors of [38] derive, on the basis of (1.9), the Lagrangean dynamical equations (100).

In other words, the authors of [38] derive (1.9) from (1.1) in case of (1.2), leaving the question open whether, again in the case (1.2), the equations (1.1) are restorable on the basis of (1.9). But this question is of cardinal importance. It is identical with the question of the equivalence of the equations of motion of a system of N mass-points and of the D'Alembert-Lagrange's dynamical equation (1.9). And if they are not equivalent? What then?

Then there must exist dynamical problems for which the equations of motion (1.1) and the principle of D'Alembert-Lagrange (1.9) will lead to different solutions. Moreover, since Lagrange's dynamical equations (100) are derived by means of (1.9), then they also will, in some cases of dynamical problems at least, lead to solutions different from those obtained by means of (1.1). Since the equations (1.1) namely are authoritative as regards the motions of mass-point systems, as far as Newton's dynamics is accepted as authentic, this implies that both D'Alembert-Lagrange's principle (1.9) and the Lagrangean dynamical equations (100) are unreliable and untrustworthy in the capacity of dynamical laws.

This danger is not only a potential one, it is actual. Indeed, there exist counter-examples. There exist dynamical problems, non-holonomic as well as holonomic, involving rigid bodies, for which the solutions, obtained by the aid of the Eulerian dynamical axioms, on the one hand, and by the Lagrangean dynamical equations (or their non-holonomic versions in the non-holonomic case), on the other hand, are quite different — in other words, mutually exclusive. Such counter-examples may be swarmed in legions. The first of them were published in our articles [5 – 7, 21, 22, 24]. They were called dynamical "paradoxes" or *antinomies* and the mathematical mechanism ruling these mechanical phenomena is revealed in the articles in question. This is, however, a topic we shall treat later in detail. For the time being we shall still analyse some characteristic features of the treatise [38].

(The principle of D'Alembert-Lagrange has a most counter-productive effect in educational aspect. Indeed, let us imagine a young student making his first steps in science who sees for the first time the deduction of the simple corollary (1.9) from (1.1) and (1.6), pompously named the principle of D'Alembert-Lagrange; if he is observant, then he will not leave unnoticed the fact that the requirement (1.6) is a quite artificial one — a little short of a trick. Now, what will the student's feelings be? A simple something — the science! You perform a scalar multiplication of (1.1) with δr_i, add the obtained results together, take (1.6) into consideration and — without any intellectual effort — your name remains in mechanics forever! Is it strange that Lagrange has so many imitators? That many dozens, if not hundreds, of equations of motion of every sort and kind have been till now proposed on the mechanical stock-market — in any case more, than particular dynamical problems have been solved by their aid? That all this scientific politics led to such a devaluation of mathematical values, to such an inflation of mechanical works? Alas, indeed. And all this is an inevitable consequence of the letter and spirit of the Lagrangean dynamical tradition.)

All following considerations in chapter III of [38] are, directly or indirectly, based on D'Alembert-Lagrange's equation (1.9). Therefore, all kinds of non-holonomic dynamical equations of motion are valid only to mechanical systems consisting of a finite number of discrete mass-points and to nothing else — at least not, before the contrary is proved in an irreproachable manner. That is why all the applications to rigid bodies of these non-holonomic dynamical Lagrangean versions that are made in the monograph [38] are mathematically illegal — and no prevarications, no matter how ingenious they might be, can alter this fact. In reality, the authors of [38] have come to a dead-lock in the moment they have decided to expose in their book those non-holonomic equations of motion that have become most popular in this domain, following the originals of their inventors at that — in these originals is also nothing more than mechanical systems of a finite number of discrete mass-points.

There is a very interesting problem in connection with the equation (1.9) of D'Alembert–Lagrange on which we should like to fix the reader's attention.

There are many mechanical notions which are firstly defined for systems of a finite number of mass-points and afterwards these definitions are generalized for rigid bodies by a mere formal change of finite sums by integrals.

Let P_ν be mass-points with masses m_ν ($\nu = 1, \ldots, n$) respectively and let S be their system. Then by definition

$$m = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \tag{106}$$

and

$$\boldsymbol{r}_G = \frac{1}{m}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \boldsymbol{r}_\nu \tag{107}$$

are the *mass* and the radius-vector of the *mass-center* G of S respectively provided $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{OP}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, n$) and $\boldsymbol{r}_G = \boldsymbol{OG}$. Similarly, the quantities

$$\boldsymbol{K} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu, \tag{108}$$

$$\boldsymbol{L} = \sum_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{r}_\nu \times m_\nu \boldsymbol{v}_\nu, \tag{109}$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu^2 \tag{110}$$

where $\boldsymbol{v}_\nu = \dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, n$) are by definition the *momentum*, the *kinetical moment*, and the *kinetic energy* of S respectively. Now the analogy between the definitions (106) — (110), on the one hand, and (56), (57), (23), (11) respectively, on the other hand, is obvious. At that, the advisability of the second series of definitions is suggested by the first one.

Similarly, there are theorems of discrete analytical mechanics which have analogues in the continual one. For instance, *Newton's laws of momentum* and *of kinetical moment* for a single mass-point P with mass m, namely

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}, \qquad \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{M}, \tag{111}$$

$\boldsymbol{F}$ and $\boldsymbol{M}$ denoting the basis and the moment (with respect to O) respectively of the system of forces acting on P, provided $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OP}$ and $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$, applied to S, lead to the systems of equations

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}_\nu) = \boldsymbol{F}_\nu, \qquad \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_\nu \times m_\nu \boldsymbol{v}_\nu) = \boldsymbol{M}_\nu \tag{112}$$

$(\nu = 1, \dots, n)$, $\boldsymbol{F}_\nu$ and $\boldsymbol{M}_\nu$ $(\nu = 1, \dots, n)$ denoting the same as $\boldsymbol{F}$ and $\boldsymbol{M}$ respectively, however, for P_ν $(\nu = 1, \dots, n)$ instead for P.

Let by definition

$$\boldsymbol{F} = \sum_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{F}_\nu, \qquad \boldsymbol{M} = \sum_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{M}_\nu. \tag{113}$$

If we add (112) together and take into consideration (113) and (108), (109), then we obtain the equations (24) respectively. But as a proof of Euler's dynamical laws this approach is false, since, by its very essence, it holds good for systems of a finite number of mass-points only. At that, the proved validity of (24) for such systems does not a whit imply the validity of (24) for rigid bodies: for rigid bodies the laws (24) are beyond demonstration; they are dynamical axioms.

With this only exception, all other continual analogues of theorems of discrete mechanics, which are true, can be proved, as for instance the kinetic energy theorem (14), which is trivially true in the discrete case, had been generalized by us in the continual case.

Now let the following question be put: which continual variant does D'Alembert-Lagrange's principle (1.9) admit?

Strange though it may seem at first glance, the answer of this question is, negative: no variant. The equation (1.9) of D'Alembert-Lagrange, proposed for discrete mechanical systems, has no immediate analogue in rigid body dynamics.

The reason for this state of affairs is concealed in the lack of a strict mathematical definition of the notion of virtual displacement already mentioned above. The Lagrangeanists are reasoning in the following manner. Let (32) be mutually independent parameters of the discrete system S of mass-points introduced above. This means that all $\boldsymbol{r}_\nu$ $(\nu = 1, \dots, n)$ are wholly determined functions

$$\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu(q_1, \dots, q_l) \qquad (\nu = 1, \dots, n) \tag{114}$$

of (32) whence

$$\delta \boldsymbol{r}_\nu = \sum_{\lambda=1}^{l} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_\lambda} \delta q_\lambda \qquad (\nu = 1, \dots, n). \tag{115}$$

Now (115) and D'Alembert-Lagrange's principle imply

$$\sum_{\lambda=1}^{l}\sum_{\nu=1}^{n}(m_\nu \boldsymbol{w}_\nu - \boldsymbol{F}_\nu)\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_\lambda}\delta q_\lambda = 0. \tag{116}$$

Let again by definition

$$Q_\lambda = \sum_{\nu=1}^{n}\boldsymbol{F}_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_\lambda} \qquad (\lambda = 1, \dots, l) \tag{117}$$

be the generalized active forces acting on the system S. On the other hand, (114) imply

$$\boldsymbol{v}_\nu = \sum_{\lambda=1}^{l}\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_\lambda}\dot{q}_\lambda \qquad (\nu = 1, \dots, n) \tag{118}$$

whence

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_\nu}{\partial \dot{q}_\lambda} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_\lambda} \qquad (\lambda = 1, \dots, l; \quad \nu = 1, \dots, n). \tag{119}$$

Besides

$$\boldsymbol{w}_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_\lambda} = \frac{d\boldsymbol{v}_\nu}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_\lambda} = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{v}_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_\lambda}\right) - \boldsymbol{v}_\nu \frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{q_\lambda} \tag{120}$$

and

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_\lambda} = \sum_{\mu=1}^{l}\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_\mu \partial q_\lambda}\dot{q}_\mu \tag{121}$$

$(\lambda = 1, \dots, l; \nu = 1, \dots, n)$. At last, (118) imply

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_\nu}{\partial q_\lambda} = \sum_{\mu=1}^{l}\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_\lambda \partial q_\mu}\dot{q}_\mu \qquad (\lambda = 1, \dots, l; \quad \nu = 1, \dots, n) \tag{122}$$

and (121), (122) imply

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_\lambda} = \frac{\partial \boldsymbol{v}_\nu}{\partial q_\lambda} \qquad (\lambda = 1, \dots, l; \quad \nu = 1, \dots, n). \tag{123}$$

Now (120), (119), (123) imply

$$\boldsymbol{w}_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_\lambda} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{v}_\nu^2}{\partial \dot{q}_\lambda} - \frac{1}{2}\frac{\partial \boldsymbol{v}_\nu^2}{\partial q_\lambda} \tag{124}$$

$(\lambda = 1, \dots, l;\ \nu = 1, \dots, n)$ and (116), (117), (124), (110) imply

$$(125) \qquad \sum_{\lambda=1}^{l} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\lambda} - \frac{\partial T}{\partial q_\lambda} - Q_\lambda \right) \delta q_\lambda = 0.$$

Obtaining (125), the Lagrangeanists maintain that, since δq_λ $(\lambda = 1, \dots, l)$ are mutually independent, the relation (125) is possible if all coefficients of these variations are zeroes, i. e. if the Lagrangean dynamical equations (100) (for discrete dynamical systems!) hold good. This conclusion cannot be implied if $d\mathbf{r}_\nu$ and dq_λ stood instead of $\delta \mathbf{r}_\nu$ and δq_λ respectively $(\lambda = 1, \dots, l;\ \nu = 1, \dots, n)$. Indeed, in this case

$$(126) \qquad \sum_{\lambda=1}^{l} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\lambda} - \frac{\partial T}{\partial q_\lambda} - Q_\lambda \right) \dot{q}_\lambda = 0$$

would stay instead of (125), and (126) do not imply (100).

If one accepts (125) and hence (100) for an equivalent of D'Alembert-Lagrange's principle (116), then one could say that the Lagrangean dynamical equations for rigid bodies are a continual version of this principle.

Let us now make a brief recapitulation. The aims of this second part, *The Present*, of the series of articles entitled *Lagrange or Euler?* are to give an undisguised account on the contemporary state of analytical dynamics as it may be established by the popular literary sources. We have analysed in some details only two such sources, namely [26] and [38], but this is more than enough, since they are typical for almost all books on the subject published nowadays. We have not discussed results published in the articles [2 – 24], since though chronologically belonging to *The Present*, thematically they belong to *The Future*: a mathematical result belongs to a certain epoch, if it is popular in this epoch, and [2 – 24] are not popular, for the time being at least. (For instance, although printed in 1799, Wessel's work [40], containing for the first time in the mathematical literature the geometrical representation of the complex numbers, belongs to a period in the history of mathematics at least twenty years younger, being wholly unnoticed in the meantime, to be rediscovered a hundred years later [41].) The main results of [2 – 24] will be discussed in the third, final part of this series.

In the beginning if this article the questions have been put: what does the term *Lagrangean dynamical tradition* mean; which are its *characteristic features*; what does *Lagrangean mechanics* mean? It is high time to try and give, more or less satisfactory, answers to these questions.

We must fix our attention on the first of these questions. Its answer, if genuine, *eo ipso*, answers the second one. As regards the third, one may say: *Lagrangean mechanics* means that misshapen image of rational mechanics which the Lagrangeanists wear out in their minds.

The Lagrangean dynamical tradition is an unfortunate phenomenon in the history of rational mechanics, in general, and of analytical mechanics, in particular, conceived and borne in the womb of *Méchanique Analitique* in the very dawn of the French Revolution. In 1783 died Euler who:

"... was the domination theoretical physicist of the eighteenth century. While his work is underestimated in the usual, vague historical books and attributions, the short factual history in the old *Handbuch der Physik* lists twice as many specific discoveries for Euler as for any other one physicist, earlier or later, and even at that most of his work is omitted. When Euler was nineteen, still a student, he outlined a great treatise on mechanics in six parts, only three of which he lived to finish in the next fifty years, although his program was virtually achieved by the hundreds of papers he published in all branches of mechanics and was supplemented by treatises on naval science, ballistics, and astronomy... He put most of mechanics into its modern form; from his books and papers, if indirectly, we have all learned the subject, and his way of doing things is so clear and natural as to seem obvious... Three problems were critical and central for the development of a general mechanics. All three consisted in discovery of differential equations of motion for particular kinds of space-filling bodies:

1. A rigid body.
2. A perfect fluid.
3. An elastic bar.

All three of these problems were solved by Euler... With Euler's memoir in 1775, the whole program of rational mechanics becomes clear... In fact, this scheme remained general enough for at least 100 years" [27, p. 106, 167, 173].

Truesdell's last statement would remain true, if he wrote 1 000, or 1 000 000, or even eternity instead of 100 years. As a matter of fact, Euler's mechanical scheme is perpetual inasmuch as Euclid's geometrical scheme is. It is true that in this century new mechanical domains have been discovered that lie altogether outside Euler's range. These discoveries, however, concern Euler's mechanics to such a degree, to which the discovery of the A-bomb concerns Euclidean geometry: it pertains to entirely different phenomena, for which any juxtaposition is pointblank pointless. In Euler's days no thermodynamic and electromagnetic effects could be taken into consideration in mechanics. As regards the relativity, from a purely logical point of view its relation with Newton-Eulerian dynamics is just the same, as the relation between Euclidean and non-Euclidean geometries.

Under these circumstances, the *Méchanique Analitique* is not only a complete depreciation of the whole scientific inheritance of Euler in mechanics — moreover, it is a strong deprecation against it. As we have seen, Lagrange does not include Euler's dynamical axioms in his list of dynamical principles. The worst is yet to come: Lagrange's *Traité* wholly disregards these fundamental dynamical laws, setting against them Lagrange's dynamical equations. All his life through Lagrange has not understood the very essence of his own equations, overestimating them in the most repulsive way, and thousands of mechanicians today all the world over share this prejudice. As we shall see in details in the third part of this series, the Lagrangean dynamical equations are, purely and simply, linear combinations of the projections of the Eulerian dynamical axioms on appropriate axes.

Indeed, as it has been shown in the articles [10 – 12, 14, etc.] the following *fundamental identities of Lagrangean formalism* hold good:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\lambda} - \frac{\partial T}{\partial q_\lambda} - Q_\lambda - Q_\lambda^* = (\dot{\boldsymbol{K}} - \boldsymbol{F})\frac{\partial \boldsymbol{r}_G}{\partial q_\lambda} + (\dot{\boldsymbol{L}}_\Gamma - \boldsymbol{M}_G)\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{q}_\lambda} \tag{127}$$

($\lambda = 1, \dots , l$), where by definition

$$Q_\lambda^* = \sum_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{R}_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_{m+\nu}}{\partial q_\lambda} \qquad (\lambda = 1, \dots , l) \tag{128}$$

are the *generalized forces of the reactions of the constraints* imposed on the rigid body B. The equations (127) are, as a matter of fact, mathematical *identities*. In other words, the relations (127) are obtained by the aid of identical transformations accomplished on the definitions of the mechanical quantities involved, namely (15) for $\boldsymbol{F}$ and $\boldsymbol{M}$, (57) and (9) for $\boldsymbol{r}_G$ and $\bar{\omega}$ respectively, (78) for $\boldsymbol{M}_G$, (76) and (77) for $\bar{p}_G$ and $\boldsymbol{L}_\Gamma$ respectively, (23) for $\boldsymbol{K}$, (11) for T, and (42) and (128) for Q_λ and Q_λ^* respectively. Now

$$Q_\lambda^* = 0 \qquad (\lambda = 1, \dots , l) \tag{129}$$

in the case of ideal constraints (30). For such constraints, consequently, the fundamental identities (127) take the form

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\lambda} - \frac{\partial T}{\partial q_\lambda} - Q_\lambda = (\dot{\boldsymbol{K}} - \boldsymbol{F})\frac{\partial \boldsymbol{r}_G}{\partial q_\lambda} + (\dot{\boldsymbol{L}}_\Gamma - \boldsymbol{M}_G)\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{q}_\lambda} \tag{130}$$

($\lambda = 1, \dots , l$). Now (130) imply that the left-hand sides of the Lagrangean dynamical equations (100) are, neither more nor less, linear combinations of the projections of the left-hand sides of the Eulerian dynamical axioms (24) (the first of the latter) and (79) on axes parallel to the vectors $\frac{\partial \boldsymbol{r}_G}{\partial q_\lambda}$ and $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{q}_\lambda}$ ($\lambda = 1, \dots , l$) respectively. Now any child could judge what a value could be assigned to a mathematical result derivable from another, well-known, mathematical result, by a mere projection of the latter.

Let us note that the fundamental identities of Lagrangean formalism (130) at once prove, in case of ideal constraints, the validity of the Lagrangean dynamical equations for rigid bodies rather than for systems of a finite number of discrete mass-points only, on the basis of the Eulerian dynamical axioms. In such a manner this missing link in the dynamical literature is discovered and put on its right place. Let us remind that, at the beginning of this article, we have underlined that one of the ailments of the Lagrangean equations is curable. Up to now this disease consisted in the fact that these equations have been nowhere proved except for discrete mass-points. Now the fundamental identities (130) provide a medicine for this weakness.

Why are the Lagrangeanists so opposed against the Eulerian dynamical axioms or, just the same, against the Eulerian dynamical equations (91) – (96) as well? Very simply: they do not like the reactions these latter equations contain. And why do they not like these reactions? Very simply again: the mathematical problem the equations (91) – (96) solve is much more complicated than the mathematical problem the equations (100) solve. Working with (100) is out and out easier: you compute the kinetic energy T of the rigid body and the generalized active forces Q_λ $(\lambda = 1, \ldots, l)$, differentiate with respect to q_λ, $\dot{q}_\lambda$ $(\lambda = 1, \ldots, l)$ and to t, substitute the derivatives in (100) and that is the end of your troubles. A neat job. While, working with (91) – (96) you have to compute inertial and deviational moments (where a considerable amount of geometry is needed; here is the open sesame of Lagrange's faith that his "méthodes ... ne démandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou méchaniques") and moments of forces, to eliminate unknown reactions, etc. A painful task, is it not?

Do not, however, get mislead by a popular fallacy: do not take all this at its face value The problem *Lagrange or Euler?* is not a matter of taste — of liking or disliking reactions of constraints. There is more to it than that. This problem is much deeper. It is a matter of principle. The point is that working with the Eulerian dynamical equations (91) – (96) you obtain the genuine solution of the dynamical problem under consideration, and you obtain it by the sole possible way. While, working with the Lagrangean dynamical equations (100) you attack windmills.

By the aid of the Lagrangean dynamical equations it is impossible to solve even a single dynamical problem concerning constrained rigid bodies.

Does this statement seem improbable, incredible, unbelievable, inconceivable, unthinkable? Does it? At first glance, it does. Let us, however, make a little thinking.

As already twice emphasized, any dynamical problem, as any mathematical problem in general, as a matter of fact consists of two questions:

1. Does there exist a solution of the problem?

2. If a solution exists, then which is it?

Now, ***the Lagrangean dynamical equations answer neither the first, nor the second of these questions*** (with the only exception, when the rigid body is free).

In order to see that, let us look again at the fundamental identities (130). As a matter of fact, they deliver a method for the exclusion of the unknown reactions of the constraints. Let the rigid body be non-free, i.e. $l < 6$ ($l < 5$ in the case of a rigid rod). Then the Lagrangean dynamical equations (100) represent a system of l differential relations, while the number of the Eulerian dynamical equations (91) – (96) is $6 > l$: it is clear that, in this case, ***the Eulerian dynamical equations are unrestorable from the Lagrangean ones.***

On the other hand, the reactions of the constraints are that namely mathematical factor which may make the Eulerian dynamical equations an inconsistent system of conditions. Let this be the case. Then the dynamical problem has no solution, while the Lagrangean dynamical equations manifest a completely determinate (although wholly illusionary) solution: the reactions are excluded in them and they cannot "see" the inconsistency.

(There is no need to compute the number of the Eulerian (6) and of the Lagrangean ($l < 6$) equations in order to conclude that the first are not restorable from the latter. It is enough to take into consideration that the Lagrangean equations do not contain the unknown reactions and that the Eulerian ones do: as plainly as anything.)

The impotence of the Lagrangean dynamical equations at the face of the problem of the existence of a solution is the clue to the riddle of most of the dynamical "paradoxes" we have mentioned above. Many of them are, indeed, dynamical problems with no solution. The Eulerian dynamical axioms catch this phenomenon, while the Lagrangean equations do not, supplying the problem with a completely definite solution. *Cum grano salis*, the Lagrangean dynamical equations are so powerful that they cán describe non-existing motions.

Let us now suppose that the conditions of the dynamical problem are consistent, hence a solution exists. Now we state that this solution slips through Lagrange's fingers.

When existing, the solution of a dynamical problem for a rigid body consists in answering two questions:

1. How does the body move?
2. Why does the body move?

The first question is answered fairy well by the Lagrangean dynamical equations, while the second is not. Indeed, a constrained rigid body is moving under the action of both the active forces (1) and the passive forces (2). The first ones are given in the conditions of the dynamical problem under consideration, while the second ones are wholly unknown quantities that are to be determined in the process of problem solving. Naturally, the Lagrangean dynamical equations, where the reactions are deliberately excluded, are completely helpless at the face of this question.

In few words: *the Lagrangean dynamical equations describe the motion if any, and cannot determine the reactions of the constraints.*

The main characteristic feature of Lagrange's approach to analytical mechanics is its superficiality. Proposing a mathematically simple *Schablon* for problem solving, it does not stimulate the solver to penetrate its deeper aspects, the geometry of the rigid body and of the constraints imposed on it. At that, not only Lagrange with his notorious "On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage", but together with him any of his adherents is boasting with this neglecting of geometry. So, for instance, Pars reproduced on p. 76 of his treatise [26] this statement of Lagrange's, commenting it in a most stilted manner.

In the meanwhile, no genuine mechanical problem can be solved without geometry, let analytical or differential, if not synthetical. The very definition of the fundamental for analytical mechanics rigid body concept is purely geometrical, as well as the notion of geometrical constraints imposed on such bodies. The Lagrangeanists, however, inspired by their magister's mechanical philosophy, pay little attention to such prejudices as strict mathematical definitions or rigorous mathematical demonstrations: the intuition of the initiated is for them much more trustworthy and reliable. Truesdell's ascertainment that in the *Méchanique Analitique* one could find "no explanation of concepts, no illustrations either by diagrams or by developed examples, and no attempt to justify any limit process by rigorous mathematics" [27, p. 173] remains valid for any mechanical exposition of any Lagrangeanist.

All these circumstances lead to such a situation in the mechanical literature with Lagrangean deviations that it hardly could be qualified otherwise save as chaotic. Along with the rigid body concept, this topsyturvydom concerns to the highest degree the notions of holonomic and non-holonomic constraints imposed on rigid bodies.

In order not to be unsubstantiated, let us again take a look at the repeatedly mentioned monograph [38] on non-holonomic dynamics, seeking to see the way its authors introduce these basic dynamical concepts.

The first sentences the book begins with read:

"При рассмотрении многих вопросов движения и равновесия механических систем возможна дискретная идеализация, т.е. идеализация, при которой механическое состояное рассматриваемой системы определяется конечным числом величин. В этом случае систему называют дискретной. К дискретным системам, например, относятся системы, состоящие из конечного числа материальных точек и абсолютно жестких тел.

Во многих случаях в силу устройства самой системы отдельные ее части не могут двигаться произвольным образом, их движения и положения как-то связаны между собой и подчинены ряду условий и ограничений. На систему, как принято говорить, наложены связи. Конкретный вид этих связей может быть весьма различный. Это может быть, например, шестереночное зацепление, соединение двух отдельных тел стержнем неизменной длины или что-либо другое. Для нас сейчас будут важны лишь те ограничения на геометрическое расположение и движение отдельных частей системы, которые влекут эти связи. Связи могут налагать ограничения на возможные геометрические расположения отдельных частей — такие связи называются геометрическими, и на кинематически возможные ее движения, т.е. на возможные значения скоростей ее отдельных частей — такие связи называются кинематическими. Ясно, что всякая геометрическая связь вместе с тем представляет собой и некоторую кинематическую связь; однако обратное, как оказывается, может и не иметь места, т.е. связь между возможными скоростями отдельных частей системы может не приводить к ограничениям на возможные их положения" (стр. 9).

This text implies that the book [38] is addressed to a widest auditorium — in any case, to readers also who have not the slightest idea of non-holonomic dynamics. It is clear also that it is not a mathematical text. In a sence, it is even a text that could be as well designed for students in physics. As a matter of fact its aim is to give a physical motivation of the mathematically formal definitions and demonstrations which, naturally, must follow. As such explanatory text it is beyond criticism: any author has his rights of methodological concessions.

The quoted fragment of [38] is followed immediately by an example. Forthwith after it one reads:

"На существование кинематических связей, не накладывающих никаких ограничений на возможные конфигурации механической системы, было обращено внимание сравнительно недавно. Еще Лагранж в своей знаменитой "Аналитической механике" не подозревал об их существовании. Это выразилось в том, что он считал возможным для любой механической системы с учетом условных уравнений, вытекающих из природы этой системы, выбирать независимые координаты с независимыми же вариациями. Этот просмотр обнаружился лишь значительное время спустя в связи с изучением различных случаев движения твердых тел, принужденных катиться без проскальзыванием по плоскости или по более сложной поверхности. Только в 1894 г. Герц ввел разделение связей и механических систем на голономные и неголономные.

Представим себе, что мы мысленно или фактически сняли с системы ряд имеющихся у нее связей и что после этого ее геометрическое положение определяется n величинами $q_1, q_2, \ldots, q_n$, называемыми обобщенными координатами. Тогда произвольному изменению этих обобщенных координат во времени соответствует некоторое движение освобожденной системы. Если теперь вновь наложить на систему снятые связи, то уже не всяким изменениям обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$ будет соответствовать некоторое движение системы. Изменения обобщенных координат и их значения должны теперь подчинятся ряду условий, нарушение которых означало бы нарушение наложенных связей. Эти условия могут, в частности, выражаться системой неравенств вида

$$f_\alpha(q_1, q_2, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n; t) \geqq 0 \tag{1.3}$$

($\alpha = 1, 2, \ldots, m$), и тогда соответствующие связи называются односторонними, неудерживающими или освобождающими, или уравнениями вида

$$f_\alpha(q_1, q_2, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n; t) = 0 \tag{1.4}$$

($\alpha = 1, 2, \ldots, m$), и тогда соответствующие им связи называются двусторонними, удерживающими или неосвобождающими. Удерживающие связи в свою очередь делят на геометрические и кинематические, зависящие и независящие от времени, соответственно тому, входит или не входит явно время в их уравнения. Связи называются геометрическими, если они выражаются уравнениями вида

$$f_\alpha(q_1, q_2, \ldots, q_n; t) = 0 \tag{1.5}$$

($\alpha = 1, 2, \ldots, m$), и кинематическими, если выражающие их уравнения имеют вид

$$f_\alpha(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n; q_1, q_2, \ldots, q_n; t) = 0 \tag{1.6}$$

($\alpha = 1, 2, \ldots, m$). Это определение вполне согласуется с тем, что говорилось о геометрических и кинематических связях в самом начале этого параграфа.

Кинематические связи (1.6) могут быть интегрируемыми или неинтегрируемыми, соответственно тому, вполне интегрируема или нет соответствующая система дифференциальных уравнений (1.6). Интегрируемые кинематические связи — это по существу геометрические связи. Напротив, неинтегрируемые связи, вообще говоря, отличны от геометрических и к ним не сводятся...

Механическая система с неинтегрируемыми кинематическими связями, не сводящимися к геометрическим, называется неголономной системой. Неголономная система характеризуется тем, что для нее не существуют обобщенных координат, произвольным изменениям которых соответствовало бы движение системы, не нарушающее ее связей. Подчеркнем, что согласно этому определению наличие одной неинтегрируемой связи еще не означает неголономности системы, поскольку эта связь может оказаться интегрируемой в силу остальных уравнений связей" (стр. 10 ÷ 12).

This fragment from [38] has been quoted here so pedantically since it, if one can put it like this, constitutes the theoretical basis of all the contents of the book. All that follows consists in routine manipulations based on these definitions of the authors. Therefore it is to the highest degree interesting to what extent this theoretical basis is reliable from a formal mathematically point of view.

The cold fact is, alas, that this reliability is equal to zero. There is not a bit of it. All these explanations are anything but mathematics. As a physical text, this exposition could yet be accepted. As a mathematical text its value is reduced to nought.

Those are no definitions at all. At the best, all these sentences are a try for an elucidation on an intuitive level. The formulas (1.3) - (1.6) are, from a mathematical point of view, completely meaningless. The authors of [38] are making fruitless efforts to give mathematical definitions of mathematically undefinable things.

As a matter of fact, the term constraint, geometrical as well as kinematical, is no mathematical notion, in the genuine sense of the word. Nor are the terms holonomic and non-holonomic constraint, holonomic and non-holonomic dynamical problem, holonomic and non-holonomic dynamics, at last. All these terms are, simply, only a *façon de parler*, abreviations, a concise — in other words, stenographic — manner to express telegraphically a complicated mathematical situation requiring many pages of formulas and symbols for its adequate formal mathematical description.

There we are. That is the size of it. Neither more, nor less.

As we have repeatedly underlined, one of the gravest deformity of Lagrange's mechanics, if there is such a thing, consists in its categorical refusal to construct a mathematically strict, logically irreproachable, definition of the fundamental for analytical dynamics notion of rigid body: such a definition requires plenty of geometry, and the Lagrangeanists are proud of having settled their accounts with geometry once for ever; instead they use the notion of a mechanical system which they do not define, so that it might mean anything and nothing in the same time. But *naturam expellas furca, tamen usque recurret,* as the saying is: *volens nolens,* a strict mathematical definition of the rigid body concept exists. And it is a definition that satisfies the most fastidious modern mathematical criteria for logical rigous. Now, it turns out that the intuitive idea of a geometrical constraint must be, and actually is, embedded in the fundament of this strict mathematical definition of the rigid body concept.

As to the special kinds of geometrical constraints the mechanical praxis has arrived at in the course of its time-honoured history, they are not defined by general unmeaning tittle-tattle, but are specified by means of painstaking numbering, as it is described in [23].

It turns out now that — as far as nothing more is hypothesized in the conditions of a dynamical rigid body problem — as a rule, this problem is mathematically indefinite one in the sense that its unknown quantities are more in number than the equations one has in his disposal for their determination.

Two, and two only, cases are familiar to the mechanicians, proposed by the centuries-old dynamical praxis at that, when the problem concerning the motion of a constrained rigid body under the action of given active forces and of unknown passive forces is mathematically a completely determined one — in other words, when the number of the unknown quantities in the dynamical problem is exactly equal to the number of the equations available for their determination.

The first one is the case of *smooth* geometrical constraints.

The second one is the case of *rolling without sliding and slipping*, or *in the presence of sliding and slipping of a completely determined kind*, of a surface on a surface, of a curve on a surface, of a surface on a curve, and of a curve on a curve.

Dynamical problems of the first kind are called *holonomic*. Dynamical problems of the second kind are called *non-holonomic*.

That part of analytical dynamics that is concerned with holonomic dynamical problems is called *holonomic dynamics*; that part of analytical dynamics that is concerned with non-holonomic dynamical problrems is called *non-holonomic dynamics*.

And that's that.

The conditions of rolling without sliding and slipping, or with sliding and slipping of a completely determined kind, are expressed mathematically by means of relations between the parameters of the rigid body, their velocities, and possibly the time. These namely relations the authors of [38] take cognisance of when they write down the equations (1.4) and (1.6). But these equations are corollaries, not definitions. To lay them in the groundwork of the edifice of non-holonomic dynamics is just the same as to state that the wind blows since the branches of the trees are swaying.

Some words more in connection with above citation from [38]. The authors write "мы мысленно или фактически сняли с системы ряд имеющихся у нее связей ... вновь наложить на систему снятые связи." If those are physical experiments with physical objects, then there is nothing to blame. Mathematically, however, these manipulations are wholly impermissible. According to a dynamical axioms, any constraint imposed on a rigid body generates a force (reaction of the constraint) acting on the body, the directrix of which passes through the point of contact of the body and the constraint. Now the authors of [38] do not know yet whether such a reaction exists at all: it exists if, and only if, the conditions of the dynamical problem under consideration are consistent — a question wholly ignored by the Lagrangeanists, as we have already seen above. In other words, these authors do not know at all whether their operations with "taking off" constraints and "putting them down again" are mathematically legitimate. Before they are perfectly sure that these operations are not illegal, they have no right to accomplish them in their minds.

Another important remark concerns again the "definition" (1.6) of [38]. It does not follow from the author's explanations that the case, when all the m equations (1.6) are non-holonomic, is excluded. In other words, the hypothesis, that all these m equations are non-holonomic, does not contradict the formulations of these authors. But this hypothesis is an error with immense consequences. Its immediate corollary is the existence of God.

In order to fix the ideas, let us, for the sake of brevity and simplicity, explain the essence of this criticism on the example of a single free mass-point with mass m and coordinates x, y, z with respect to an inertial Cartesian system of refernce $Oxyz$. Let the mass-point be subject to the action of no active force, and let the non-holonomic consteraint

$$\dot{x} - e^t(1 + y) = 0 \tag{131}$$

be imposed on it. This formulation of the problem does not a whit contradict the formulations of the authors of [38]: $m = 1$ in (1.6), $n = 3$, $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$,

$$f_1(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3; q_1, q_2, q_3; t) = \dot{q}_1 - e^t(1 + q_2). \tag{132}$$

If we suppose that the mass-point is under the action of no passive forces, then the kinetic energy theorem implies

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = C, \tag{133}$$

C denoting a constant of integration, and (131) contradicts (133). Hence the mass-point must be under the action of some passive force

$$\vec{R} = R_x\boldsymbol{i} + R_y\boldsymbol{j} + R_z\boldsymbol{k}, \tag{134}$$

the quantities R_x, R_y, R_z being unknown.

(Let us now stop for a while and think.

The first thing brought to our attention in this instant is the fact that, in their definition of non-holonomic constraints, the authors of [38] have not yet said a single word about the existence of forces of the kind (134). If one follows painstakingly through their exposition, then he will see that for the first time the term *reaction of a constraint* is used on p. 50:

"Освободим зассматриваемую систему от связей, котоpые заменим неизвестными, вообще говоря, силами реакции $\vec{R}_i$ этих связей."

Nota bene. First: on this third page of chapter II (p. 50) the authors speak of *reactions of constraints*, making no mention of the term *constraint* beforehand; Second: Immediately below *on p. 50* they *use* D'Alembert-Lagrange's equation which they *derive on p. 93*, as underlined above. Third: nowhere before they have said a word about the *possibility to substitute a reaction for a constraint*. Never mind.)

Let us take it for granted that our mass-point is acted on by the force (134). Then Newton's axiom of momentum implies

$$m\ddot{x} = R_x, \quad m\ddot{y} = R_y, \quad m\ddot{z} = R_z \tag{135}$$

and, together with (131), the first equation (135) implies

$$R_x = me^t(1 + y + \dot{y}). \tag{136}$$

As regards R_y and R_z, as well as the dependence of y and z of t, nothing reasonable can be said. In other words, we are faced with a mathematically completely indeterminate dynamical problem.

So far we have reasoning as Newtonians. Let us now think as Lagrangeans.

If the reaction (134) in non-ideal, then we, together with Lagrange, are helpless in front of the dynamical problem in question. But we do not like to be helpless. Let us, therefore, assume, that it is ideal, i. e.

$$\mathbf{R}d\mathbf{r} = 0. \tag{137}$$

The postulate of the ideal constraints (137) being satisfied, the kinetic energy theorem implies

$$dT = \mathbf{R}d\mathbf{r} = 0, \tag{138}$$

whence again (133) and again a contradiction with the non-holonomic constraint (131).

The existence of God is implied by non-ideal reactions (134). Indeed, in such a case nothing paradoxal is established in (135) and (136). Where did, however, the reaction (134) come from? From thin air? In our atheistic world this is impossible. But it exists according to p. 50 of the treatise [38]. Hence it is created by God. *Quod erat demonstrandum.*

If seriously, then any mechanician must obey as strictly as the ten commandments the following dynamical canon:

No non-holonomic constraint is possible in absence of holonomic ones.

Many other things can be said about the Lagrangean machanical tradition in holonomic and non-holonomic dynamics, but it is high time to bring our exposition to an end. Hoping that the reader has, though passing, obtained a rough idea of the present state of affairs in analytical mechanics where the influence of this tradition is still predominant, we shall conclude our exposition with a final critical remark on the application of the Lagrangean politics in non-holonomic dynamics.

While in the presence of geometrical constraints only imposed on rigids bodies the postulate of ideal constraints (30) is a question of a *definition*, i.e. it is included in the very conditions of the dynamical problem, in the presence of one at least non-holonomic constraint it is, on the contrary, a *question of proof*. In other words, the constructor of such a problem has yet lost the initiative on the question whether the constraints are ideal or non-ideal — the situation has slipped out of his hands. He is compelled to formulate the conditions of the dynamical problem, saying no word concerning the nature of the reactions of the constraints: are they ideal or not is a fact that must be established in the process of the problem solving.

Now the Lagrangeanists are faced with an impossible situation. Except for certain simple if important special non-holonomic problems (rolling of a rigid body on a surface *without* sliding and slipping), in the general case they simply can say nothing about the reactions. The reason for this paradoxal state of affairs is rooted in the very essence of their dynamical approach. Their pride consists in the expelling of the reactions out of their equations. But once the reactions expelled, the Lagrangeanists do not know whether they can apply their equations or not.

Euler's dynamical equations (91) - (96) solve this problem at once. The reactions take part in these equations. Now nothing remains, but to determine these reactions, to form the sum in the left-hand side of (30) and to establish whether it is zero or not. But why should a non-Lagrangeanist take all these pains and waste his time? He is not interested in the postulate of ideal constraints. The Eulerian dynamical equations (91) - (96) solve the non-holonomic problem in both cases, the Lagrangean in none: if the reactions are not ideal, they are inapplicable; while if they are ideal, the equations are applicable, but the problem solver is ignorant of the fact. Some dynamical "paradoxes" constructed on the basis of this situation are published in the article [23].

All that has been said up to now implies that the Eulerian dynamical axioms are the only possible way leading to the goal — a modern analytical dynamics. These axioms establish in analytical mechanics a dictatorial regime, but not more autocratic than, for instance, the principle of mathematical induction in arithmetic: they simply do not admit an alternative. As to the Lagrangean dynamical equations (100), they are, as we have seen by means of the fundamental identities (130) of Lagrangean formalism, simple corollaries from the Eulerian dynamical axioms — mere projections, as a matter of fact.

Analytical mechanics is beyond Lagrange's powers. The unconditionality of this ascertainment is not a whit diminished by the fact that the Lagrangean dynamical tradition keeps on as yet governing the minds of the mechanicians all over the world in this very moment: those are the agonies of a dying tendency, of a condemned *Weltanschauung*. If it is true that every Age has its Middle Ages, then analytical mechanics has not yet overlived them. Life is, however, stronger than anything. He, who sees the verity, should be calm, as regards Euler in mechanics: *Nolite flere, non est mortuus, sed dormit.*

LITERATURE

1. G. Chobanov, I. Chobanov. Lagrange or Euler? Part one: The Past. — Год. Соф. унив., Фак. мат. мех., 73, 1979, 13–51.
2. И. Чобанов. Лагранж или Ойлер? — Физ.-мат. спис., 22 (55), 1979, № 2, 118–139.
3. G. Chobanov, I. Chobanov. Lagrange's dynamical equations as corollaries from Euler's dynamical axioms. — Год. Соф. унив., Фак. мат. мех., 75, 1981, кн. 2 — Механика, 27–48.
4. G. Chobanov, I. Chobanov. Lagrange's equations as projections of Euler's axioms. — Год. Соф. унив., Фак. мат. мех., 75, 1981, кн. 2 — Механика, 49–71.
5. Г. Чобанов, И. Чобанов. Един привиден динамичен парадокс. I. Лагранжова механика? — Год. Соф. унив., Фак. мат. мех., 76, 1982, кн. 2 — Механика, 3–32.
6. Г. Чобанов, И. Чобанов. Един привиден динамичен парадокс, I. Парадокси? — Год. Соф. унив., Фак. мат. мех., 76, 1982, кн. 2 — Механика, 33–57.
7. Р. Докова, И. Чобанов. Други динамични "парадокси". — Год. Соф. унив., Фак. мат. мех., 76, 1982, кн. 2 — Механика, 209–231.
8. G. Chobanov, I. Chobanov. Appell's equations as projections of Euler's axioms. — Год. Соф. унив., Фак. мат. мех., 77, 1983, кн. 2 — Механика, 7–20.
9. G. Chobanov, I. Chobanov. Sapienti sat. — Год. Соф. унив., Фак. мат. мех., 77, 1983, кн. 2 — Механика, 21–25.
10. R. Dokova, I. Chobanov. For any rigid body Lagrange's dynamical equations are projections of Euler's dynamical axioms on appropriate axes, or A new strict mathematical proof of Lagrange's dynamical equations on the basis of Euler's dynamical axioms. — Год. Соф. унив., Фак. мат. мех., 77, 1983, кн. 2 — Механика, 69–107.
11. И. Чобанов. Лагранж и механиката: мит и действителност. (Встъпителна лекция, четена на 27 март 1985 г.) — Год. Соф. унив., Фак. мат. мех., 78, 1984, кн. 2 — Механика, 3–46.
12. R. Dokova, I. Chobanov. Fundamental identities of Lagrangean formalism. — Год. Соф. унив., Фак. мат. мех., 78, 1984, кн. 2 — Механика, 79–112.
13. I. Chobanov. On the principle of virtual work. — Год. Соф. унив., Фак. мат. мех., 78, 1984, кн. 2 — Механика, 267–284.
14. I. Chobanov, R. Simeonov. A note on two previous articles. — Год. Соф. унив., Фак. мат. мех., 79, 1985, кн. 2 — Механика, 3–11.
15. G. Chobanov, I. Chobanov. Gibbs–Appell's non-holonomic equations as projections of Euler's dynamical equations on appropriate axes. — Год. Соф. унив., Фак. мат. мех., 79, 1985, кн. 2 — Механика, 61–105.
16. I. Chobanov. Newtonian and Eulerian dynamical axioms. I. The exodus. — Год. Соф. унив., Фак. мат. мех., 79, 1985, кн. 2 — Механика, 125–139.
17. I. Chobanov. Newtonian and Eulerian dynamical axioms. II. The literary tradition. — Год. Соф. унив., Фак. мат. мех., 79, 1985, кн. 2 — Механика, 141–169.
18. G. Chobanov, I. Chobanov. A dynamical problem: How to solve it? I. General preliminaries. — Год. Соф. унив., Фак. мат. мех., 80, 1986, кн. 2

— Механика, 24–64.
19. G. Chobanov, I. Chobanov. A dynamical problem: How to solve it? II. Kinematical preliminaries. — Год. Соф. унив., Фак. мат. мех., 80, 1986, кн. 2 — Механика, 65–125.
20. G. Chobanov, I. Chobanov. A dynamical problem: How to solve it? III. Dynamical preliminaries. — Год. Соф. унив., Фак. мат. мех., 80, 1986, кн. 2 — Механика, 127–176.
21. G. Chobanov, I. Chobanov. A non-holonomic dynamical "paradox". I. — Год. Соф. унив., Фак. мат. инф., 81, 1987, кн. 2 — Механика, (to be printed).
22. G. Chobanov, I. Chobanov. A non-holonomic dynamical "paradox". II. — Год. Соф. унив., Фак. мат. инф., 81, 1987, кн. 2 — Механика (to be printed).
23. G. Chobanov, I. Chobanov. The postulate of ideal constraints and the non-holonomic dynamics. — Год. Соф. унив., Фак. мат. инф., 81, 1987, кн. 2 — Механика (to be printed).
24. I. Chobanov, S. Deneva. Some new statical and dynamical "paradoxes". — Год. Соф. унив., Фак. мат. инф., 81, 1987, кн. 2 — Механика (to be printed).
25. Méchanique Analitique, par M. de la Grange, de l'Académie des Sciences de Paris, de celles de Berlin, de Pétersbourg, de Turin, etc. A Paris, Chez la veuve Desaint, Libraire, rue du Foin S. Jacques. M. DCC. LXXXVIII. Avec Approbation et Privilège du Roi.
26. L. A. Pars. A Treatise on Analytical Dynamics. London [1965].
27. C. Truesdell. Essays in the History of Mechanics. Berlin — Heidelberg — New York, 1968.
28. Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Autore Js. Newton, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis. Sodali. Imprimatur S. Pepys, Reg. Soc. Praeses. Julii 5. 1686. Londini, Jussu Societatis Regae ac Typus Josephy Streater. Prostat apud plures. [On the second issue dated 5.7.1686 as well: Prostant Venales apud Sam. Smith ad insignia Principis Wallae in Coermitio D. Pauli, aliosq.; nonnullos.] Bibliopolas, Anno MDCLXXXVII.
29. L. Euler. Mecanica sive motus sciencia, analytice exposita. 2 vols. Petropoli, 1736.
30. J. de R. D'Alembert. Traité de Dynamique. Paris, 1734.
31. J.-L. Lagrange. Nouvelle solution du problème du mouvement de rotation d'un corps de figure quelconque n'est animé par aucune force accélératrice. — Nouv. Mém. Acad. Berlin, 1773, 85–120.
32. Oeuvres de Lagrange, publiées par les soins de M. J.-A. Serret, sous les auspices de son excellence le Ministre de l'instruction publique. T. 3. Paris, 1869.
33. L. Euler. Nova methodus motum corporum rigidorum determinandi. — Novi Comm. Acad. Sci. Petrop., 20, 1775, 208–238.
34. L. Euler. Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum ex primis nostrae cognitionis principiis stabilità et ad omnes motus, qui in hujusmodi cadere possunt, accomodata. Petropoli, 1790.
35. J.-L. Lagrange. Mécanique Analytique. Quatrième édition, contenant les notes de l'édition de M. J. Bertrand, publiée par Gaston Darboux. Paris. Tome premier. 1888; tome second. 1889.

36. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Herausgegeben im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. Vierter Band in vier Teilbänden. Mechanik. Redigiert von Felix Klein und Conrad Müller. Leipzig. Erster Teilband, 1901 — 1908; zweiter Teilband, 1904 — 1935; dritter Teilband, 1901 — 1908; vierter Teilband, 1907 — 1914.
37. D. Hilbert. Grundlagen der Geometrie. Leipzig, 1899.
38. Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев. Динамика неголономных систем. М., 1967.
39. И. Чобанов. Върху логическите основи на аналитичната механика. — Год. Соф. унив., Мат. Фак., 61, 1966–1967, 185–255.
40. C. Wessel. Om Directionens analytiske Betegning et Forsøg, anwendt for nemmelig til plane og sphaeriske Polygoners Opløsning. — Danske Selsk. Skr., II Ser., 5, 1799, 469–518.
41. C. Wessel. Essai sur la répresentation analytique de la direction. Trad. du danois. Copenhague, 1897.

Received 29.III. 1989

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 2 — Механика
Том 82, 1988

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA "ST. KLIMENT OHRIDSKI"
FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 2 — Mécanique
Tome 82, 1988

LAGRANGE OR EULER?
PART THREE: THE FUTURE

GEORGI CHOBANOV, IVAN CHOBANOV

For every thing there is a season, and a time for every matter under heaven: a time to cast away stones, and a time to gather stones together. .

Ecclesiastes

Георги Чобанов, Иван Чобанов. ЛАГРАНЖ ИЛИ ОЙЛЕР? ЧАСТЬ ТРЕТАЯ: БУДУЩЕЕ

Эта работа является третей частью серии статьей по вопросу о динамических традициях Эйлера и Лагранжа, первые две части [1, 2] которой были опубликованны в том же самом *Ежегоднике*. Она содержит некоторые концепции о будущем развитии исследований, направленных к стабилизации логических основ аналитической механики, отражающие взгляды авторов на эти вопросы; естественно, в этой связи нельзя игнорировать шестую проблему Гильберта об аксиоматической консолидации этих основ. После анализа настоящего состояния дела в связи с основными механическими сущностьям, как например ее геометрические предпосылки, теория стрел как подлинная математическая интерпретация понятия силы, движения в стандартных векторных пространств, понятия твердого тела и т.д., предложены соответствующие определения совместно с основными следствиями из этих определений. Статья использует на широкую ногу результаты, полученные в предыдущих публикациях авторов.

Georgi Chobanov, Ivan Chobanov. LAGRANGE OR EULER? PART THREE: THE FUTURE

This paper is the third part of a series of articles on the Eulerian and Lagrangean dynamical traditions, the first two parts [1, 2] of which have been published in this *Annual*. It contains some conceptions on the future development of the investigations on the stabilization of the logical foundations of analytical mechanics, as the authors see it; in this connection Hilbert's sixth problem on the axiomatic consolidation of these foundations is, naturally, inevitable. After an analysis of the present state of affairs concerning the basic mechanical entities, as for instance the geometrical background of analytical mechanics, the theory of arrows as the genuine mathematical interpretation of the force concept, the motions in standard vector spaces, the rigid body concept, etc., corresponding definitions are proposed together with the main corollaries they imply. The article makes on a large scale use of results obtained in previous publications of the authors.

This paper is the third and final part of a series of articles published in this *Annual* [1, 2] and dealing with the Lagrangean and Eulerian dynamical traditions. The first part gives a brief historical account of the birth and rise of these traditions, and the second treats the present state of affairs in analytical dynamics, in so far as it may be observed in the current mechanical literary sources, as well as the interplay of the Eulerian and Lagrangean dynamical traditions. This third part is dedicated to the future developments in analytical mechanics, connected with the solution of Hilbert's sixth problem, as the authors see coming events in it, relying on their own professional experience in the course of many decades and scientific researches in the domain, concerning mainly the axiomatic consolidation of the logical foundations of analytical dynamics and the realization of Hilbert's directive concerning the axiomatic construction of rational mechanics.

As it is well-known, in his famous *Vortrag* [3], reported before the Second Mathematical Congress in Paris 1900 Hilbert proposed a list of 23 mathematical problems set for this century to solve. This list includes, as problem number six, entitled *Mathematische Behandlung der Axiome der Physik*, the forming of a system of axioms for those theories of physical genesis, mechanics in the first place, for which the rôle of mathematics has already become a decisive one:

"Durch die Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie wird uns die Aufgabe nahe gelegt, *nach diesem Vorbilde diejenigen physikalischen Disziplinen axiomatisch zu behandeln, in denen schon heute die Mathematik eine hervorragende Rolle spielt: dies sind in erster Linie die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Mechanik*" [4, Bd. 3, S. 306].

After this exordium Hilbert outlined the contours of a program towards the solution of his sixth problem containing some standpoints and recommendations exposed in the typical for him optimistic tones. The ensuing development in rational mechanics, however, dashed Hilbert's hopes, and in the course of more than half a century after the announcement of his *Mathematische Probleme* the execution of his program seemed to be postponed *ad Calendas Graecas*. As Truesdell has commented apropos of Hilbert's sixth problem, "this problem, like all those he proposed concerning the relation between mathematics and physical experience, has been neglected by the mathematicians... Only two significant attempts to solve the part of Hilbert's sixth problem that concerns mechanics have been published: that of Hamel ... and that of Noll..." [5, p. 336].

As regards Hamel, Truesdell is referring to his article [6], ensued by [7]. None of these deserves the qualification "significant attempt": apropos of [6] see the critical remarks in [8]; apropos of [7], see the critical analysis in [9]. As regards Noll, Truesdell is referring to his articles [10, 11].

Noll's article [10] is the first actually serious publication in connection with the Hilbert's sixth problem. It begins with some not especially flattering constatations apropos of the *status quo* of the logical foundations of classical mechanics:

"It is a widespread belief even today that classical mechanics is a dead subject, that its foundations were made clear long ago, and that all that remained to be done is to solve special problems. This is not so. It is true that mechanics of systems of a finite number of mass points has been on a sufficiently rigorous basis since Newton. Many textbooks on theoretical mechanics dismiss continuous bodies with the remark that they can be regarded as a limiting case of a particle system with an increasing number of particles. They cannot. The erroneous belief that they can had the unfortunate effect that no serious attempt was made for a long period to put classical continuum mechanics on a rigorous axiomatic basis" (p. 266).

Noll does not mention it explicitly, but essentially his criticism is directed against the Lagrangean dynamical tradition. Indeed, this namely tradition is that regards the rigid bodies as composed by a great number of mass-points [2]. Let us remember Lagrange's own standpoint on this question cited in the second part of this series: "Je considére les corps proposés comme l'assemblage d'une infinité de corpuscules ou points massifs unis ensemble de manière qu'il gardent toujours nécéssairement entre eux les mêmes distances." Let us remember also the attitudes towards rigid bodies of the authors of the treatises [12] and [13] analysed in [2]. The first of them carries things with a high hand. He rides roughshod over any manners and customs of mathematical decency. Employing in 1965 arguments which hardly would convince Euler in 1765, he states:

"In the classical dynamics we are concerned with systems having a finite number of degrees of freedom, and it is with such systems we shall be mainly concerned in this book. Nevertheless it is natural to suppose, on physical grounds, that the fundamental equation [i.e. D'Alembert-Lagrange's principle, derived by the author of [12] for systems of finite number of mas-points only] will also hold for continuous systems, where the number of degrees is infinite — for example systems involving fluids in motion and vibrating strings. In such problems the summation occuring in the fundamental equation will be replaced by integration" (p. 37).

We shall not comment these profound thoughts recorded by an author taking infinitely many degrees of freedom with mechanics. We shall only note that such a behaviour is completely within the frames of traditional demeanour of any Lagrangeanist all over the world.

Coming back to Hilbert's sixth problem we must pass a verdict that is final and there is no appeal: the Lagrangean dynamical tradition is the only culprit for its neglecting on the part of the mathematicians. The arguments in favour of this sentence are abundantly closely discussed in [1, 2] in order to expose them here again. If we should formulate in a few words the main reasons for this state of affairs, we would adduce Truesdell's appraisal apropos of Lagrange's *Méchanique Analitique*: "... no explanation of concepts ... no attempt to justify any limit process by rigorous mathematics" [5, p. 173]. These characteristic features of the Lagrangean dynamical tradition overlived its originator in the course of two clear centuries to become nowadays its most repulsive distinguishing marks. Typical for Lagrangean mechanics are:

First, a complete lack of genuine mathematical deffinitions.

Second, a complete disregard of strict mathematical proofs.

In result, mechanical treatises are printed in Twentieth Century in which the logical spirit of the era before the French Revolution has survived.

As the case stands, which forming-up place must be chosen for the onrush against the positions of Hilbert's sixth problem? Where should one start from in order to bridge over the difficulties it conceals, to break the neck of the task?

Under the circumstances, the sole answer of these questions is: *ab ovo Ledae*. But what does *ab ovo* in analytical mechanics mean?

Let us take as a model some other mathematical theories which are already conquered territories for the axiomatic approach, such as geometry or arithmetic, for instance. What does *ab ovo* in these theories mean?

Space! The first and greatest concern of a mathematical theory in the process of an axiomatic consolidation of its logical basement is to construct the most natural for this science *medium*, in which the phenomena characteristic for the mathematical theory in question could proceed. In most cases, though not always, this medium is called space, or something of the kind, in order to evoke the mental picture of a multitude of certain objects: domain, field, line, plane, graph, tree, body; ring, group, structure, neighbourhood, etc. (One speaks, for instance, of the line of real numbers, of Gauss' plane or plane of complex numbers, of the body of quaternions, of the ring of integrals, and so on. No wonder that the term space, as well as the term point as a general denomination for the elements of certain spaces, are overburdened with usage, and they demand various adjectives with a view to their specification.) The elements of the specific medium for a given mathematical theory are, as the saying is, the bricks or the stones the edifice of this theory is constructed from. For synthetic geometry, for instance, the genuine medium is the Euclidean space; for arithmetic, depending on circumstances, it is the system of natural numbers, or the ring of integers, or the fields of rational, real, or complex numbers, etc. *Suum quique*.

For analytical mechanics the native medium — as air is the native element for birds, and water for fishes — is the real standard vector space. It is the mathematical world where the mechanical entities are borne, the place where their growth and florescence set in, the stage where the mechanical drama is running. As well as the real numbers are the building stones for the classical real analysis, and the complex numbers are the bricks for the classical complex analysis, the real standard vectors provide analytical mechanics with the most natural, the most convenient, and the most resistent building material.

Between analysis and mechanics, however, there is a difference, though technical, rather than on principle. While in analysis the terrain, the building site is cleared away and organized long ago, in analytical mechanics until very recently it was left unkempt and overgrown.

Extra special cares for the *Grundlagen der Analysis* were taken in 1930 by Edmund Landau, who, for the first time in the mathematical literature, gave a consistent, sufficiently complete, and systematical up to pedantry, exposition [14] of arithmetic of natural, whole, rational, real, and complex numbers. It is by no means absence of mind that this arithmetical treatise is entitled "Foundations of Analysis": never before Landau, in all the mathematical literature, classical analysis had at its disposal its natural medium, its genuine space — the fields of real and complex numbers respectively, constructed in a mathematically irreproachable way.

(*Entre parenthèses*: "irreproachable" is, in mathematics at least, a historical category. Landau's exposition bears the marks of his epoch and the tokens of pioneerdom. It will not be useless to discuss this question somewhat closer.

Landau skims the cream off age-old scientific toils. In [14] the roads of great mathematicians meet: it is the juncture of first-rate mathematical ideas.

As regards the natural numbers, though familiar to mankind from times memorial, they had to wait till the seventeenth century when Pascal formulated one of their most important mathematical characteristics, the mathematical induction. At first this extremely useful property of the system N of all natural numbers has been applied for the goals of arithmetical proofs only. Grassmann [15] has been the first to use it for definitional purposes: the sum $a+b$ of the natural numbers a and b he defined inductively by the two-link-chain $a+1=a'$ and $a+b'=(a+b)'$, and the product ab by $a1=a$ and $ab'=ab+a$, n' denoting the successor of the natural number n.

As regards the whole, rational, and real numbers, Landau used an approach, already classical for mathematics, according to which new mathematical object may be defined as equivalence classes in preliminarily appropriately defined sets of well-known mathematical objects. If for instance $(a,\ b)$, $(c,\ d) \in N^2$ and by definition $(a,\ b) \sim (c,\ d)$ iff $a+d=c+b$, then $\sim$ is an equivalence relation in N^2 and any equivalence class in N^2, generated by it, is by definition a whole number. Similarly is proceeded in the definitions of rational and real numbers.

As regards the real numbers, Landau disposed of Cantor's definition from 1872, according to which a real number is an equivalence class in the set C of all **Cantorian sequences** $\{x_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ of rational numbers x_ν ($\nu = 1,\ 2,\dots$). At that, the sequence $\{x_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ is by definition Cantorian iff for any rational $\varepsilon > 0$ there exists such a natural numbers p_ε that $m > p_\varepsilon$ and $n > p_\varepsilon$ imply $|x_m - x_n| < \varepsilon$. As regards the equivalence relation $\sim$ in C, it is defined in the following manner: by definition $\{x_\nu\}_{\nu=1}^{\infty} \sim \{y_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ iff for any rational $\varepsilon > 0$ there exists such a natural number q_ε that $n > q_\varepsilon$ implies $|x_n - y_n| < \varepsilon$.

As regards the complex numbers, Landau disposed of Hamilton's definition. According to Hamilton, a complex number is an element of the Cartesian square R^2 of the field R of all real numbers, supplied with operations addition and multiplication defined by

$$(1) \qquad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

and

$$(2) \qquad (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

respectively.

There is much more, yet.

As regards the axiomatization principle in general, Landau disposed with Hilbert's scheme [16] from 1899, and the title of Landau's book [14] imitates the title of Hilbert's.

As regards the axiomatization principle in arithmetic of natural numbers, in patricular, Landau disposed with Peano's scheme [17] from 1889.

In such a manner, the book [14] of Landau is of a compilation character. And yet, for three at least reasons this is a remarkable work that left behind itself deep traces in modern mathematics.

First, Landau has realized for the first time in arithmetical literature that Grassmann's definition of sum and product of natural numbers requires unconditionally proofs that such things (two valued functions, as a matter of fact) really exist.

Second, as it has been already underlined, Landau's *Grundlagen der Analysis* contains the first systematical exposition of arithmetic of the mentioned number systems. For this reason it served the purposes of the popularization of modern views in the domain.

Last but not least, Landau has realized quite clearly that classical analysis, complex as well as real, is unthinkable, in up-to-date sense of the word, before a mathematically perfect arithmetic of the fields of complex and real numbers respectively is performed.

As regards some "specks" of Landau's exposition, we shall pause on one only shortcoming. The operation addition in N is defined in [14] before the order relation. This approach is, however, against the mathematical nature of these arithmetical phenomena: historically counting goes prior to computing; therefore it is rather desirable that mathematically order precedes addition. An attempt to restore the natural order of things has been undertaken in the book [18], see also [19], although the way chosen in [18] is, obviously, not the shortest possible. We close the brackets.)

We dwelt so thoroughly on these questions, since there is a complete analogy between classical analysis and analytical mechanics, on the one hand, and between the field of real numbers and the real standard vector space, on the other hand.

Vectors are discovered out and away later than numbers, no mater whether natural, whole, rational, real, or complex. In point of fact, vectors are coevals with quaternions or hypercomplex numbers. Furthermore, not only vectors and quaternions are the same age, but for a long period vector and quaternion calculus have been as inseparable as Siamese twins.

In the same year, 1844, when Grassmann published the first version [20] of his *Ausdehnungslehre*, Hamilton published his first announcement concerning quaternions, shortly afterwards ensued by a series [21] of other articles on the same topic. Since the following developments are of great importance with an eye to the better understanding of the current state of affairs of vector and quaternion calculus, it will not be otiose to discuss this matter in some details.

The necessity of a geometrical calculus, alias of a mathematical method for expressing quantitatively geometrical phenomena, has been realized already by Leibniz. In a letter to Huygens dated September 8, 1679, he states:

"... je ne suit pas encor content de l'Algebre, en ce qu'elle ne donne ny les plus courtes voyes, ny les plus belles constructions de Geometrie. C'est pourquoy lorsqu'il s'agit de cela, je croy qu'il nous faut encor une autre analyse proprement geometrique ou lineaire, qui nous exprime directement situm, comme l'Algebre exprime magnitudinem."

Enclosed herewith Leibniz dispatched to Huygens an "Essay", in which he explained somewhat closser his main ideas apropos of the "geometrical symbolical language" ("nouvelle characteristique"). Huygens, whose answer dated November 20, 1679, is hardly encouraging, obviously could not realize that one of the most genial scientific foresights was concealed in Leibniz's conception. And no wonder: Leibniz's program towards the creation of a "geometrical" or "linear" calculus has been accomplished more or less satisfactory not until the end of the last century with the invention of vector algebra and vector analysis.

(Some historians of mathematics interpret Leibniz's phrase "une autre analyse proprement geometrique ou lineaire, qui nous exprime directement situm" as a foreboding of topology. We thing that such a standpoint is rather far-fetched leastwise on account of the adjective "lineaire" this phrase includes.)

In order to stimulate investigations connected with the "analyse geometrique ou lineaire" of Leibniz, the German scientific society *Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft* announced a competition the aims which were "den von Leibniz erfundenen geometrischen Calcul wiederherauszustellen, oder einen ihm ähnlichen aufzustellen". Grassmann carried off the palm. His prize-winning work [22] has been published in 1847 with a commentary by Möbius. This is not by chance. Nearly twenty years before Grassmann's *Ausdehnungslehre*, Möbius published a treatise [23] on the "barycentrical calculus", invented by him, which is regarded as a predecessor of Grassmann's "geometrical analysis"; one is left with the impression that some kind of likeness in the titles of [20] and [23] is hardly a coincidence.

During the following decade in the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* several articles of Grassmann were published where various applications of his method are made on different problems of geometry. His main work [20], however, remained for a long period obscure for the general mathematical public and did not stimulate investigations of other authors. Several reasons led to this state of affairs:

"Ein Zeitalter, welches die imaginären Größen noch als unmöglich ansah, und die "nichteuklidische" Geometrie mit Kopfschütteln betrachtete, konnte natürlich sich an den n Dimensionen der Ausdehnungslehre nur wenig Geschmack finden, und noch weniger vielleicht an den ungewohnten Operationen mit ebenso ungewohnten Objecten. Dazu kam wohl auch der Umstand, daß die mathematischen Kräfte der letzten Jahrzehnte vollauf beschäftigt waren mit der Ausbildung der Theorien eines Jacobi, Dirichlet, Steiner, Möbius, Plücker, Hesse und Anderer, die alle einen Kreis eifriger Schüler um sich sammelten, während dem Verfasser der Ausdehnungslehre das Geschmack eine gleiche Wirksamkeit versagt hatte. Endlich aber darf nicht unberücksichtigt bleiben, daß das Werk in seiner mehr philosophischen als mathematischen Form, ungewöhnlichen Inhalt in ungewöhnlicher Form bietend, dem Studium großen Schwierigkeiten entgegensetzte, deren Bewältigung nicht einmal ein sehr lockendes Ziel verhieß. Denn die Ideenkreise des Buches lagen von denen der übrigen gleichzeitigen Bestrebungen in der Mathematik weit entfernt, und die räumlichen Anwendungen kamen meist nur der Elementar-Geometrie zu Gute, welche damals noch unerschüttert auf der Eukldischen Basis thronte" [24].

The completely rehashed new edition [25] of [20] was printed in 1862. In the course of time the ideas and the technics of the geometrical analysis won it more and more followers and became generally acknowledged towards the end of the last century. About that time the complete works [26] of Grassmann have been published.

Meanwhile on the British Isles another development took place. In the course of two clear decades Hamilton published an immense series of articles [27 – 38] on various applications of quaternions, as well as the two books [39, 40]. By and by the quaternions became Hamilton's fixed-idea. The situation is described rather vividly by Felix Klein in his Lectures on the developement of mathematics in the last century [41]:

"Sehr bald wurden die Quaternionen in Dublin ein alles andere überragender Gegenstand des mathematischen Interesses, ja sogar ein officielles Examenfach, ohne dessen Kenntniss kein Absolvierung des Colleges mehr denkbar war. Hamilton selbst gestaltete sie für sich zu einer Art orthodoxaler Lehre des mathematischen Credo, in die er alle seine geometrischen und sonstigen Interessen hineinzwang, je mehr sich gegen Ende seines Lebens sein Geist vereinseitigte und unter den Folgen des Alkohols vereindüsterte.

Wie ich schon andeutete, schloss sich an Hamilton eine Schule an, die ihren Meister an Starrheit und Intoleranz noch überbot. Sie war geeignet, Gegenströmungen hervorzurufen, und so wurden denn die Quaternionen z. B. in Deutschland von der Mehrzahl der Mathematiker hartnäckig abgelehnt, bis sie auf dem Umweg über die Physik in Form der vor allem in der Dynamik unentbehrlichen Vektoranalysis dennoch eindrangen. Sollen wir heute ein Urteil über sie geben, so wäre etwa zu sagen: Die Quaternionen sind gut und brauchbar an ihrem Platze; sie reichen aber in ihrer Bedeutung an die gewöhnlichen komplexen Zahlen nicht heran."

The quaternions (hypercomplex numbers with three imaginary units) are a natural generalization of the complex number concept, whose multiplication is, in general, non-commutative. Especially remarkable is their connection with the rotations in the three-dimensional Euclidean space [42, 43]. Attaching ourselves to Klein's estimation apropos of the significance of quaternions, we should say that, while the standard vectors are the most natural means for the algebraic representation of translations in the Euclidean space, the quaternions are the genuine mathematical instrument for the algebraic expression of the rotations in the latter.

Its present aspects the vector calculus is obliged to the American theoretical physicist Gibbs. As he himself notes, his interest for vector analysis has arisen when he read the book [44] of Maxwell, in which the method of quaternions is applied to electrodynamical and magnetic investigations. Gibbs soon convinced himself that the quaternions are unsuitable to this end and began developing independently the modern apparatus of vector algebra and vector analysis. Meanwhile he provided himself with the books [22, 25] of Grassmann, but they exerted a slight influence on his occupations. Gibbs wrote the text-book [45] on vector calculus designed for students in physics. Later he published several articles [46 – 51] on vector calculus meant to popularize the new method. An important rôle for the confirmation of the vector calculus have played the books [52] of Peano and [53] of Hyde.

In its age of puberty the vector calculus represented a peculiar symbiosis of geometry and algebra — synthetic geometry at that. The vectors were initially introduced as "directed segments" and even "directed quantities", with a strong intuitional appeal to physical experience. Later the vectors were interpreted by means of ordered triplets (x, y, z) of real numbers x, y, and z. This atmosphere gave good grounds for the following sarcastic remark of R. von Mises:

"Wenn man in den gebräulichen Darstellungen der Vektorrechnung an ihrer Spitze die Erklärung findet, der Vektor sei eine "gerichtete Grösse", so muß jeder Vernünftige erkennen, daß damit soviel wie nichts gesagt ist. Die andere Definition, das man ebenso häufig begegnet, der Vektor sei eine "Zahlentripel", ist offenbar zu weit, denn die Zahl der Männer, Frauen und Kinder an einem Ort ist gewiss kein Vektor" [54, S. 155].

This has been written in 1924. The force of the irony in these words is so overwhelming that "jeder Vernünftige" is inclined to think that, after they were published, no author of a text-book on vector calculus would take the liberty to repeat the faults Mises is laughing at. Alas, to all appearances, such authors do not read the *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*. We are more than sure — we are utterly certain — that most of the text-books on vector calculus or on theoretical mechanics (including an introductory chapter on vector calculus), printed in this very day, begin with an inevitable enigmatic "definition" of the sort of "a vector is a directed quantity". The excuse that other authors are doing just the same is no exculpation — it is an accusation: *assinus assinum fricat.*

Making the long story short, we find it useful to give a first-hand account of a case in which the older of the authors of this article has been a *dramatic persona*. For the sake of brevity let us call him Ivan. When he was an assistant, the head of the chair of analytical mechanics in the Faculty of Mathematics and Physics of the University of Sofia has been Professor Blagovest Dolaptchiev, composing at this time his text-book [55] on the subject. As the foreword to the first book of [55] displays, Ivan took part in the compilation of that part of the text-book which entitled *Elements of vector calculus*. We lay emphasis on this fact, since furth down some criticism is made on the manner the vectors are introduced in [55], a it is most important to be as clear as day that this criticism is, as a matter of fa a self-criticism.

As the foreword to [55] testifies, "as a result of discussions ... an axioma exposition of vector algebra has been adapted in this book". Not entering in details, let us remark that this exposition has the following distinguishing featur

First, it has been realized that *the mathematical nature of the vector concept purely algebraic*, though the heuristic genesis of this notion is purely geometric. (that, saying *vectors*, we bear in mind here *standard* vectors; the algebraic nature other kinds of vectors, as for instance, *linear, Euclidean, Hermitean* etc. has be well-known long ago.)

Second, it has been understood that the *most natural scheme* according which the standard vectors must be introduced has to follow the specification chai *groups* $\longrightarrow$ *linear spaces* $\longrightarrow$ *Euclidean spaces* $\longrightarrow$ *standard vector space* (thou the last term has not been used in the text-book [55]).

Third, it has been perceived that the *specification of an Euclidean space down to a standard vector space V must be accomplished by means of a fou operation* (vector multiplication) in E, introduced under the condition that it mu satisfy a certain number of specific for this operation axioms.

These specific axioms according to [55, p. 26] are:

Ax 14 D. $a,\ b \in V$ imply $a \times b = -(b \times a)$.

Ax 15 D. $\lambda \in R;\ a,\ b \in V$ imply $(\lambda a) \times b = \lambda(a \times b)$.

Ax 16 D. $a,\ b,\ c \in V$ imply $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$.

Ax 17 D. $a,\ b,\ c \in V$ imply $a \times b \cdot c = a \cdot b \times c$.

Ax 18 D. $a,\ b,\ c \in V$ imply $(a \times b) \times c = (ac)b - (bc)a$.

Moreover, it is supposed a priori that the Euclidean space E is n-dimension n being indeterminate for the present.

Now, the greatest defect in the axiomatic exposition of the vector algebra in [5 consists in the fact that the conditions Ax 14 D — Ax 16 D are needless. In oth words, they are superfluous, redundant, surplus, otiose, unnecessary, expendab — in the capacity of axioms we mean.

Why?

Because they are theorems. They are provable properties of the vector mul plication, demonstrable on the basis of the remaining adopted axioms.

Why did the authors of the vector algebra in [55] commit this error — include theorems in the capacity of axioms?

Very simply: they were not aware of the fact. They simply did not know th Ax 14 D — Ax 16 D are theorems rather than axioms. Even today the number the mathematicians who know this fact is microscopically small. *Nemo mortali omnibus horis sapit.*

Twenty years had to pass before the truth emerged. For the first time the pro of Ax 14 D — Ax 16 D was given in the article [56] containing at the same tir the most economical system of axioms for real standard vectors hitherto know

Furthermore, it turned out that this axiomatical definition works in much more general mathematical situations than the real case represents. In other words, the field R of all real numbers may be replaced by an arbitrary ordered field F. and the corresponding axioms, *mutatis mutandis* of course, still imply a consistent mathematical theory.

In order to make things crystal-clear we shall reproduce the corresponding axiomatical definition at full length.

A ***standard vector space over an ordered field F*** is called any set V_F, for which mappings

$$m_1 : V_F^2 \longrightarrow V_F \tag{3}$$

(*addition* in V_F),

$$m_2 : F \times V_F \longrightarrow V_F \tag{4}$$

(*multiplication* of the elements of F with the elements of V_F),

$$m_3 : V_F^2 \longrightarrow F \tag{5}$$

(*scalar multiplication* of the elements of V_F), and

$$m_4 : V_F^2 \longrightarrow V_F \tag{6}$$

(*vector multiplication* in V_F) are defined, so that, provided by definition,

$$a + b = m_1((a,\ b)) \tag{7}$$

(*sum* of a and b),

$$\alpha a = m_2((\alpha,\ a)) \tag{8}$$

(*product* of α and a),

$$ab = m_3((a,\ b)) \tag{9}$$

(*scalar product* of a and b),

$$a \times b = m_4((a,\ b)) \tag{10}$$

(*vector product* of a and b), and

$$a - b = a + (-b) \tag{11}$$

(*difference* of a and b). the following conditions are satisfied:

Ax 1 F. $a,\ b,\ c \in V_F$ imply $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Ax 2 F. There exists $o \in V_F$ with: $a \in V_F$ implies $a + o = a$.

Ax 3 F. $a \in V_F$ implies there exists $-a \in V_F$ with $a + (-a) = o$.

Ax 4 F. $\boldsymbol{a} \in V_F$ implies: $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$.

Ax 5 F. $\lambda, \mu \in F$, $\boldsymbol{a} \in V_F$ imply $(\lambda\mu)\boldsymbol{a} = \lambda(\mu\boldsymbol{a})$.

Ax 6 F. $\lambda, \mu \in F$, $\boldsymbol{a} \in V_F$ imply $(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$.

Ax 7 F. $\lambda \in F$; $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V_F$ imply $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$.

Ax 8 F. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V_F$ imply $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$.

Ax 9 F. $\lambda \in F$; $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V_F$ imply $(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{ab})$.

Ax 10 F. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V_F$ imply $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc}$.

Ax 11 F. $\boldsymbol{a} \in V_F$ implies $\boldsymbol{aa} \geqq 0$.

Ax 12 F. $\boldsymbol{a} \in V_F$, $\boldsymbol{aa} = 0$ imply $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$.

Ax 13 F. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V_F$ imply $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$.

Ax 14 F. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V_F$ imply $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{ac})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{bc})\boldsymbol{a}$.

Ax 15 F. There exist $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V_F$ with $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{o}$.

The elements of V_F are called *F-standard vectors.* The conditions Ax 1 F — Ax 15 F are called *axioms of a standard vector space over F*. The symbols 0 (Ax 11 F, Ax 12 F) and 1 (Ax 4 F) denote the *zero* and the *unit elements* of F respectively. The elements $\boldsymbol{o}$ (Ax 2 F, Ax 3 F, Ax 12 F, Ax 15 F) and $-\boldsymbol{a}$ (Ax 3 F) of V_F are called the *zero vector* and the *opposite vector* of $\boldsymbol{a}$ respectively. The scalar product $\boldsymbol{aa}$ is denoted, for the sake of brevity, by $\boldsymbol{a}^2$ and is called *scalar square* of $\boldsymbol{a}$.

The groups of axioms Ax 1 F — Ax 3 F, Ax 1 F — Ax 7 F, and Ax 1 F — Ax 12 F display that any standard vector space over an ordered field F is a *group*, a *linear space over F*, and an *Eucledean space over F* respectively. Hence the following proposition holds good.

Pr 1 F. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V_F$ imply $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$.

The following propositions are also proved [56]:

Pr 2 F. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V_F$ imply $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})$.

Pr 3 F. $\lambda \in F$; $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V_F$ imply $(\lambda\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$.

Pr 4 F. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V_F$ imply $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$.

(Let us note that Pr 2 F — Pr 4 F are analogues of Ax 14 D — Ax 16 D from [55] quoted above.)

By definition $V = V_R$ is called a *real standard vector space*, and its elements are called *real standard vectors*.

The following propositions hold:

Pr 5 F. The system of axioms Ax 1 F — Ax 15 F is consistent.

Pr 6 F. The system of axioms Ax 1 F — Ax 15 F is categorical.

Pr 7 F. Any standard vector space over an ordered field F is a 3-dimensional Euclidean space over F.

Pr 5 F is proved by the aid of a model of V_F constructed *ad hoc*. It is proposed by the Cartesian cube F^3 of F supplied with the following operations (corresponding to (3) — (6) respectively)

(12) $$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3),$$

(13) $$\lambda(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3),$$

(14) $$(x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3) = \sum_{\nu=1}^{3} x_\nu y_\nu,$$

(15) $$(x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3) = (x_2y_3 - x_3y_2,\ x_3y_1 - x_1y_3,\ x_1y_2 - x_2y_1)$$

for any $\lambda \in F$ and (x_1, x_2, x_3), $(y_1, y_2, y_3) \in F^3$. Now Ax 1 F — Ax 15 F are verified for the operations (12) — (15).

In the general case of any ordered field F the F-standard vectors are deprived of modules, since the *module* of $\boldsymbol{a} \in V_F$ is, by definition, the element $\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$ of F, and in the general case such an element does not necessarily exist. This flaw is corrigible, if one supposes that F is a *Pythagorean field.* An ordered field P is called so iff for any $\alpha \in P$ with $\alpha \geq 0$ there exists $\beta \in P$ with $\beta \geq 0$ and $\beta^2 = \alpha$. This β is called the *square root* of α. If P is a Pythagorean field and $\boldsymbol{a} \in V_P$, then the module of $\boldsymbol{a}$ is denoted by a or $|\boldsymbol{a}|$.

The question now quite naturally arises whether the above definition of standard vector spaces over ordered fields tolerates a complex generalization? As it is well-known, the system of axioms Ax 1 F — Ax 12 F (with $\boldsymbol{R}$ instead of F) permits such a generalization, and the result is called an *Hermitean space.* Now what about Ax 1 F — Ax 15 F?

Let us specify the above question: if H is an Hermitean space, then is it possible to define a fourth operation *vector multiplication* in H, satisfying the conditions Ax 13 F — Ax 15 F?

(Let us note that only Ax 13 F and Ax 14 F are *specific conditions* for the operation vector multiplication, whereas Ax 15 F only demands that this operation is *not a trivial one.* Indeed, if Ax 15 F is violated, then the vector multiplication would put into correspondence the zero-vector for any two vector multipliers: hardly somebody would be interested in such an operation.)

It is proved that the answer of this question is negative. In such a manner, at first sight one remains with the impression that the system of axioms Ax 1 F — Ax 15 F does not admit a complex analogue.

This conclusion is a premature one, though. Not everything is lost. A happy whim may save the situation. Indeed, in view of Ax 8 F the condition Ax 13 F may be reformulated in the following equivalent manner:

Ax 13 F bis. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V_F$ imply $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a}$.

Let us now reformulate the above question with Ax 13 F bis instead of Ax 13 F. If H is a Hermitean space, is it possible to define a fourth operation vector multiplication in H, satisfying the conditions Ax 13 F bis, Ax 14 F, and Ax 15 F (naturally with C instead of F)?

Strange though it may seem, this last question is answered already in the affirmative, as it is proved in the article [57]. The results are formulated immediately below.

If F is an ordered field, then the *complex extension* $C(F)$ of F is by definition the Cartesian square F^2 of F, supplied with the two operations addition (1) and multiplication (2) for any two elements (x_1, y_1) and (x_2, y_2) of F^2. After this remark, we are in a position to formulate the complex extension of Ax 1 F — Ax 15 F:

A *standard vector space over the complex extension* $C(F)$ *of an ordered field* F is called any set $V_{C(F)}$, for which mappings

$$(16) \qquad m_1 : V^2_{C(F)} \longrightarrow V_{C(F)}$$

(*addition* in $V_{C(F)}$),

$$(17) \qquad m_2 : C(F) \times V_{C(F)} \longrightarrow V_{C(F)}$$

(*multiplication* of the elements of $C(F)$ with the elements of $V_{C(F)}$),

$$(18) \qquad m_3 : V^2_{C(F)} \longrightarrow C(F)$$

(*scalar multiplication* of the elements of $V_{C(F)}$), and

$$(19) \qquad m_4 : V^2_{C(F)} \longrightarrow V_{C(F)}$$

(*vector multiplication* in $V_{C(F)}$) are defined, so that, provided (7) — (11), the following conditions are satisfied:

Ax 1 C(F). $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V_{C(F)}$ imply $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.
Ax 2 C(F). There exists $\boldsymbol{o} \in V_{C(F)}$ with: $\boldsymbol{a} \in V_{C(F)}$ implies $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{o} = \boldsymbol{a}$.
Ax 3 C(F). $\boldsymbol{a} \in V_{C(F)}$ implies: there exists $-\boldsymbol{a} \in V_{C(F)}$ with $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$.
Ax 4 C(F). $\boldsymbol{a} \in V_{C(F)}$ implies $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$.
Ax 5 C(F). $\lambda, \mu \in C(F)$, $\boldsymbol{a} \in V_{C(F)}$ imply $(\lambda\mu)\boldsymbol{a} = \lambda(\mu\boldsymbol{a})$.
Ax 6 C(F). $\lambda, \mu \in C(F)$, $\boldsymbol{a} \in V_{C(F)}$ imply $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.
Ax 7 C(F). $\lambda \in C(F)$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V_{C(F)}$ imply $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.
Ax 8 C(F). $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V_{C(F)}$ imply $\boldsymbol{ab} = \overline{\boldsymbol{ba}}$.
Ax 9 C(F). $\lambda \in C(F)$; $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V_{C(F)}$ imply $(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{ab})$.
Ax 10 C(F). $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V_{C(F)}$ imply $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{ac}+\boldsymbol{bc}$.
Ax 11 C(F). $\boldsymbol{a} \in V_{C(F)}$ implies $\boldsymbol{aa} \geqq 0$.
Ax 12 C(F). $\boldsymbol{a} \in V_{C(F)}$, $\boldsymbol{aa} = 0$ imply $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$.
Ax 13 C(F). $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V_{C(F)}$ imply $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a}$.
Ax 14 C(F). $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V_{C(F)}$ imply $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{ac})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{bc})\boldsymbol{a}$.
Ax 15 C(F). There exist $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V_{C(F)}$ with $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{o}$.

The elements of $V_{C(F)}$ are called $C(F)$-*standard vectors*. The conditions Ax 1 C(F) — Ax 15 C(F) are called *axioms of a standard vector space over* $C(F)$. The symbols 0 (Ax 11 C(F), Ax 12 C(F)) and 1 (Ax 4 C(F)) denote the *zero* and the *unit elements* of $C(F)$ respectively. The elements $\boldsymbol{o}$ (Ax 2 C(F), Ax 3 C(F), Ax 12 C(F), Ax 15 C(F)) and $-\boldsymbol{a}$ (Ax 3 C(F)) of $V_{C(F)}$ are called the *zero vector* and the *opposite vector* of $\boldsymbol{a}$ respectively. The scalar product $\boldsymbol{aa}$ is denoted, for the sake of brevity, by $\boldsymbol{a}^2$ and is called the *scalar square* of $\boldsymbol{a}$.

The groups of axioms Ax 1 C(F) — Ax 3 C(F), Ax 1 C(F) — Ax 7 C(F), and Ax 1 C(F) — Ax 12 C(F) display that any standard vector space over the complex extension $C(F)$ of an ordered field F is a *group*, a *linear space over* $C(F)$, ~~and~~

an *Hermitean space over* $C(F)$ respectively. Hence the following proposition holds good.

Pr 1 C(F). $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V_{C(F)}$ imply $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

The following propositions are also proved [57]:

Pr 2 C(F). $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V_{C(F)}$ imply $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})$.

Pr 3 C(F). $\lambda \in C(F)$; $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V_{C(F)}$ imply $(\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \overline{\lambda}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$.

Pr 4 C(F). $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V_{C(F)}$ imply $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$.

V_C is called a *complex standard vector space*, and its elements are called *complex standard vectors*.

The following propositions hold:

Pr 5 C(F). The system of axioms Ax 1 C(F) — Ax 15 C(F) is consistent.

Pr 6 C(F). The system of axioms Ax 1 C(F) — Ax 15 C(F) is categorical.

Pr 7 C(F). Any standard vector space over the complex extension $C(F)$ of an ordered field F is a 3-dimensional Hermitean space over $C(F)$.

Pr 5 C(F) is proved by means of a model of $V_{C(F)}$. It is proposed by the Cartesian cube $C(F)^3$ of $C(F)$, supplied with the operations (12), (13) and

$$(x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3) = \sum_{\nu=1}^{3} x_\nu \overline{y}_\nu, \tag{20}$$

$$(x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3) = (\overline{x}_2\overline{y}_3 - \overline{x}_3\overline{y}_2, \overline{x}_3\overline{y}_1 - \overline{x}_1\overline{y}_3, \overline{x}_1\overline{y}_2 - \overline{x}_2\overline{y}_1) \tag{21}$$

for any $\lambda \in C(F)$ and $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in C(F)^3$, corresponding to the mappings (16) — (19) respectively. It is easily verified that these operations in $C(F)^3$ satisfy the axioms Ax 1 C(F) — Ax 15 C(F).

In the general case of any ordered field F, the $C(F)$-standard vector are deprived of modules, since the module of $\boldsymbol{a} \in V_{C(F)}$ is, by definition, the element $\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$ of $C(F)$, and in the general case such an element does not necessarily exist. This flaw is corrigible, if one suppose that F is a Pythagorean field. If P is such and $\boldsymbol{a} \in V_{C(P)}$, then the module of $\boldsymbol{a}$ is denoted by a or $|\boldsymbol{a}|$.

A more detailed exposition of the algebras of V_F and $V_{C(F)}$ may be found in the popular booklet [58].

Finis: Et nunc, et semper, et in saecula saeculorum.

At the beginning of this article the following question has been put: What does *ab ovo* in analytical mechanics mean. Now this question may be answered quite categorically: *ab ovo* in analytical mechanics means the *deductive development* of this science *starting from standard vector spaces.*

Along with this affirmation, a specific formulation of Hilbert's sixth problem concerning the axiomatical consolidation of the logical foundations of analytical mechanics may be given, namely:

Starting from standard vector spaces, by the aid of specific definitions in them of the basic mechanical entities and of specific axioms concerning these entities, proceed to the construction of a mathematical theory of motion of mass-points and rigid bodies, and of the forces, which generate these motions and are generated by them.

This program may be qualified as a *program-minimum.* Indeed, after all, its realization means proceeding *in a model.* In other words, once this program settled, analytical mechanics will be shaped out of the elements of the standard vector spaces in question. Working in a model before inventing a genuine "pure" specific system of axioms is a classical mechanism, a time-honoured technique of all mathematical theories. The examples are plentiful — *nomen illis legio* — in order to adduce them here: we shall confine to the most typical. In 1872, if memory does not fail, Cantor and Dedekind independently proposed two theories of real numbers: Cantor's by means of an equivalence relation in the set of all Cantorian sequences of rational numbers, as already mentioned above; Dedekind's by the aid of Dedekindian sections in the field of all rational numbers. Both theories work in a model. Half a century had to pass, before the modern axiomatic definition of real numbers was invented. *Natura non facit saltus.* Mathematics too.

As regards a *program-maximum,* by the opinion of the authors of this paper based on the present state of affairs in analytical mechanics, to say even a word about it at all would mean to act prematurely and thoughtlessly.

Leaving programs-maximum whatever for the generations to come, let us fix our attention on the program-minimum just now formulated, and let us, first and foremost, put the following quite legitimate question: What has the problem *Lagrange or Euler*? to do with all this? Why should one connect Hilbert's sixth problem, on the one hand, with the question "Lagrange or Euler?", on the other hand.

The answer is a quite simple one.

First, because Lagrange has nothing to do with Hilbert's sixth problem.

Second, because without Euler Hilbert's sixth problem is condemned to remain a Gordian knot which will be undone by the mathematicians *cum mula peperit.*

Qui potest capere capiat. If somebody is not concordant with the first affirmation, then this is his problem: as Cicero says, *cujusvis hominis est errare, nullius, nisi insipientis, in errore perseverare.* As regards the second affirmation, its proof is a problem of the authors of the present article, as well as the main aim of the latter. As regarads the Lagrangeanists, let us remind them the following ancient words of consolation: *Temporis filia veritas.* Lagrange's times in mechanics are *tempi passati.*

Another not incurious question must be answered before proceeding further: Why should Hilbert's sixth problem be connected with such "chimeras", in a physicist's eyes at least, as complex standard vector spaces, over complex extensions of arbitrary ordered fields at that? Why not confine ourselves to the real standard vector space solely? After all, the natural phenomena of motion in this world are accomplished in such a physical space, which is interpreted mathematically most adequately namely by V, rather than by V_C or even by $V_{C(F)}$.

The answer of this question is given by Hilbert himself, in his *Mathematische Probleme*:

"Auch wird der Mathematiker, wie er es in der Geometrie getan hat, nicht bloß die der Wirklichkeit nahe kommenden, sondern überhaupt alle logisch möglichen Theorien zu berücksichtigen haben und stets darauf bedankt sein, einen vollständigen Überblick über die Gesamtheit der Folgerungen zu gewinnen, die das gerade angenommene Axiomensystem nach sich zieht."

"... wie er es in der Geometrie getan hat ..." What has the mathematician "in der Geometrie getan"?

Starting from the Euclidean geometry — a theory "der Wirklichkeit nahe kommende" — he has invented the non-Euclidean geometry of Lobatchevski — Bolyai — Gauss with its infinitely many parallels; the projective geometry in which any two lines in a plane are intersecting; the n-dimensional Euclidean geometries with an arbitrary n; the "finite" geometries the spaces of which consist of a finite number of points, lines, and planes. And so on, and so forth, etcetera.

Nicht bloß die der Wirklichkeit nahe kommenden, sondern überhaupt alle logisch möglichen Theorien zu berücksichtigen — the very essence of mathematics is incarnated in this device. Cantor gives expression of the same idea in other words: *das Wesen der Mathematik liegt eben in ihrer Freiheit.* Investigating all possible theories, the mathematician expands beyond measure the boundaries of both concepts and facts, reaching nec plus ultra borders, across which the notions become devoid of sense and the theorems untruthful.

For analytical mechanics, in particular, Hilbert's motto concerns mainly the following basic entities: the *geometry* of the mechanical space, the *forces* in statics and dynamics, the *motions*, and the most fundamental concept of *rigid bodies.* For the time being we shall confine ourselves to these remarks, postponing more circumstantial explanations till the mentioned notions are discussed elaborately.

Before we enter into details, let us bring to the fore, in connection with Hilbert's advice, one more circumstance, specific for analytical mechanics and especially important from an ideological point of view. Mechanics has always been under the action of strong centrifugal forces orientated in two different direction. The first of them is the physical tendency. There is hardly a man who has not heard sentences like "mechanics is the first chapter of physics". Not a few mathematicians sympathize with this outlook. It would be their problem, if it were not a problem of the mechanicians also. This point of view has caused damages beyond repair to rational mechanics, in general, and to analytical mechanics, in particular. The second is the engineering tendency. It is even worse than the physical one, for obvious reasons which we are in no mood to discuss here. In a few words, qualifications of the kind "mechanics is a physical science" and "mechanics is an engineering science" are by no means *rara avis in terris.*

We are in no humour for disputes about the nature of mechanics — whether it is physics or engineering — the more so that any debate of the kind is predestinated to become a dialog among stone-deaf. The problem is which mechanics? Experimental mechanics is physics, of course. Technical mechanics is engineering, O.K. But analytical mechanics? We beg your pardon.

Now an analytical mechanics in $V_{C(F)}$ is surely neither physics, nor engineering. Furthermore, such a perverted thing is beyond the mental constitution of any normal physicist and engineer. But such a thing exists — in a mathematician's head, at least. Indeed, all the basic entities of analytical mechanics, mentioned above — geometry, forces, motions, rigid bodies — may be defined and developed in $V_{C(F)}$. Moreover, the Newtonian and Eulerian dynamical axioms may be formulated in V_C at least. In such a manner, a complex analytical dynamics may be constructed, and its natural medium is the complex standard vector space V_C. Naturally, the classical real analytical mechanics (i.e. in V) is its particular case, in the sense that the real numbers are a particular case of the complex ones.

It would be ridiculous to waste time, efforts, and nerves on building-up a complex analytical mechanics only in order to stop the mouths of physicists and engineers who know better than the mechanicians what mechanics is. It would be all the same, as if Grassmann created his 1001-dimensional geometry in order to convince the geodesists that Euclidean geometry is not geodesy. The complex analytical mechanics is constructed, however, not *ad hoc* for physicists and engineers — it is a by-product in the process of realization of Hilbert's directive *nicht bloß die der Wirklichkeit nahe kommenden, sondern überhaupt alle logisch möglichen Theorien zu berücksichtigen.*

After this lyrical digression, let us return to our job.

The story begins with geometry. Above all things, let us make it pretty clear that analytical mechanics and synthetic geometry of Euclid pertain to different incompatible blood types. In order to avoid any possible *qui pro quo*, let us underline that the heuristic role of synthetic geometry for analytical mechanics is entirely out of the question: this role has been priceless in all the history of mechanics, and it will remain inestimable in the time to come. Synthetic geometry and analytical mechanics are conflicting as far as the process of logical consolidation of the latter is concerned.

Which are the reasons for these antagonistic relations?

The very nature of either of these mathematical theories. While synthetic geometry may be qualified as mathematics of *situs*, analytical mechanics is mathematics of *motus*. Although not impossible, it is, however, extremely difficult — clumsy, awkward, lubberly, unwiedly, gawky are the true words — to implant motion in synthetic-geometrical soil. As regards the mathematical description of motion, all fingers of synthetic geometry are thumbs. It is true that geometers use the term motion to describe certain geometrical operations; but in the same time it is also true that these operations are, as a matter of fact, only finite displacements. As a stimulant of mechanical intuition, as a promotive of mechanical discoveries, as visual illustrator of complicated abstract mechanical results — as all that synthetic geometry is out and out irreplaceable. As a witness of mechanical events, however, it is totally unreliable. While a great conqueror of new domains of mechanical knowledge, synthetic geometry is a poor legislator where the logical laws of analytical mechanics are concerned.

One thing must be unconditionally clear: synthetic geometry must be categorically, ruthlessly, and irretrievably expelled from analytical mechanics before the first steps towards the solution of Hilbert's sixth problem are taken. This dictum may seem *ratio ultima*; axiomatics, however, brooks no compromises. If one intends to attack Hilbert's sixth problem, he must once and for all forget not only everything he has ever learned in synthetic Euclidean geometry, but even the very word Euclid.

What then? Without geometry, analytical mechanics is flesh without skeleton. Where will the necessary geometry come from?

From the standard vector spaces. It exists there embryonically. It must be carried and born.

At that, rejecting the services of synthetic geometry as far as axiomatic processes are concerned, one is following a maxim as old as the hills and especially recommendable in such cases: *principia non sunt multiplicanda praeter necessitatem.*

Getting down to the forward delivery of the convenient geometry for analytical mechanics, let us remember something from synthetic geometry — since, as Landau [14] used to say, we have not yet forgotten it entirely. As it is well-known, in analytic geometry it is proved (by the aid of synthetic-geometrical considerations) that any line l has an equation of the kind

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}, \tag{22}$$

where $\boldsymbol{r}$ is a current radius-vector (the radius-vector of any point of l) and $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ are given vectors with

$$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}, \qquad \boldsymbol{ab} = 0. \tag{23}$$

At that, the equation (22) defines l unequivocally, but the inverse is not true: l has infinitely many equations of the kind (22), and any of them is obtainable from (22) by multiplying it with an appropriate real number

$$\lambda \neq 0. \tag{24}$$

In other words,

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{d} \tag{25}$$

is an equation of l if, and only if, there exists (24) with

$$\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{d}. \tag{26}$$

This fact once realized, the equation (22) becomes already needless: one may imagine a line l as the set of all ordered pairs $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ of vectors $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$ with (23), obtainable from one another by multiplication with arbitrary non-zero numbers λ according to (26).

Let us formalize these conclusions, regarding the set

$$\Lambda = \{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in V^2 : \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}, \ \boldsymbol{ab} = 0\} \tag{27}$$

of all ordered pairs $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ of real standard vectors $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$ with (23). Let us write

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \sim (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) \tag{28}$$

iff there exists a real λ with (24) and (26). It is easily seen that (28) is an equivalence relation in the set (27). Now any equivalence class in Λ, generated by the relation (28), may be called a *line*.

Similarly, any plane p has an equation of the kind

$$rc = \alpha, \tag{29}$$

where c is a given vector with

$$c \neq o \tag{30}$$

and α is a given real number. Now all the above considerations may be repeated with (29) instead of (22). Formalizing the corresponding conclusions, one arrives at the set

$$\Pi = \{(c,\ \alpha) \in V \times R : c \neq o\} \tag{31}$$

of all ordered pairs $(c,\ \alpha)$ of a real standard vector c with (30) and a real number α. Let us write

$$(c,\ \alpha) \sim (d,\ \beta) \tag{32}$$

iff there exists a real λ with (24) and

$$c = \lambda d, \quad \alpha = \lambda\beta. \tag{33}$$

It is easily seen again that (32) is an equivalence relation in the set (31). Now any equivalence class in Π, generated by the relation (32), may be called a *plane*.

What of it?

Neither more nor less than the fact that in such a manner the linear analytic geometry (the analytic geometry of points, lines, and planes) can be constructed axiomatically without whatever appeal to synthetic geometry — as if it does not exist at all. (It exists, of course, and moreover, it suggests what to do next in order to obtain, in analytical form, naturally, namely the synthetic Euclidean geometry and not some of its distant relatives.) The manner this end can be achieved pedantically is displayed in the article [59]; therefore we shall refrain here from any technicalities whatever. Let us note in passing that in such a way the linear analytical geometry becomes wholly emancipated from synthetic Euclidean geometry.

There are, however, some remarks to be made in this connection, which are a matter of principle.

In the first place, the definitions of lines and planes as equivalence classes in Λ and Π respectively are somewhat ungainly. This can be avoided in the following manner. (Let us note that the scheme exposed below is not specific for Λ and Π. It is applicable every time when new mathematical objects are defined as equivalence classes in appropriate set of beforehand defined objects supplied with suitable equivalence relations.)

Let the set A be supplied with an equivalence relation $\sim$ and let B and C be primary sets (i.e. unknown sets of unknown objects which only now will have to be defined implicitly), satisfying the following conditions:

Ax 1 S. $C \subset A \times B$.

Ax 2 S. $\alpha \in A$ implies: there exists $\beta \in B$ with $(\alpha, \beta) \in C$.

Ax 3 S. $(\alpha_\nu, \beta_\nu) \in C$ $(\nu = 1, 2)$, $\alpha_1 \sim \alpha_2$ imply $\beta_1 = \beta_2$.

Ax 4 S. $\beta \in B$ implies: there exists $\alpha \in A$ with $(\alpha, \beta) \in C$.

Ax 5 S. $(\alpha_\nu, \beta) \in C$ $(\nu = 1, 2)$ imply $\alpha_1 \sim \alpha_2$.

It is proved that the system axioms Ax 1 S — Ax 5 S is consistent and categorical, see [60]. This system is called the model-axiomatizing scheme and it proposes an axiomatic definition of the equivalence class concept. As a matter of fact, Ax 1 S — Ax 5 S define implicitly the elements of the set B, and the set C establishes a correspondence between the elements of A and B.

If one puts $A = \Lambda$ in Ax 1 S — Ax 5 S, then B is the set of all lines. Similarly, B is the set of all planes provided $A = \Pi$.

The only difference between the definitions by means of equivalence classes, on the one hand, and by the aid of the model-axiomatizing scheme, on the other hand, consists in the fact that the latter is not so categorical as the first one. Indeed, in the case of lines, for instance, a line is an equivalence class in Λ generated by the equivalence relation (28) provided (26) and nothing else, whereas Ax 1 S — Ax 5 S with $A = \Lambda$ define the lines not so unambiguously.

Let us, for the sake of brevity, write $\alpha \& \beta$ iff $(\alpha, \beta) \in C$; in such a case α is called *associated* with β, and β is called *determined* by α. Under this notation Ax 2 S — Ax 5 S may be written in the equivalent form:

Ax 2*. $\alpha \in A$ implies: there exists $\beta \in B$ with $\alpha \& \beta$.

Ax 3*. $\alpha_\nu \& \beta_\nu$ $(\nu = 1, 2)$, $\alpha_1 \sim \alpha_2$ imply $\beta_1 = \beta_2$.

Ax 4*. $\beta \in B$ implies: there exists $\alpha \in A$ with $\alpha \& \beta$.

Ax 5*. $\alpha_\nu \& \beta$ $(\nu = 1, 2)$ imply $\alpha_1 \sim \alpha_2$.

After these remarks, let us say some words more about the above definitions of lines and planes.

It is immediately seen that one can substitude F and V_F for R and V respectively in the definitions (27) and (31), and these definitions still work. In such a manner one obtains not one, but infinitely many linear analytical geometries, one for every F. Since the algebras of V and V_F are identical (as far as continuity is not concerned), these analytic geometries are very similar among themselves.

Not so obvious is the fact that one can also substitute $C(F)$ and $V_{C(F)}$ for R and V respectively in the definitions (27) and (31) without turning them meaningless. We shall proceed now to the effective execution of such an exchange.

Instead of (27) and (31) let us consider the sets

$$\Lambda_{C(F)} = \{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in V^2_{C(F)} : \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}, \ \boldsymbol{ab} = 0\} \tag{34}$$

and

$$\Pi_{C(F)} = \{(\boldsymbol{c}, \alpha) \in V_{C(F)} \times C(F) : \boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{o}\} \tag{35}$$

respectively and let by definition

$$(a_1,\ b_1) \sim (a_2,\ b_2) \tag{36}$$

and

$$(c_1,\ \alpha_1) \sim (c_2,\ \alpha_2) \tag{37}$$

for any $(a_\nu,\ b_\nu) \in \Lambda_{C(F)}$, $(c_\nu,\ \alpha_\nu) \in \Pi_{C(F)}$ $(\nu = 1,\ 2)$ iff there exists $\lambda \in C(F)$ with (24) and

$$a_1 = \lambda a_2, \quad b_1 = \overline{\lambda} b_2, \tag{38}$$

$$c_1 = \lambda c_2, \quad \alpha_1 = \overline{\lambda} \alpha_2 \tag{39}$$

respectively, $\overline{\lambda}$ denoting the conjugate element of λ. It is easily seen that (36) and (37) are equivalence relations in (34) and (35) respectively.

Let us now apply the model-axiomatizing scheme to the sets (34) and (35), in other words with $A = \Lambda_{C(F)}$ and $A = \Pi_{C(F)}$ respectively, denoting B with $L_{C(F)}$ in the first case and with $P_{C(F)}$ in the second. Using the &-version of Ax 2 S — Ax 5 S, i.e. Ax 2* — Ax 5*, we obtain the following two systems of conditions:

Ax 2 L. $(a,\ b) \in \Lambda_{C(F)}$ implies: there exists $l \in L_{C(F)}$ with $(a,\ b)\&l$.

Ax 3 L. $(a_\nu,\ b_\nu)\&l_\nu$ $(\nu = 1,\ 2)$, $(a_1,\ b_1) \sim (a_2,\ b_2)$ imply $l_1 = l_2$.

Ax 4 L. $l \in L_{C(F)}$ implies: there exists $(a,\ b) \in \Lambda_{C(F)}$ with $(a,\ b)\&l$.

Ax 5 L. $(a_\nu,\ b_\nu)\&l$ $(\nu = 1,\ 2)$ imply $(a_1,\ b_1) \sim (a_2,\ b_2)$

and

Ax 2 P. $(c,\ \alpha) \in \Pi_{C(F)}$ implies: there exists $p \in P_{C(F)}$ with $(c,\ \alpha)\&p$.

Ax 3 P. $(c_\nu,\ \alpha_\nu)\&p_\nu$ $(\nu = 1,\ 2)$, $(c_1,\ \alpha_1) \sim (c_2,\ \alpha_2)$ imply $p_1 = p_2$.

Ax 4 P. $p \in P_{C(F)}$ implies: there exists $(c,\ \alpha) \in \Pi_{C(F)}$ with $(c,\ \alpha)\&p$.

Ax 5 P. $(c_\nu,\ \alpha_\nu)\&p$ $(\nu = 1,\ 2)$ imply $(c_1,\ \alpha_1) \sim (c_2,\ \alpha_2)$.

Then the elements of $L_{C(F)}$ and $P_{C(F)}$ are called *$C(F)$-lines* and *$C(F)$-planes* respectively, and the mathematical theory, based on Ax 2 L — Ax 5 L and Ax 2 P — Ax 5 P, as well on the specific properties of the equivalence relations (36) and (37) in the sets (34) and (35) respectively, is called the *$C(F)$-linear analytic geometry* and is denoted by $G_{C(F)}$. The development of $G_{C(F)}$ consists in revealing those properties of the elements of the sets (34) and (35), which are invariant with respect to the equivalence relations (36) and (37) respectively. The basic definitions and propositions of $G_{C(F)}$ are exposed pedantically in the article [61], so that we shall not dwell here on any technicalities in this connection. Two remarks are, however, expedient.

First, we shall concent to take the "real" F-case for immersed in the "complex" $C(F)$-case in the same way, as the real numbers are considered as dispersed among the complex ones, i.e. $R \subset C$. In other words, we shall agree to perceive F as a subfield of $C(F)$, i.e. $F \subset C(F)$, and similarly to graps V_F as a standard vector subspace of $V_{C(F)}$, i.e. $V_F \subset V_{C(F)}$. In other words, we shall think that V_F is obtainable from $V_{C(F)}$ by putting $\overline{\alpha} = \alpha$ for any $\alpha \in C(F)$ in the corresponding axioms of $V_{C(F)}$ (in Ax 8 C(F) in the first place). We shall not discuss the logical side of such an agreement, emphasizing here on the technical advantages: important in the moment for us is the fact that such a convention is very suitable and economizing. It saves us, for instance, the necessity to define explicitly the F-linear analytic geometry G_F, i.e. by means of Ax 2 L — Ax 5 L and Ax 2 P — Ax 5 P with F and V_F instead of $C(F)$ and $V_{C(F)}$ respectively. We shall accept that $G_F \subset G_{C(F)}$, if the notation has any sense.

The second remark concerns the relations between G_F and $G_{C(F)}$. Strange though it may seem, these geometries are rather similar, though naturally not identical. There are differences on principle, it is true. In any case, there do not exist isotropic lines and planes in $G_{C(F)}$, and this question deserves a closer discussion.

The point is that $G_{C(F)}$, or rather G_C, is not the single complex analytic geometry up to now proposed. Another version may be found, for instance, in the text-book [62] of B. Petkanchin. It is erected by means of the following constructions. Let P_C be the Cartesian cube C^3 of the field C of the complex numbers, supplied with the four operations (12) — (15) for any $\lambda \in C$ and for any (x_1, x_2, x_3), $(y_1, y_2, y_3) \in C^3$. It is proved that they satisfy Ax 1 F — Ax 10 F, Ax 13 F — Ax 15 F and Pr 1 F — Pr 4 F (with C and P_C instead of F and V_F respectively), while the statements of Ax 11 F and Ax 12 F (again with C and P_C instead of F and V_F respectively) are, in the general case, violated. Then a complex analytic geometry in the "space" P_C may be constructed that has nothing to do with G_C: the existence of isotropic lines and planes is the main if exotic characteristic features of this geometry, and the roots of this phenomenon penetrate the ruins of the said violated axioms.

(Let us note, parenthetically, that these inferences have far -reaching sequels in differential geometry. The same complex analytic geometry in P_C is used by the author of [62] in his text-book [63] on differential geometry. In the foreword of [63] one reads:

"Почти всички въпроси са разгледани в к о м п л е к с н о т о пространство. Обикновено третирането на въпросите е еднакво в реалното и в комплексното пространство, тъй като изходните положения са едни и същи. Различия се явяват понякога само в доказването на тези изходни положения. Но има и геометрични обекти, възможни с а м о в комплексното пространство, каквито са например изотропните криви. Теорията на тези криви е изложена тук с пълнота, каквато рядко се среща в книги от подобен род..."

In the introduction of the book one reads:

"В цялото следващо изложение ще разглеждаме обикновено геометрични фигури, разположени в к о м п л е к с н о т о триизмерно Евклидово пространство E_c, така че ще имаме работа с комплексни точки, прави, равнини, вектори, координатни системи и пр. Само при някои въпроси ще се ограничаваме, което ще споменаваме изрично, на фигури в реалното триизмерно Евклидово пространство E_r, което е част от E_c; тогава ще имаме пред вид само реални точки, прави, равнини, вектори, координатни системи и т.н. и ще казваме, че работим "в E_r" или "в реалния случай". Обаче от методични съображения много въпроси отначало ще бъдат третирани в E_r и след това разглежданията ще бъдат обобщавани и разширявани за E_c."

As these texts imply, the mathematical philosophy of [63] is the following one. By definition $E_r = R^3$; points and vectors are defined as elements of E_r. The analytic and differential geometries in E_r are well-known long ago. Now all the paraphernalia of these geometries are formally transplanted in E_C, provided by definition $E_c = C^3$, supplied with the operations (12) — (15) (i.e., as a matter of fact, E_c of [63] is what above has been denoted by P_C: we have good grounds to avoid the notation E_c). All these manipulations are entirely different from those by means of which G_C is constructed.

If now G_C, rather than the analytic geometry from [62], is put in the groundwork of a complex differential geometry Γ_C, the latter will be entirely different from the hybrid proposed in [63].)

A most interesting problem now arises. As it is well-known, along with the arithmetical model of V, realized by the aid of the operations (12) — (15) in R^3, there exists a geometrical model too, realized by synthetic-geometrical means. To be more specific, let P be the set of all Euclidean points (i.e. points of the synthetic Euclidean geometry) and let a relation $\sim$ be introduced in the Cartesian square P^2 of P, defined in the following manner: if $(A_\nu,\ B_\nu) \in P^2$ $(\nu = 1,\ 2)$, then by definition

$$(A_1,\ B_1) \sim (A_2,\ B_2), \tag{40}$$

iff the following conditions are satisfied:

1. $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$, or $A_1 \neq B_1$, $A_2 \neq B_2$ and the line A_1B_1 is *parallel* to the line A_2B_2.

2. If $A_1 \neq B_1$, $A_2 \neq B_2$, then the segments A_1B_1, A_2B_2 have the *same directions.*

3. If $A_1 \neq B_1$, $A_2 \neq B_2$, then the segments A_1B_1, A_2B_2 have the *same lengths.*

It is obvious that (40) is an equivalence relation in P^2. Now any equivalence class in P^2, generated by (40), is by definition a *real standard vector.*

In order that this denomination gets justified, definitions of operations *addition* of vectors, *multiplication* of real numbers with vectors, *scalar* and *vector multiplications* of vectors are given, and it is proved that these operations satisfy Ax 1 F — Ax 15 F (with R and V instead of F and V_F respectively). *Quod erat agendum.*

For the sake of brevity, let $G = G_R$ and let E denote the synthetic Euclidean geometry constructed axiomatically by the aid of the system of axioms S_H proposed to this end by Hilbert in his famous work [16]. The following bilateral mathematical process may now be realized.

On the one hand, one can model E in G. In other words, one can select appropriate entities in G, call them "points", "lines", "planes", etc., and prove that the axioms of S_H are satisfied under these definitions.

On the other hand, one can model G in E. Since G is constructed by means of real standard vectors, the meaning of this statement is that one can model them in E, as indicated above.

And that is all. In such a manner it is proved that there is no essential difference between E and G. All the difference consists in technicalitites, if one may say so.

So much about G. What about G_C?

The trouble is that, as far as our knowledge goes, we do not yet dispose of such a geometry — let us, hypothetically, call it E_C — that the relations between E and G described above could be imitated with E_C and G_C instead.

In other words, the geometers have not yet invented such a (hypothetical again) complex synthetic (Hermitean rather than Euclidean) geometry that should have G_C for its analytical equivalent.

Putting it another way, no complex variant of Hilbert's *Axiomensystem* S_H is up to now proposed — such at that, that the corresponding complex synthetic geometry E_C could model G_C and, inversely, could be modelled by G_C.

The solution of this *Problemata novum, ad cuius solutionem geometrici invitantur* (as Johann Bernoulli announced his problem in *Acta eruditorum*: determine that smooth curve in a vertical plane, connecting two points A and B in it, along which a heavy mass-point must move in order to arrive at B, starting from A, for the shortest time) may be facilitated in virtue of the following observation.

First, the analytic version G_C of E_C exists. Otherwise, E_C is, in a sense, familiar. The task consists, then, in discovering such complex analogues of the axioms of S_H, which could imply G_C synthetically.

Second, taking into consideration the mathematical structures of G and G_C, one could select those axioms of S_H that will remain authoritative for E_C too. As it is well-known, Hilbert divided the axioms of the Euclidean geometry into five groups:

"Die Axiomgruppe I: *Axiome der Verknüpfung.*

Die Axiomgruppe II: *Axiome der Anordnung.*

Die Axiomgruppe III: *Axiome der Kongruenz.*

Die Axiomgruppe IV: *Axiom der Parallelen.*

Die Axiomgruppe V: *Axiome der Stetigkeit*" [16, S. V; our italics].

Now everybody who is familiar with Hilbert's geometrical axiomatics [16] and with the analytic geometries in complex standard vector spaces [61] will ascertain that all Hilbert's axioms listed above must remain true for E_C, with the only exception of *die Axiomgruppe II.*

Indeed, substituting in G the field C of the complex numbers for the field R of the real numbers in order to obtain G_C, one dispenses with *Anordnung* since C, in contrast to R, is deprived of such an attribute. The situation here is very similar with that of complex analysis in comparison with the real one: the true in. the real analysis theorem, according to which if $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = l$ exists and if $x_n < z_n < y_n$ $(n = 1, 2, \dots)$, then $\lim_{n\to\infty} z_n$ also exists and is equal to l, becomes not only untrue, but even meaningless in the complex case, since the inequalities $x_n < z_n < y_n$ are now devoid of sense.

Let us also note that, as regards the *Axiome der Stetigkeit*, they remain true for G_C, but must be reformulated or rejected at all, if one desires to construct axiomatically $G_{C(F)}$ with an arbitrary F rather than G_C.

All these problems belong to the future. As already mentioned, the solution of the formulated above *Problemata novum, ad cuius solutionem Geometrici invitantur* is still *in-cunabula*. The complex analogue Σ_H of S_H once settled, G_C will propose a second, geometrical this time, model of V_C (and possibly of $V_{C(F)}$), along with the arithmetical one, proposed by C^3 together with the operations (12), (13) and (20), (21) in it.

That much about the interplay of analytical mechanics and geometry. In which manner the real and complex analytic geometries may be used in analytical mechanics in order to supply it with motions, rigid bodies, and forces — all this will be manifested later. Before we undertake the next step, let us make a brief summing-up.

Starting from the algebraic notions of ordered fields, in general, and of the fields of the real and complex numbers, in particular, we defined axiomatically V_F and $V_{C(F)}$, in general, and V and V_C, in particular. Then we proceeded to analytic geometries G_C and $G_{C(F)}$ in V_F and $V_{C(F)}$ respectively. What now lies ahead is a good algebraic theory of arrows.

Sliding vectors (*vecteurs glissants, gleitende Vektoren, скользящие векторы*) are no vectors at all, as it will be seen immediately below. Their genesis is a purely physical one. They have been destined to describe mathematically forces acting on mass-points and rigid bodies, and it is worth noting that they did their duty with merit deserving the highest praise.

Very much nonsense has been written in the philosophical, physical, and even mathematical literature in connection with the "meaning", "nature", or "essence" of forces: stupidity is unforbiddable. As a matter of fact, a mathematician is interested not in "what a mathematical object is?" (this question is void of sense), but in "how to describe it mathematically?". Making a long story short, let us pronounce the final verdict: in analytical mechanics forces are described mathematically by arrows. Now what does an "arrow" mean?

We must begin from afar.

Let us first see, in a book chosen at random, how are sliding vectors traditionally introduced in the mathematical literature:

"Дадим поэтому следующее определение:

Вектором называется величина, характеризующаяся, помимо измеряющего ее в определенных единицах меры числа, еще своим направлением в пространстве ...

Отметим, что различают векторы трех родов: с в о б о д н ы е, п е р е д в и ж н ы е [sliding vectors] и о п р е д е л е н н ы е в е к т о р ы. Введенные нами векторы относятся к типу свободных, так как точку их приложения можно выбирать по произволу. У передвижных векторов точку приложения вектора можно перемещать произвольно вдоль самого вектора, так что последный может лежать на любой части определенной прямой. Примером передвижного вектора является сила, приложенная к твердому телу, так как за точку приложения силы можно взять любую точку на линии действия силы. Наконец, у определенных векторов точка приложения вектора должна быть зафиксирована. Так, например, при рассмотрении движения жидкости за точку приложения силы, действующей на какую-либо частицу жидкости, принимается некоторая точка самой частицы.

Изучение передвижных и определенных векторов сводится к изучению свободных векторов, почему достаточно ограничиться рассмотрением только последных."

This citation is taken from the ninth edition [64, стр. 6 – 7] of a treatise especially dedicated to vector calculus and it inevitably reminds the estimation "so muß jeder Vernünftige erkennen, daß damit soviel als nichts gesagt ist" of v. Mises. The book [64] makes no unhappy exception. The same fate haunts the sliding vectors in the hands of almost any author of a book on vector calculus or theoretical mechanics. The situation reminds the legend of the destroying of the Alexandrian Library. Someone of the priesthood allegedly has said: "If these books are in concordance with the Alcoran (or the Bible, no matter), then they are redundant; if they contradict it, then they are harmful." In the same way, definitions of the kind quoted above are needless if the reader already knows what does a sliding vector mean; if he does not, then they are wholly futile.

Turning back to the already cited text-book [55] let us note, as a kind of self-criticism, that at the time when it was written, neither its author, nor the elder of the authors of this article, knew how the sliding vectors must be defined most properly. Because of that reason the exposition of the theory of sliding vectors in [55], as well as in the second edition [65] of the book, seems today unsatisfactory. In both edition about 50 pages are assigned to sliding vectors. The main reason for such a prodigality is rooted in the fact that the exposition is, in essence, synthetic-geometrical.

Let us discuss this problem in some details.

The intuitive idea, incarnated in the original notion of a sliding vectors, consists in the simultaneous perception of two different mathematical objects, genetically united in an indivisible whole. These objects are a line l and a vector s, lying on l or at least parellel to it. Conceptually, this idea is connected with the image of a *force* acting on a rigid body. The line l interprets mathematically the *line of action* or the *directrix* of the force, and the vector s its *magnitude*. In older treatises on mechanics this mental picture is materialized in a pleasant if naive way by illustrations: l is portrayed in the form of a stretched string, while s in pictured as a man's hand pulling the string.

Many years ago an attempt (none too felicitous) was made to formalize mathematically these intuitive ideas. In the article [66] a sliding vector is defined, in plain words, as an ordered pair (s, l) of a vector s and a line l parallel to s; this definition works, but works rather arduously.

It turns out, however, that this definition may be reformulated in a most profitable way. Let us write down an equation of the line l: since it is parellel to s, there certainly exists a vector m, so that one of the equations of l (there are infinitely many, as we know) reads:

$$r \times s = m. \tag{41}$$

At that, obviously

$$s \neq o, \quad sm = 0. \tag{42}$$

This settled, let us regard the ordered pair $(s,\ m)$ with (42) instead of tl ordered pair $(s,\ l)$. Both pairs are equivalent in the following sense: if $(s,\ m)$ given, then l is given too through its equation (41), hence $(s,\ l)$ is known; inversel if $(s,\ l)$ is given, then m is given through (41), hence $(s,\ m)$ is known.

These observations lead to the following alternative definition of a sliding ve tor: so is called any ordered pair

$$\vec{s} = (s,\ m), \tag{43}$$

of real standard vectors s, m, satisfying (42). For the same reason for which tl number zero is introduced, this definition is supplemented with that of the *ze sliding vector*

$$\vec{o} = (o,\ o) \tag{44}$$

while (43) with (42) are called *non-zero sliding vectors.*

A developed algebraic theory of sliding vectors based on the definitions (4 and (43) with (42) is proposed in the article [67].

Before proceeding further, let us underline an important act of the author [55].

As it is completely clear from the definitions (43) and (44), a sliding vecto zero or non-zero, is no vector at all: it is a pair of vectors. That is why tl term "sliding vector" is extremely inadequate, being psychologically misleading - a crying inexpedience. Obviously, a new term must be invented. After some di cussions, the author of [55] decided to substitute the term *arrow* for the tradition *sliding vector*, and nowadays, through the text-book [55], it enjoys popularity, this country at least.

(Forces being interpreted by means of arrows, do not believe an author of book on theoretical mechanics who states that "forces are vectors": he is misleadi you.)

The definitions (44) and (43) with (42) are, however, by no means necessari connected with the real standard vector space V. Obviously, the idea to substitu V_F and even $V_{C(F)}$ for V in these definitions is quite natural and rather temptin In result one ontains not a single, but infinitely many algebraic theories of arrov — one for any F both in V_F and $V_{C(F)}$. It is natural to call the arrows of tl first kind *real*, and those of the second kind *complex* ones. We shall sketch nc the general contours of such a theory, working, for the sake of generality, in tl complex case of $V_{C(F)}$, the real one being obtainable automatically by virtue of tl agreement to accept the inclusion $V_F \subset V_{C(F)}$.

Let by definition

$$(45)\qquad A_{C(F)} = \{(s,\ m) \in V^2_{C(F)} :\ s \neq o,\ sm = 0 \vee s = m = o\}.$$

The elements of $A_{C(F)}$ are called $C(F)$-arrows (or simply arrows, for the sake of brevity). If

$$(46)\qquad (s,\ m) \in A_{C(F)},$$

then s and m are called the *basis* and the *moment* of $\vec{s}$ respectively, provided (43).

The definitions (34) and (45) imply the inclusion

$$(47)\qquad \Lambda_{C(F)} \subset A_{C(F)}.$$

If

$$(48)\qquad \vec{s} \in \Lambda_{C(F)},$$

then $\vec{s}$ is called a *non-zero arrow*. The arrow $\vec{o}$ defined by (44) is called the *zero-arrow*.

If (48), then there exists exactly one $l \in L_{C(F)}$ with $\vec{s}\&l$. The line l is called the *directrix* of $\vec{s}$ and is denoted by dir $\vec{s}$. In such a manner, if (48), then

$$(49)\qquad \vec{s}\ \&\ \mathrm{dir}\ \vec{s}.$$

If

$$(50)\qquad r \in V_{C(F)},$$

$$(51)\qquad \vec{s} \in A_{C(F)},$$

and (43), then the vector defined by

$$(52)\qquad \mathrm{mom}_r \vec{s} = m + s \times r$$

is called the r-*moment* of $\vec{s}$, and r is called the *pole* of $\mathrm{mom}_r\ \vec{s}$. Obviously, (51) and (43) imply

$$(53)\qquad m = \mathrm{mom}_o \vec{s}.$$

Besides

$$(54)\qquad \mathrm{mom}_r \vec{o} = o$$

for any pole r.

If (50) and

$$l \in L_{C(F)}, \tag{55}$$

$$(a,\ b)\ \&\ l, \tag{56}$$

then r is called *incident* with l iff (22). In such a case it is written

$$r\ \mathsf{Z}\ l. \tag{57}$$

In case (57) in violated, r is called *non-incident* with l. In such a case it is written $r\ \overline{\mathsf{Z}}\ l$.

Let

$$\bar{\rho} \in V_{C(F)}, \tag{58}$$

$$\bar{\rho}\ \mathsf{Z}\ \mathrm{dir}\ \vec{s}. \tag{59}$$

Then (51), (43), (58), (59), and the definition of the relation (57) imply

$$\bar{\rho} \times s = m. \tag{60}$$

Now (50), (60), and (52) imply

$$(\bar{\rho} - r) \times s = \bar{\rho} \times s + s \times r = m + s \times r = \mathrm{mom}_r \vec{s}. \tag{61}$$

Most of the text-books on theoretical mechanics define $\mathrm{mom}_r \vec{s}$ by the expression in the left-hand side of (61). The definition (52), however, is preferable, since it possesses the most important for a mathematical definition characteristic of economy.

If (51), (43),

$$r_\nu \in V_{C(F)} \qquad (\nu = 1,\ 2), \tag{62}$$

then (52) implies

$$\mathrm{mom}_{r_1} \vec{s} - \mathrm{mom}_{r_2} \vec{s} = s \times (r_1 - r_2). \tag{63}$$

The relation (63) is called the *connection* between the moments of an arrow with respect to the poles (62). It implies

$$s \cdot \mathrm{mom}_{r_1} \vec{s} = s \cdot \mathrm{mom}_{r_2} \vec{s}. \tag{64}$$

The relation (64) is, however, trivial, since both its sides are a priori zeroes: (52) and (42) imply

$$s \cdot \mathrm{mom}_r \vec{s} = 0 \tag{65}$$

for any pole (50). The relation

$$(66)\qquad (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \cdot \mathrm{mom}_{\boldsymbol{r}_1} \vec{s} = (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \cdot \mathrm{mom}_{\boldsymbol{r}_2} \vec{s}$$

implied by (63) is, however, non-trivial, except when $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_2$.

The *sum* of the arrows

$$(67)\qquad \vec{s}_\nu \in A_{C(F)} \qquad (\nu = 1,\ 2),$$

defined by

$$(68)\qquad \vec{s}_1 + \vec{s}_2 = (\boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s}_2,\ \boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2)$$

provided

$$(69)\qquad \vec{s}_\nu = (\boldsymbol{s}_\nu,\ \boldsymbol{m}_\nu) \qquad (\nu = 1,\ 2),$$

does not necessarily exist: the right-hand side of (68) belongs to $A_{C(F)}$ if, and only if,

$$(70)\qquad \boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s}_2 = \boldsymbol{o}, \quad \boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2 = \boldsymbol{o}$$

or

$$(71)\qquad \boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s}_2 \neq 0, \quad (\boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s}_2)(\boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2) = 0.$$

The arrow

$$(72)\qquad -\vec{s} = (-\boldsymbol{s},\ -\boldsymbol{m})$$

provided (51), (43) is called the *opposite* of $\vec{s}$. On the other hand, (67), (69), and (45) imply

$$(73)\qquad \boldsymbol{s}_\nu \boldsymbol{m}_\nu = 0 \qquad (\nu = 1,\ 2).$$

Now (73) imply that (71) are equivalent to

$$(74)\qquad \boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s}_2 \neq \boldsymbol{o}, \quad \boldsymbol{s}_1 \boldsymbol{m}_2 + \boldsymbol{s}_2 \boldsymbol{m}_1 = 0.$$

In such a manner, the sum (68) of the arrows (69) exists if, and only if, $\vec{s}_2 = -\vec{s}_1$ or (74) holds good. Hence, the set (45) of all $C(F)$-arrows is a system with partially defined addition.

Let us pass over to *systems* of arrows. By this term in analytical mechanics finite sets

$$(75)\qquad \underset{\rightarrow}{s} = \{\vec{s}_\nu\}_{\nu=1}^{n}$$

of arrows

$$(76)\qquad \vec{s}_\nu \in A_{C(F)} \qquad (\nu = 1, \dots, n)$$

are understood. Let

$$(77)\qquad \vec{s}_\nu = (\boldsymbol{s}_\nu, \boldsymbol{m}_\nu) \qquad (\nu = 1, \dots, n).$$

Then the sums

$$(78)\qquad \boldsymbol{s} = \sum_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{s}_\nu, \quad \boldsymbol{m} = \sum_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{m}_\nu$$

are called the *basis* and the *moment* of $\underset{\rightarrow}{s}$ respectively.

If (50), then the vector defined by

$$(79)\qquad \operatorname{mom}_{\boldsymbol{r}} \underset{\rightarrow}{s} = \boldsymbol{m} + \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}$$

is called the *moment* of the system of arrows $\underset{\rightarrow}{s}$ with respect to $\boldsymbol{r}$, and $\boldsymbol{r}$ is called the *pole* of $\operatorname{mom}_{\boldsymbol{r}} \underset{\rightarrow}{s}$. The analogy between the definitions (52) and (79) is obvious. Evidently,

$$(80)\qquad \boldsymbol{m} = \operatorname{mom}_{o} \underset{\rightarrow}{s},$$

similar to (53). The relations (78), (79), and (52) imply

$$(81)\qquad \begin{aligned} \operatorname{mom}_{\boldsymbol{r}} \underset{\rightarrow}{s} &= \sum_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{m}_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{s}_\nu \times \boldsymbol{r} \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} (\boldsymbol{m}_\nu + \boldsymbol{s}_\nu \times \boldsymbol{r}) = \sum_{\nu=1}^{n} \operatorname{mom}_{\boldsymbol{r}} \vec{s}_\nu . \end{aligned}$$

If (75) — (78), (62), then (79) implies

$$(82)\qquad \operatorname{mom}_{\boldsymbol{r}_1} \underset{\rightarrow}{s} - \operatorname{mom}_{\boldsymbol{r}_2} \underset{\rightarrow}{s} = \boldsymbol{s} \times (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$$

similar to (63). The relation (82) is called the *connection* between the moments of a system of arrows with respect to the poles (62). It implies

$$(83)\qquad \boldsymbol{s} \cdot \operatorname{mom}_{\boldsymbol{r}_1} \underset{\rightarrow}{s} = \boldsymbol{s} \cdot \operatorname{mom}_{\boldsymbol{r}_2} \underset{\rightarrow}{s}$$

and

$$(84)\qquad (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \cdot \operatorname{mom}_{\boldsymbol{r}_1} \underline{s} = (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \cdot \operatorname{mom}_{\boldsymbol{r}_2} \underline{s}$$

similar to (64) and (66) respectively. Contrary to (64), however, the relation (83) is by no means trivial, since, in general,

$$(85)\qquad \boldsymbol{s} \cdot \operatorname{mom}_{\boldsymbol{r}} \underline{s} \neq 0.$$

Since

$$(86)\qquad \boldsymbol{s} \cdot \operatorname{mom}_{\boldsymbol{r}} \underline{s} = \boldsymbol{s}\boldsymbol{m}$$

for any pole $\boldsymbol{r}$ by virtue of (79), the quantity

$$(87)\qquad I = \boldsymbol{s}\boldsymbol{m}$$

is called the *first scalar invariant* of $\underline{s}$. If

$$(88)\qquad \boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{o},$$

then the quantity

$$(89)\qquad II = \frac{\boldsymbol{s}\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}^2}$$

is called the *second scalar invariant* of $\underline{s}$.

The analogue for systems of arrows of the notion *directrix* of an arrow is the so-called ***axis*** of the system in question. As well as the notion directrix becomes meaningless in the case of the zero-arrow, the axis of a system of arrows does not exist save in the case (88).

Let (88) hold and let the following problem be put: determine all poles (50) for which

$$(90)\qquad \boldsymbol{s} \times \operatorname{mom}_{\boldsymbol{r}} \underline{s} = \boldsymbol{o}.$$

The condition (90) is a vector-algebraic equation with respect to $\boldsymbol{r}$. In view of (79), it is equaivalent to

$$(91)\qquad (\boldsymbol{m} + \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{s} = \boldsymbol{o},$$

i.e. to

$$(92)\qquad (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s}) \times \boldsymbol{s} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{s}.$$

The equation (92), together with (88), implies that there exists $\alpha \in C(F)$ with

(93) $$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s} = \alpha \boldsymbol{s} + \frac{\boldsymbol{s} \times (\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{s})}{\boldsymbol{s}^2}.$$

A scalar multiplication of (93) with $\boldsymbol{s}$ implies

(94) $$\alpha \boldsymbol{s}^2 = 0$$

and (94), (88) imply

(95) $$\alpha = 0.$$

Now (93), (95) imply

(96) $$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{s} \times (\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{s})}{\boldsymbol{s}^2}.$$

Now, by virtue of (88),

(97) $$\left(\boldsymbol{s}, \frac{\boldsymbol{s} \times (\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{s})}{\boldsymbol{s}^2}\right) \in \Lambda_{C(F)}.$$

Hence there exists exactly one $l \in L_{C(F)}$ with

(98) $$\left(\boldsymbol{s}, \frac{\boldsymbol{s} \times (\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{s})}{\boldsymbol{s}^2}\right) \& l.$$

It is called the *axis* of $\underset{\rightarrow}{s}$ and is denoted by ax $\underset{\rightarrow}{s}$. In such a manner,

(99) $$\left(\boldsymbol{s}, \frac{\boldsymbol{s} \times (\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{s})}{\boldsymbol{s}^2}\right) \& \text{ ax } \underset{\rightarrow}{s}.$$

In such a way, the geometrical place of all points $\boldsymbol{r} \in V_{C(F)}$, for which (90) holds provided (88), is the line ax $\underset{\rightarrow}{s}$, defined by (99).

If (51), (43), (88) hold and

(100) $$\underset{\rightarrow}{s} = \{\vec{s}\},$$

i.e. the system $\underset{\rightarrow}{s}$ consists of the single non-zero arrow $\vec{s}$, then the relation (99) changes into

(101) $$(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{m}) \,\&\, \text{ax}\{\vec{s}\}.$$

Since by definition

(102) $$(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{m}) \,\&\, \text{dir}\vec{s},$$

it is immediately seen that the notion *axis* of a system of arrows indeed is a generalization of the notion *directrix* of a single arrow, provided (88) in both cases.

It is proved that if (50), (58),

$$r \mathrel{Z} \operatorname{ax} \underset{\rightarrow}{s}, \quad \bar{p} \mathrel{\bar{Z}} \operatorname{ax} \underset{\rightarrow}{s}, \tag{103}$$

then

$$(\operatorname{mom}_r \underset{\rightarrow}{s})^2 < (\operatorname{mom}_{\bar{p}} \underset{\rightarrow}{s})^2. \tag{104}$$

In such a manner, the moments of a system of arrows have minimal modules with respect to the poles incident with its axis (if it exists, and if modules exist in $V_{C(F)}$).

A most important characteristic of a system of arrows $\underset{\rightarrow}{s}$ is its *rank*, denoted by rank $\underset{\rightarrow}{s}$. It is defined in the following manner.

If $G \subset V_{C(F)}$ and a mapping

$$F : G \longrightarrow V_{C(F)} \tag{105}$$

is defined, then it is called a *vector field* over G.

A system $\underset{\rightarrow}{s}$ of arrows being given, the mapping

$$\mu : V_{C(F)} \longrightarrow V_{C(F)} \tag{106}$$

defined by

$$\mu(\boldsymbol{r}) = \operatorname{mom}_{\boldsymbol{r}} \underset{\rightarrow}{s} \qquad (\boldsymbol{r} \in V_{C(F)}) \tag{107}$$

is called the moment field of $\underset{\rightarrow}{s}$; (107) and (79) imply

$$\mu(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{m} + \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r} \qquad (\boldsymbol{r} \in V_{C(F)}) \tag{108}$$

provided (75) — (78).

The *maximal number* of linearly independent elements of the moment field of a system $\underset{\rightarrow}{s}$ of arrows, i.e. *of the set*

$$\mu(V_{C(F)}), \tag{109}$$

representing the image of $V_{C(F)}$ through μ, is called the *rank* of $\underset{\rightarrow}{s}$. According to this definition, rank $\underset{\rightarrow}{s}$ is one of the numbers 0, 1, 2, and 3, any four elements of $V_{C(F)}$ being linearly dependent.

A system $\underset{\rightarrow}{s}$ of arrows being given, the direct determination of rank $\underset{\rightarrow}{s}$, i.e. by an immediate application of the above definition, is an unpleasing task. Indeed, to prove that rank $\underset{\rightarrow}{s} = 3$ means to find such poles

$$\boldsymbol{r}_\nu \in V_{C(F)} \qquad (\nu = 1, 2, 3), \tag{110}$$

that $\operatorname{mom}_{r_\nu} \underset{\rightarrow}{s}$ ($\nu = 1, 2, 3$) are linearly independent, i.e.

$$\operatorname{mom}_{r_1} \underset{\rightarrow}{s} \times \operatorname{mom}_{r_2} \underset{\rightarrow}{s} \cdot \operatorname{mom}_{r_3} \underset{\rightarrow}{s} \neq 0. \tag{111}$$

Similarly, to prove that rank $\underset{\rightarrow}{s} = 2$ means, to demonstrate that (110) imply

$$\operatorname{mom}_{r_1} \underset{\rightarrow}{s} \times \operatorname{mom}_{r_2} \underset{\rightarrow}{s} \cdot \operatorname{mom}_{r_3} \underset{\rightarrow}{s} = 0, \tag{112}$$

and, second, to find such poles (62), that $\operatorname{mom}_{r_\nu} \underset{\rightarrow}{s}$ ($\nu = 1, 2$) are linearly independent, i.e.

$$\operatorname{mom}_{r_1} \underset{\rightarrow}{s} \times \operatorname{mom}_{r_2} \underset{\rightarrow}{s} \neq o. \tag{113}$$

Further, to prove that rank $\underset{\rightarrow}{s} = 1$ means, first, to demonstrate that (62) imply

$$\operatorname{mom}_{r_1} \underset{\rightarrow}{s} \times \operatorname{mom}_{r_2} \underset{\rightarrow}{s} = o \tag{114}$$

and, second, to find such a pole (50) that

$$\operatorname{mom}_{r} \underset{\rightarrow}{s} \neq o. \tag{115}$$

At last, to prove that rank $\underset{\rightarrow}{s} = 0$ means to demonstrate

$$\operatorname{mom}_{r} \underset{\rightarrow}{s} = o \qquad (r \in V_{C(F)}). \tag{116}$$

All this is, as already said, an unwellcome procedure. Fortunately, it becomes unnecessary in view of the following statement, usually called the rank-theorem for systems of arrows:

The conditions (75) — (78) imply

$$\operatorname{rank} \underset{\rightarrow}{s} = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases} \quad \text{iff} \quad \begin{cases} s = o, \ m = o, \\ s = o, \ m \neq o, \\ s \neq o, \ sm = 0, \\ sm \neq 0 \end{cases} \tag{117}$$

respectively.

Two diferent proofs of the rank-theorem may be found in the article [68].

It is obvious that the application of the rank-theorem reduces the determination of rank $\underset{\rightarrow}{s}$ to a *Schablon*: a system of arrows $\underset{\rightarrow}{s}$ being defined by (75) — (77), one has to form s and m according to (78) and to see, which of the mutually exclusive cases in the right-hand side of (117) is at hand.

Let us note, by the way, that the definition (79) implies: $\operatorname{mom}_{r} \underset{\rightarrow}{s}$ is invariant with respect to the pole r iff $s = o$.

The rank of a system of arrows plays an important role in the theory of such systems. For the time being we shall pause upon one only of its applications.

A key role in the theory of arrows and in its applications to statics and dynamics of mass-points and especially of rigid bodies plays the notion of *equivalent systems of arrows.*

While the basis $\boldsymbol{s}$ and the moment $\boldsymbol{m}$ of a single arrow wholly determine it, the same is not true as regards systems of arrows. In other words, there exist two at least (infinitely many, as a matter of fact) diferent systems of arrows with the same basis and the same moment. Yet, we shall use the notation $\underset{\rightarrow}{s}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{m})$ in order to mark that the system $\underset{\rightarrow}{s}$ has the basis $\boldsymbol{s}$ and the moment $\boldsymbol{m}$: all the same, $\boldsymbol{s}$ and $\boldsymbol{m}$ are certain characteristics of $\underset{\rightarrow}{s}$, as for instance the rank-theorem displays.

Two systems of arrows $\underset{\rightarrow}{s}_\nu(\boldsymbol{s}_\nu, \boldsymbol{m}_\nu)$ $(\nu = 1, 2)$ are called *equivalent* iff

$$\boldsymbol{s}_1 = \boldsymbol{s}_2, \quad \boldsymbol{m}_1 = \boldsymbol{m}_2. \tag{118}$$

In such a case, it is written

$$\underset{\rightarrow}{s}_1 \sim \underset{\rightarrow}{s}_2. \tag{119}$$

It is trivially seen that (119) is an *equivalence relation* in the set $S_{C(F)}$ of all systems of $C(F)$-arrows. Any equivalence class in $S_{C(F)}$ generated by it is called a *$C(F)$-action* or simply an *action.*

The time-honoured experience of mechanicians, both experimental and theoretical, displays that the mechanical behaviour, statical as well as dynamical, of mass-points and rigid bodies is predestinated by the actions of forces, rather than by the special systems of forces determining these actions, inasmuch as forces are represented mathematically by arrows. In other words, if a mass-point or a rigid body is in equilibrium or in a motion under the action of a given system of arrows $\underset{\rightarrow}{s}_1(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{m}_1)$, and if the system $\underset{\rightarrow}{s}_2(\boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{m}_2)$ is substituted for $\underset{\rightarrow}{s}_1$, then the mass-point or the rigid body in question will remain in equilibrium or will accomplish the same motion as before if, and only if, $\underset{\rightarrow}{s}_1$ and $\underset{\rightarrow}{s}_2$ are equivalent, i.e. iff (119) or, just the same, (118) holds.

As the case stands, it is easy to explain why did mechanicians, especially at the early age of mechanics, when the analytical methods were not yet developed, and the mechanicians were compelled to work synthetically, strive to substitute a system of forces $\underset{\rightarrow}{s}_1$, acting on a mass-point or on a rigid body, with another one $\underset{\rightarrow}{s}_2$, equivalent to $\underset{\rightarrow}{s}_1$, but "simpler" than $\underset{\rightarrow}{s}_1$, especially in cases, when $\underset{\rightarrow}{s}_1$ was a "complicated" one. In spite of the fact that the characteristics "simple" and "complicated" are not unambiguous ones, it is intuitively clear what is meant by them: for instance, consisting of a smaller number of elements. This process has been called the *reducation* of the system of forces in question, and it has been accomplished by the succesive application of a certain amount of synthetic-geometrical operations called *elementar-statical operations.* They are four in number:

1. If a given system of forces $\underset{\to}{s}$ contains two forces $\vec{s}_1$ and $\vec{s}_2$ which possess a sum $\vec{s}_1 + \vec{s}_2$, then substitute $\vec{s}_1 + \vec{s}_2$ in $\underset{\to}{s}$ for $\vec{s}_1$ and $\vec{s}_2$.

2. If $\vec{s} \in \underset{\to}{s}$ and $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ are such arrows that $\vec{s}_1 + \vec{s}_2 = \vec{s}$, then substitute $\vec{s}_1$ and $\vec{s}_2$ in $\underset{\to}{s}$ for $\vec{s}$.

3. If $\vec{o} \in \underset{\to}{s}$, then eliminate it from $\underset{\to}{s}$.

4. Add $\vec{o}$ to $\underset{\to}{s}$.

It should be noted that the elementar-statical operations, accomplished on a system of arrows $\underset{\to}{s}$, do not alter the basis and the moment of $\underset{\to}{s}$, so that, no matter how many elementar-statical operations are performed on $\underset{\to}{s}$, the result is always a system of arrows equivalent to $\underset{\to}{s}$.

In order to realize the importance that formerly was attached to the process of reducation of systems of forces, let us note that 30 clear pages are set aside in the text-book [55] for various particularities connected with equivalence and reduction of systems of arrows.

In the course of time, the mechanicians arrived at four "simplest" or ***elementar*** kinds of systems of arrows, to one of which any system of arrows can be reduced by means of elementar-statical operations. These four types of systems are as follows:

1. The zero-system $\underset{\to}{o} = \{\vec{o}\}$, consisting of the zero-arrow $\vec{o}$ only.

2. A dipol $\underset{\to}{\delta}$, consisting of two non-zero arrows $\vec{s}_\nu$ $(\nu = 1, 2)$ with $\boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s}_2 = \boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2 = \boldsymbol{o}$,

3. The mono-system $\mu = \{\vec{s}\}$, consisting of a single non-zero arrow $\vec{s}$.

4. A bi-system β, consisting of two non-zero arrows $\vec{s}_\nu$ $(\nu = 1, 2)$ with non-parallel non-intersecting directrices.

The following remarks are not useless.

First, while the elementar systems $\underset{\to}{o}$ and $\underset{\to}{\mu}$ (cases 1 and 3 respectively) are wholly determined, the elementar systems $\underset{\to}{\delta}$ and $\underset{\to}{\beta}$ (cases 2 and 4 respectively) are not. The meaning of this statement is that there exist two at least (infinitely many, as a matter of fact) different dipols $\underset{\to}{\delta_1}$ and $\underset{\to}{\delta_2}$ with $\underset{\to}{\delta_1} \sim \underset{\to}{\delta_2}$, as well as two at least (also infinitely many, in point of fact) different bi-system $\underset{\to}{\beta_1}$ and $\underset{\to}{\beta_2}$ with $\underset{\to}{\beta_1} \sim \underset{\to}{\beta_2}$. This is the meaning of the use of the definite atricle "the" in the cases 1 and 3, and of the indefinite article "a" in cases 2 and 4.

Second, if $\vec{s}_\nu = (\boldsymbol{s}_\nu, \boldsymbol{m}_\nu)$ $(\nu = 1, 2)$, then by definition dir $\vec{s}_\nu$ $(\nu = 1, 2)$ are intersecting if, and only if,

$$(120) \qquad \boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2 \neq \boldsymbol{o}, \qquad \boldsymbol{s}_1 \boldsymbol{m}_2 + \boldsymbol{s}_2 \boldsymbol{m}_1 \neq 0.$$

The rank-theorem proposes a criterion for a ***natural classification*** in the set $S_{C(F)}$ of all systems of $C(F)$-arrows, possessing a completely determined mechanical significance. It is based on the following *reduction-lemma*:

$$(121)\qquad \underset{\rightarrow}{s}(s,\ m) \sim \begin{cases} \underset{\rightarrow}{o} \\ \underset{\rightarrow}{\delta} \\ \underset{\rightarrow}{\mu} \\ \underset{\rightarrow}{\beta} \end{cases} \quad \text{iff} \quad \begin{cases} s = o, & m = o, \\ s = o, & m \neq o, \\ s \neq o, & sm = 0, \\ & sm \neq 0. \end{cases}$$

Now the rank-theorem and the reduction-lemme imply the so-called *reduction-theorem*:

If $\underset{\rightarrow}{s} \in S_{C(F)}$, then:

$$(122)\qquad \underset{\rightarrow}{s} \sim \begin{cases} \underset{\rightarrow}{o} \\ \underset{\rightarrow}{\delta} \\ \underset{\rightarrow}{\mu} \\ \underset{\rightarrow}{\beta} \end{cases} \quad \text{iff} \quad \operatorname{rank} \underset{\rightarrow}{s} = \begin{cases} 0, \\ 1, \\ 2, \\ 3. \end{cases}$$

The rank-theorem plays an important role in kinematics of rigid bodies, more exactly in the so-called *statical-kinematical analogy*, but this is a problem we shall discuss in due time.

This is almost all one must know about arrows at all costs. The theory of arrows is a vast one, but all that remains are, from a mechanical point of view at least, particularities.

Up to now all considerations have been of a purely algebraic nature. The following step toward the axiomatic consolidation of the logical foundations of analytical mechanics consists in development of theories of motions and rigid bodies. Now, on the very threshold of these theories one is faced with the necessity of vector analysis.

Those are topics that will be discussed in the continuation of this paper. For the time being we shall append the last pieces of information from vector algebra that will be necessary in the following exposition. They concern mainly the so-called *vectors of Gibbs*.

Let $H_{C(F)}$ be an *Hermitean space over* $C(F)$, i.e. a set, in which three operations (16) — (18) are defined, satisfying the conditions Ax 1 C(F) — Ax 12 C(F) (with H instead of V), and let

$$(123)\qquad a_\nu \in H_{C(F)} \qquad (\nu = 1, \dots, n),$$

$$(124)\qquad G(a_\nu)_{\nu=1}^{n} \neq 0$$

provided by definition

$$(125)\qquad G(a_\nu)_{\nu=1}^{n} = \begin{vmatrix} a_1^2 & \dots & a_1 a_n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n a_1 & \dots & a_n^2 \end{vmatrix}.$$

Then the vectors defined by

$$(126)\qquad \boldsymbol{a}_\mu^{-1} = \frac{(-1)^{\mu+1}}{G(\boldsymbol{a}_\nu)_{\nu=1}^n}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_n \\ \boldsymbol{a}_1^2 & \dots & \boldsymbol{a}_n\boldsymbol{a}_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_{\mu-1} & \dots & \boldsymbol{a}_n\boldsymbol{a}_{\mu-1} \\ \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_{\mu+1} & \dots & \boldsymbol{a}_n\boldsymbol{a}_{\mu+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_n & \dots & \boldsymbol{a}_n^2 \end{vmatrix} \qquad (\mu = 1,\dots, n)$$

are called *Gibbs' vectors* or *reciprocal vectors* of the vectors (123).

(As it is well-known, the condition (124) is necessary and sufficient for the *linear independence* of the vectors (123); for n linearly independent elements of $H_{C(F)}$ it is said that they constitute a *reper*.)

The following propositions describe the basic properties of reciprocal vectors.

Pr 8 C(F). (123), (124) imply

$$(127)\qquad \boldsymbol{a}_\mu^{-1}\boldsymbol{a}_\nu = \begin{cases} 1 & (\mu = \nu) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases} \qquad (\mu,\ \nu = 1,\dots, n).$$

Pr 9 C(F). (123), (124) imply

$$(128)\qquad \boldsymbol{a}_\mu\boldsymbol{a}_\nu^{-1} = \begin{cases} 1 & (\mu = \nu) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases} \qquad (\mu,\ \nu = 1,\dots, n).$$

Pr 10 C(F). (123), (124) imply

$$(129)\qquad G(\boldsymbol{a}_\nu^{-1})_{\nu=1}^n \neq 0.$$

Pr 11 C(F). (123), (124) imply

$$(130)\qquad G(\boldsymbol{a}_\nu)_{\nu=1}^n G(\boldsymbol{a}_\nu^{-1})_{\nu=1}^n = 1.$$

Pr 12 C(F). (123), (124) imply

$$(131)\qquad (\boldsymbol{a}_\nu^{-1})^{-1} = \boldsymbol{a}_\nu \qquad (\nu = 1,\dots, n).$$

Pr 13 C(F). (123), (124) imply

$$(132)\qquad \boldsymbol{a}_\nu^{-1} = \boldsymbol{a}_\nu \qquad (\nu = 1,\dots, n)$$

iff

$$(133)\qquad \boldsymbol{a}_\mu\boldsymbol{a}_\nu = \begin{cases} 1 & (\mu = \nu) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases} \qquad (\mu,\ \nu = 1,\dots, n).$$

Let $H(\boldsymbol{a}_\nu)_{\nu=1}^n$ denote the linear span of (123) provided (124), i.e. the set

$$H(\boldsymbol{a}_\nu)_{\nu=1}^n = \left\{\sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu \boldsymbol{a}_\nu : \alpha_\nu \in C(F) \quad (\nu = 1, \dots, n)\right\}. \tag{134}$$

Then:

Pr 14 C(F). (123), (124),

$$\boldsymbol{r} \in H(\boldsymbol{a}_\nu)_{\nu=1}^n \tag{135}$$

imply

$$\boldsymbol{r} = \sum_{\nu=1}^n (\boldsymbol{r}\boldsymbol{a}_\nu^{-1})\boldsymbol{a}_\nu. \tag{136}$$

Pr 15 C(F). (123), (124), (135) imply

$$\boldsymbol{r} = \sum_{\nu=1}^n (\boldsymbol{r}\boldsymbol{a}_\nu)\boldsymbol{a}_\nu^{-1}. \tag{137}$$

Pr 16 C(F). (123), (124),

$$\alpha_\nu \in C(F) \qquad (\nu = 1, \dots, n) \tag{138}$$

imply: there exist exactly one (135) with

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{a}_\nu = \alpha_\nu \qquad (\nu = 1, \dots, n), \tag{139}$$

namely

$$\boldsymbol{r} = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu \boldsymbol{a}_\nu^{-1}. \tag{140}$$

Pr 17 C(F). (123), (124) imply: there exists exactly one (135) with

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{a}_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, \dots, n), \tag{141}$$

namely

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{o}. \tag{142}$$

Pr 18 C(F). If

$$\boldsymbol{a}_\nu \in V_{C(F)} \qquad (\nu = 1, 2, 3), \tag{143}$$

$$a_1 \times a_2 \cdot a_3 \neq 0 \tag{144}$$

then

$$a_\nu^{-1} = \frac{a_{\nu+1} \times a_{\nu+2}}{a_1 \times a_2 \cdot a_3} \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3) \tag{145}$$

provided

$$a_{\nu+3} = a_\nu \qquad (\nu = 1,\ 2). \tag{146}$$

Pr 19 C(F). If (50),

$$a_\nu \in V_{C(F)} \qquad (\nu = 1,\ 2), \tag{147}$$

$$b_\nu \in V_{C(F)} \qquad (\nu = 1,\ 2) \tag{148}$$

$$r \times a_\nu = b_\nu \qquad (\nu = 1,\ 2) \tag{149}$$

then

$$a_\mu b_\nu + a_\nu b_\mu = 0 \qquad (\mu,\ \nu = 1,\ 2). \tag{150}$$

Pr 20 C(F). (50), (147),

$$a_1 \times a_2 \neq o, \tag{151}$$

$$r \times a_\nu = o \qquad (\nu = 1,\ 2) \tag{152}$$

imply (142).

Pr 21 C(F). (143), (144),

$$b_\nu \in V_{C(F)} \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3), \tag{153}$$

$$a_\mu b_\nu + a_\nu b_\mu = 0 \qquad (\mu,\ \nu = 1,\ 2,\ 3) \tag{154}$$

imply: there exists exactly one (50) with

$$r \times a_\nu = b_\nu \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3), \tag{155}$$

namely

$$r = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{3} a_\nu^{-1} \times b_\nu. \tag{156}$$

Pr 22 C(F). (147), 148), (150), (151) imply: there exists exactly one (50) with (149), namely (156) provided

$$a_3 = a_1 \times a_2, \tag{157}$$

$$b_3 = (b_1 \cdot a_2 \times a_1)a_1^{-1} + (b_2 \cdot a_2 \times a_1)a_2^{-1}. \tag{158}$$

The mechnical praxis necessitates the solving of four only systems of algebraic vector equations in the main. Three of them are the systems (139), (149), and (155), considered in Pr 16 C(F), Pr 22 C(F), and Pr 21 C(F) respectively. The fourth is discussed in the following proposition.

Pr 23 C(F). $\alpha \in C(F)$; a, b, $c \in V_{C(F)}$, $a \neq o$, $ab = 0$ imply:

1. If $ac \neq 0$, then there exists exactly one (50) with

$$r \times a = b, \tag{159}$$

$$rc = \alpha, \tag{160}$$

namely

$$r = \frac{\alpha a + c \times b}{ac}. \tag{161}$$

2. If $ac = 0$, $\alpha a + c \times b = o$, then any solution (50) of (159) is a solution of (160) too, but the inverse is not true.
3. If $ac = 0$, $\alpha a + c \times b \neq o$, then there exists no (50) with (159), (160).

(To be continued.)

LITERATURE

1. G. Chobanov, I. Chobanov. Lagrange or Euler? Part One: The Past. — Год. Соф. унив., Фак. мат. мех., **73**, 1979, 13–51.
2. G. Chobanov, I. Chobanov. Lagrange or Euler? Part Two: The Present. — Год. Соф. унив., Фак. мат. инф., **82**, 1988, кн. 2 — Механика, 5–62.
3. D. Hilbert. Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900. Aus den Nachrichten der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen. Math. — phys. Klasse. 1900. Mit Zusätzen des Verfassers. Arch. d. Math. u. Phys., III. Reihe, **1**, 1901, 44–63, 213–237.
4. D. Hilbert. Gesammelte Abhandlungen. Berlin. Erster Band: Zahlentheorie, 1932; zweiter Band: Invariantentheorie. Geometrie, 1933; dritter Band: Grundlagen der Mathematik. Physik. Verschiedened. Nebst einer Lebensgeschichte, 1935.

5. C. T r u e s d e l l. Essays in the History of Mechanics. Berlin — Heidelberg — New York, 1968.
6. G. H a m e l. Über die Grundlagen der Mechanik. — Math. Annalen, **66**, 1908, 350–397.
7. G. H a m e l. Die Axiome der Mechanik. In: Handbuch der Physsik. Bd. V. Grundlagen der Mechanik. Mechanik der Punkte und starren Körper. Berlin, 1927, S. 1–42.
8. G. C h o b a n o v, I. C h o b a n o v. A dynamical problem: How to solve it? II. Kinematical preliminaries. — Год. Соф. унив., Фак. мат. мех., **80**, 1986, кн. 2 — Механика.
9. Б. Д о л а п ч и е в, И. Ч о б а н о в, Г. П а с к а л е в. Критичен анализ на един опит за аксиоматическо изграждане на аналитичната механика. — Год. Соф. унив., Физ.-мат. фак., 54, 1959 — 1960, кн. 1 (математика), 115–149.
10. W. N o l l. The foundations of classical mechanics in the light of recent advances in continuum mechanics. In: The Axiomatic Method with Spacial Reference to Geometry and Physics. Proceedings of an International Symposium held at the University of Callifornia, Berkeley, December 16, 1957 — January 4, 1958. Edited by Leon Henkin, Patrick Suppes, and Alfred Tarski. Amsterdam, 1959, p. 266–281.
11. W. N o l l. The foudation of mechanics. In: Non Linear Continuum Theories, Centro Internazionale Matematico Estivo, I Ciclo 1965 (dir. C. Truesdell e G. Grioli). Roma, 1966, 159–200. (Corrected reprint, Report Series 66-2. Dep. Math., Carnegie Inst. of Technology, Pittsburg, 1966.)
12. L. A. P a r s. A Treatise on Analytical Dynamics. London, 1965.
13. Ю. И. Н е й м а р к, Н. А. Фуфаев. Динамика неголономных систем, Москва, 1967.
14. E. L a n d a u. Grundlagen der Analysis (Das Rechnen mit ganzen, rationalem, irrationalen, komplexen Zahlen), Leipzig, 1930.
15. H. G r a s s m a n n. Lehrbuch der Arithmetik. Berlin. Erster Band, 1861; zweiter Band, 1865.
16. D. H i l b e r t. Grundlagen der Geometrie. Leipzig, 1899.
17. G. P e a n o. Arithmetices principia, nova methodo exposita. Augustae Taurinorum, 1889.
18. И. П р о д а н о в, И. Ч о б а н о в. Числови системи. София, 1974.
19. I. P r o d a n o v, I. T c h o b a n o v. Peano's axioms for minimal rings. — Год. Соф. унив., Фак. мат. мех., **68**, 1973 — 1974, 365–398.
20. H. G r a s s m a n n. Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik, dargestellt und durch Anwendungen auf der Statik, Mechanik, der Lehre vom Magnetismus und der Krystallonomie erleutert. Leipzig, 1844; 2. Aufl., 1878.
21. W.-R. H a m i l t o n. On quaternions. — Phil. Mag., **25**, 1844, 10–13, 241–246, 489–495; **26**, 1845, 220–224; **29**, 1846, 26–31, 113–122, 326–328; **30**, 1847, 458–461; **31**, 1847, 214–219, 278–293, 511–519; **32**, 1848, 367–374; **33**, 1848, 56–60; **34**, 1849, 294–297, 340–343, 425–439; **35**, 1849, 137, 200–204; **36**, 1850, 305–306. Brit. Assoc. Rep., 1844, 2. Cambridge and Dublin Math. Journ., **4**, 1849, 161–168. Trans. Irish Acad., **21**, 1848, 199–296. Nouv. Ann. Math., **12**, 1853, 275–283.
22. H. G r a s s m a n n. Geometrische Analyse; geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik. Gekrönte Preisschrift (von der Fürstlich

Jablonowski'schen Gesellschaft). Leipzig, 1847; 2. Aufl., Berlin, 1862.
23. A. F. Möbius. Der barycentrische Calcul, ein neues Hilfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie, dargestellt und insbesondere auf die Bildung neuerer Classen von Aufgaben und die Entwickelung mehrerer Eigenschaften der Kegelschnitte angewendet. Leipzig, 1827.
24. V. Schlegel. System der Raumlehre. Nach den Prinzipien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre und als Einleitung in derselben. Erster Teil: Geometrie. Die Gebiete des Punktes, der Geraden, der Ebene. Leipzig, 1872.
25. H. Grassmann. Die Ausdehnungslehre, vollständig und in strenger Form bearbeitet. Berlin, 1862.
26. H. Grassmann. Gesammelte mathematische und physikalische Werke, herausgegeben von Friedrich Engel. I. Bd., I. Tl. Die Ausdehnungslehre von 1844 und die Geometrische Analyse; II. Tl. Die Ausdehnungslehre von 1862. II. Bd., I. Tl. Die Abhandlungen zur Geometrie und Analysis; II. Tl. Die Abhandlungen zur Mechanik und zur mathematischen Physik. III. Bd., I. Tl. Theorie der Ebbe und Flut und Abhandlungen zur mathematischen Physik; II. Tl. Grassmann's Leben mit einem Verzeichnis der von Grassmann veröffentlichen Schriften und einer Übersicht des handschriftlichen Nachlasses. Leipzig, 1894 — 1911.
27. W.-R. Hamilton. On theorems relating to surfaces obtained by the method of quaternions. — Proc. Irish Acad., **4**, 1850, 349–355.
28. W.-R. Hamilton. On a theorem respecting ellipsoids obtained by method of quaternions. — Proc. Irish Acad., **4**, 1850, 355–359.
29. W.-R. Hamilton. On continued fractions in quaternions. — Philos. Mag., **3**, 1852, 371–373; **4**, 1852, 303; **5**, 1853, 117–118, 236–238, 321–326.
30. W.-R. Hamilton. On the application of the calculus of quaternions to the theory of the Moon. — Proc. Irish Acad., **5**, 1853, 306–308.
31. W.-R. Hamilton. On the connection of quaternions with continued fractions and quadratic equations. — Proc. Irish Acad., **5**, 1853, 219–221, 299–301.
32. W.-R. Hamilton. On the geometrical interpretation of some results obtained with biquaternions. — Proc. Irish Acad., **5**, 1853, 388–400.
33. W.-R. Hamilton. On the geometrical demonstration of some theorems by means of the quaternion analysis. — Proc. Irish Acad., **5**, 1853, 407–422.
34. W.-R. Hamilton. On some extensions of quaternions. — Proc. Irish Acad., **6**, 1853 — 1854, 114–115. Philos. Mag., **7**, 1854, 492–499; **8**, 1854, 125–137, 261–269; **9**, 1855, 46–51, 280–290.
35. W.-R. Hamilton. On some quaternion equations connected with Fresnel's wave surface for biaxial crystals. — Proc. Irish Acad., **7**, 1858, 122–124, 162–164. Brit. Assoc. Rep., 1859, 248. Nat. Hist. Review, **6**, 1859, 240–242, 365.
36. W.-R. Hamilton. Quaternion proof that eight perimeters of the regular inscribed polygon of twenty sides exceed twenty-five diameters of the circle. — Philos. Mag., **23**, 1862, 267–269.
37. W.-R. Hamilton. On the existence of a symbolic and biquadratic equation which is satisfied by the symbol of linear or distributive operation in a quaternion. — Philos. Mag., **24**, 1862, 127–128; Proc. Irish Acad., **8**, 1864, 190–191.
38. W.-R. Hamilton. On a new and general method of inverting a linear and quaternion function of a quaternion. — Proc. Irish Acad., **8**, 1864, 182–183.
39. W. R. Hamilton. Lectures in Quaternions, Containing a Systematic Statement of a New Mathematical Method. Dublin, 1853.

40. W.-R. H a m i l t o n. Elements of Quaternions. London, 1866; 2 ed. in two volumes, with notes and appendices by C. J. Joly. London, 1899 — 1901.
41. F. K l e i n. Vorlesungen über die Eitwicklung der Mathematik in 19. Jahrhundert, Teil I, für den Druck bearbeitet von R. Courant und O. Neugebauer. Berlin, 1926.
42. G. C h o b a n o v, I. C h o b a n o v. Quaternions and rotations. I. Finite displacement and finite rotations. — Год. Соф. унив., Фак. мат. мех., **79**, 1985, кн. 1 — Математика, 15–57.
43. G. C h o b a n o v, I. C h o b a n o v. Quaternions and rotations. II. Quaternions and finite rotations. — Год. Соф. унив., Фак. мат. мех., **79**, 1985, кн. 1 — Математика, 59–102.
44. J.-C l. M a x w e l l. Electricity and Magnetism. London, 1873.
45. J. W. G i b b s. Elements of vector analysis, arranged for the use of students in physics. New Haven, 1881 — 1884.
46. J. W. G i b b s. On multiple algebra. — Proc. Amer. Assoc. for the Advance of Sci., **35**, 1886, 37–66.
47. J. W. G i b b s. On the determination of elliptic orbits from three complete observations. — Mem. Nat. Acad. Sci., **4**, 1889, part II, 79–104.
48. J. W. G i b b s. On the role of quaternions in the algebra of vectors. — Nature, **43**, 1891, 511–513.
49. J. W. G i b b s. Quaternions and the "Ausdehnungslehre". — Nature, **44**, 1891, 79–82.
50. J. W. G i b b s. Quaternions and the algebra of vectors. — Nature, **47**, 1893, 463–464.
51. J. W. G i b b s. Quaternions and the vector analysis. — Nature, **48**, 1893, 364–367.
52. G. P e a n o. Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dale operazioni della logica deduttiva. Torino, 1888.
53. E. W. H y d e. The Directional Calculus, Based upon the Methods of Hermann Grassmann. Boston, 1890.
54. R. V. M i s e s. Motorrechnung, ein neuess Hilfsmittel der Mechanik. — Zeitschr. angew. Math. u. Mech., **4**, 1924, 155–181.
55. Б. Д о л а п ч и е в. Аналитична механика. София. Книга първа: Векторно смятане. Кинематика . Статика, 1958. Книга втора: Динамика на точка, системи и твърдо тяло. Принципи и уравнения на аналитичната динамика, 1960. Книга трета: Приложения, 1963 (с И. Чобанов и Г. Паскалев).
56. I. C h r i s t o v a, I. C h o b a n o v. On the definition of vector multiplication. — Год. Соф. унив., Фак. мат. мех., **70**, 1975 — 1976, 281–289.
57. I. C h o b a n o v. Complex standard vector spaces. — Год. Соф. унив., Фак. мат. мех., **75**, 1981, кн. 2 — Механика, 3–26.
58. И. Ч о б а н о в. Векторна алгебра. Исторически и съвременни аспекти. С. 1982.
59. I. C h o b a n o v, N. S t o e v. An axiomatic approach to the real three-dimensional linear analytic geometry. — Год. Соф. унив., Фак. мат. мех., **69, 1974** — 1975, 165–227.
60. И. Ч о б а н о в. Моделно-аксиоматизационна схема. — Год. Соф. унив., Мат. фак., 62, 1967 — 1968, 157–159.
61. I. C h o b a n o v. Analytic geometries in complex standard vector spaces. — Год. Соф. унив., Фак. мат. мех., **77**, 1983, кн. 1 — Математика, 73–138.

62. Б. Петканчин. Аналитична геометрия. С., 1966.
63. Б. Петканчин. Диференциална геометрия. С., 1964.
64. Н. Е. Кочин. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М., 1965.
65. Б. Долапчиев. Аналитична механика. С., 1966.
66. И. Чобанов, М. Гаврилов. Аналитична теория на стрелите. — Год. Соф. унив., Физ.-мат. фак., 55, 1960 — 1961, кн. 1 (Математика), 83–158.
67. I. Hristova, R. Stoyanova, I. Tchobanov. Introduction to an algebraic theories of arrows. I. — Год. Соф. унив., Фак. мат. мех., **71**, 1976 — 1977, ч. I, 5-53.
68. G. Chobanov, I. Chobanov. The rank-theorem for systems of arrows in complex standard vector spaces. — Год. Соф. унив., Фак. мат. мех., **79**, 1985, кн. 1 — Математика, 185–202.

Received 29.III. 1989

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Книга 2 — Механика

Том 82, 1988

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA "ST. KLIMENT OHRIDSKI"

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Livre 2 — Mécanique

Tome 82, 1988

НЕХОЛОНОМНИ ЗАДАЧИ ОТ ТЪРКАЛЯНЕ НА ТВЪРДО ТЯЛО ВЪРХУ ПОВЪРХНИНА

СОНЯ ДЕНЕВА

Соня Денева. НЕХОЛОНОМНИ ЗАДАЧИ ОТ ТЪРКАЛЯНЕ НА ТВЪРДО ТЯЛО ВЪРХУ ПОВЪРХНИНА

В работе затронуты некоторые аспекты классической неголономной задачи о качении без скольжения тяжелого шара по поверхности.

Sonia Deneva. ON NONHOLONOMIC PROBLEMS FOR THE MOTION OF RIGID BODY ON A ROUGH SURFACE

In the paper some nonholonimic problems for the motion of a heavy ball rolling on absolutely rough surface are considered.

В настоящата работа са засегнати някои аспекти на класическата задача за търкаляне на тежко кълбо върху грапава повърхнина. С помощта на уравненията на Апел са изведени общите уравнения на движение и са разгледани някои частни решения на тези уравнения при търкаляне без хлъзгане на кълбо върху конкретни повърхнини — равнина и ротационен елипсоид. Разгледани са два основни случая — търкаляне без хлъзгане на нехомогенно и хомогенно кълбо. Изискването кълбото да не напуска повърхнината е еквивалентно с наличието на една крайна връзка между параметрите на движението, а условието за търкаляне без хлъзгане води до две зависимости между обобщените скорости.

Задачата за търкаляне на тежко твърдо тяло върху неподвижна хоризонтална равнина е решена само в следните три случая : движещото се тяло е ограничено от цилиндрична повърхнина (задача, разглеждана от Л. Ойлер) или има форма на кълбо или диск (точни решения в последните два случая са дадени от В. Томсън за случая на хомогенно тяло). Решението на задачата за търкаляне на нехомогенно кълбо е намерено при следните ограничения : центърът на тежестта G на кълбото съвпада с геометричния му център и централният инерчен елипсоид има формата на сфероид (задача, разглеждана от Д.К.Бобылев и Н.Е.Жуковски [1, 2]). По-общият случай, когато центърът на масите не съвпада с геометричния център на кълбото и два от главните инерчни моменти са равни, е изследван от С.А.Чаплигин [3]. За триосен централен инерчен елипсоид решения са намерени в някои частни случаи от П.В.Воронец [4] при известни предположения за разположението на масата, липса на тегло и ограничения относно началните условия на движението. През 1958 г. Е.И.Харламова [5] разглежда задачата за търкаляне на кълбо по наклонена равнина при някои ограничения, наложени на началните условия на задачата, и при условие, че кълбото притежава триосен инерчен елипсоид, за центъра на масите, съвпадащ с геометричния му център. При тези ограничения авторката привежда уравненията на движение на кълбото към уравнения, по форма съвпадащи с изследваните от С.А.Чаплигин в задачата за търкаляне на нехомогенно кълбо по хоризонтална равнина, за която споменахме по-горе [3].

В предлаганата работа за получаване на диференциалните уравнения на движението са използвани уравненията на Апел. Едно от предимствата на тази форма уравнения на движение за нехолономни системи в сравнение с многото други предлагани е следното : Доказано е, че енергията на ускорението S напълно характеризира динамиката на нехолономните системи в смисъл, че имайки израза само на функцията S и неразполагайки с други сведения за системата (незнаейки нищо за връзките, наложени на системата), можем да съставим уравненията на движение. По такъв начин за нехолономни системи функцията на ускорението играе такава роля, каквато и кинетичната енергия T за холономни системи. Оттук следва, че познаването само на функцията T е все още недостатъчно за изучаване поведението на дадена нехолономна система. С други думи, ако знаем само израза за кинетичната енергия, то за динамиката на нехолономната система още нищо не можем да кажем. За доказателство на това твърдение е достатъчно да се намерят две различни динамични системи, изразите за T на които са еднакви, а функциите S са различни. Такъв пример е даден от Апел [6]. Авторът разглежда две системи, първата от които представлява диск с радиус a и инерчни моменти A, A и C, който се търкаля по грапава хоризонтална равнина. Втората система е ротационно тяло с радиус a и с такова разпределение на масите, че $A_1 = A$, $C_1 = ma^2$. Последното се движи при следните ограничения :

а) центърът на тялото се хлъзга по вертикална окръжност с уравнение

$$\eta = 0, \qquad \xi^2 + \eta^2 = a^2.$$

б) самото тяло се хлъзга по хоризонтална равнина без триене, при което координатата на центъра на масите е $\zeta = a\sin\theta$.

Ако масите на двете тела се приемат за единици, след несложни пресмятания за енергията на ускорението на първата система се получава

$$S_1 = \frac{1}{2}[(A + a^2)\dot{p}^2 + A\dot{q}^2 + (C + a)\dot{r}^2] + (Aq\text{ctg}\theta - Cr)(p\dot{q} - q\dot{p}) + \dots,$$

докато за втората имаме

$$S_2 = \frac{1}{2}[(A + a^2)\dot{p}^2 + A\dot{q}^2 + C\dot{r}^2] + (Aq\text{ctg}\theta - Cr)(p\dot{q} - q\dot{p}) + \dots$$

Функцията на Лагранж обаче и за двете системи е една и съща :

$$L_1 = L_2 = \frac{1}{2}[A(\dot{p}^2 + \dot{q}^2) + C\dot{r}^2] + (Aq\text{ctg}\theta - Cr)(p\dot{q} - q\dot{p}) + \dots$$

I. УРАВНЕНИЕ НА ДВИЖЕНИЕ НА НЕХОМОГЕННО КЪЛБО, КОЕТО СЕ ТЪРКАЛЯ БЕЗ ХЛЪЗГАНЕ ПО НЕПОДВИЖНА РАВНИНА

Положението на кълбото определяме спрямо две координатни системи — инерциалната координатна система $Oxyz$, чиято ос Oz е насочена вертикално нагоре, и неизменно свързаната с тялото координатна система $C\xi\eta\zeta$, образувана от центъра C на кълбото и главните му инерчни оси. За параметри на движението избираме координатите x_G, y_G на центъра на масите и ойлеровите ъгли φ, ψ, θ на неподвижния триедър $C\xi\eta\zeta$ спрямо $Oxyz$. Радиуса на кълбото означаваме с b, а с H — допирната точка на кълбото с хоризонталната равнина. Ще изведем най-напред уравненията на движение при предположение, че масовият център C на кълбото съвпада с геометричния му център G.

От условието за търкаляне без хлъзгане следва

$$\overline{V}_H = V_C + \overline{\omega} \times \rho_H = \overline{0}, \tag{1}$$

където ω е моменталната ъглова скорост на кълбото, а $\rho_H = CH$. От (1), проектирайки върху неподвижните оси, получаваме

$$\dot{x}_C - b\omega_y = 0, \tag{2}$$

$$\dot{y}_C + b\omega_x = 0,$$

$$\dot{z}_C = 0.$$

Първите две равенства отразяват нехолономните връзки. Третото се свежда до $z_C = \text{const}$, $z_C = b$.

Поради нехолономните връзки само три от обобщените координати, определящи положението на кълбото, са независими. За такива избираме ойлеровите ъгли ψ, φ и θ. Ще изведем уравненията на движение с помощта на уравненията на Апел във вида

$$\frac{\partial S^*}{\partial \ddot{q}_\sigma} = Q_\sigma \qquad (\sigma = l+1, \dots, m),$$

където $q_1, q_2, \dots, q_m$ са обобщените координати, l — броят на нехолономните връзки, S — енергията на ускорението ($l = 2$, $m = 5$),

$$S^* = S(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_{l+1}, \dots, \dot{q}_m, \ddot{q}_{l+1}, \dots, \ddot{q}_m).$$

Енергията на ускорението на твърдо тяло при произволно движение спрямо главни инерчни оси се задава с формулата

(3)
$$S = \frac{m}{2} w_C^2 + \frac{1}{2}(A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2 + C\dot{r}^2)$$
$$+(C-B)\dot{p}qr + (A-C)\dot{q}pr + (B-A)\dot{r}pq + \dots,$$

където с p, q, r са означени проекциите на ω върху $C\xi\eta\zeta$:

(4)
$$p = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi,$$
$$q = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi,$$
$$r = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}.$$

Проекциите на ω върху $Oxyz$ зависят от ойлеровите ъгли по следния начин :

(5)
$$\omega_x = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi,$$
$$\omega_y = -\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi,$$
$$\omega_z = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta.$$

Да пресметнем енергията на ускорението на кълбото :

$$\frac{mw_G^2}{2} = \frac{m}{2}(\ddot{x}_C^2 + \ddot{y}_C^2 + \ddot{z}_C^2). \qquad (x_C = x_G,\ y_C = y_G).$$

От (2) и (5) намираме

$$\dot{x}_C = b(-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi),$$
$$\dot{y}_C = -b(\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi),$$

$$\ddot{x}_C = b(-\ddot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\psi$$
$$+\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta\sin\psi + \ddot{\theta}\sin\psi + \dot{\theta}\dot{\psi}\cos\psi),$$
$$\ddot{y}_C = -b(\ddot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\psi$$
$$+\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta\sin\psi + \ddot{\theta}\cos\psi - \dot{\theta}\dot{\psi}\sin\psi).$$

Повдигайки в квадрат $\ddot{x}_C$ и $\ddot{y}_C$, запазваме само членовете, съдържащи $\ddot{\varphi}$ и $\ddot{\theta}$. След известни пресмятания получаваме

$$\ddot{x}_C^2 + \ddot{y}_C^2 = b^2[(\ddot{\varphi}\sin\theta)^2 + \ddot{\theta}^2$$
$$+2\sin\theta(\ddot{\varphi}\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta - \ddot{\varphi}\dot{\theta}\dot{\psi} + \ddot{\theta}\dot{\varphi}\dot{\psi})],$$

откъдето
$$\frac{1}{2}m\omega_C^2 = \frac{1}{2}mb^2[\ddot{\theta} + (\ddot{\varphi}\sin\theta)^2 + 2\sin\theta(\ddot{\varphi}\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta$$
$$-\ddot{\varphi}\dot{\theta}\dot{\psi} + \ddot{\theta}\dot{\varphi}\dot{\psi})].$$

От (4) намираме

(6)
$$\dot{p} = \ddot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi$$
$$+\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi + \ddot{\theta}\cos\varphi - \dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi,$$
$$\dot{q} = \ddot{\psi}\sin\theta\cos\varphi + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi$$
$$-\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi - \ddot{\theta}\sin\varphi - \dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi,$$
$$\dot{r} = \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta + \ddot{\varphi}.$$

Уравненията на Апел ще имат вида

(7)
$$\frac{\partial S}{\partial\ddot{\psi}} = [A\dot{p} + (C-B)qr]\frac{\partial\dot{p}}{\partial\ddot{\psi}} + [B\dot{q} + (A-C)pr]\frac{\partial\dot{q}}{\partial\ddot{\psi}}$$
$$+[C\dot{r} + (B-A)pq]\frac{\partial\dot{r}}{\partial\ddot{\psi}} = 0,$$
$$\frac{\partial S}{\partial\ddot{\varphi}} = mb^2\sin\theta(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}\dot{\psi}) + [A\dot{p} + (C-B)qr]\frac{\partial\dot{p}}{\partial\ddot{\varphi}}$$
$$+[B\dot{q} + (A-C)pr]\frac{\partial\dot{q}}{\partial\ddot{\varphi}} + [C\dot{r} + (B-A)pq]\frac{\partial\dot{r}}{\partial\ddot{\varphi}} = 0,$$
$$\frac{\partial S}{\partial\ddot{\theta}} = mb^2(\ddot{\theta} + \dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta) + [A\dot{p} + (C-B)qr]\frac{\partial\dot{p}}{\partial\ddot{\theta}}$$
$$+[B\dot{q} + (A-C)pr]\frac{\partial\dot{q}}{\partial\ddot{\theta}} + [C\dot{r} + (B-A)pq]\frac{\partial\dot{r}}{\partial\ddot{\theta}} = 0.$$

От (6) и (7) получаваме следните уравнения на движение на нехомогенно кълбо върху неподвижна хоризонтална равнина :

$$[A\dot{p} + (C - B)qr]\sin\theta\sin\varphi + [B\dot{q} + (A - C)pr]\sin\theta\cos\varphi$$

$$+[C\dot{r} + (B - A)pq]\cos\theta = 0,$$

(8) $$mb^2\sin\theta(\ddot{\varphi}\sin\theta + \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}\dot{\varphi}) + C\dot{r} + (B - A)pq = 0,$$

$$mb^2(\ddot{\theta} + \dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta) + [A\dot{p} + (C - B)qr]\cos\varphi$$

$$-[B\dot{q} + (A - C)pr]\sin\varphi = 0.$$

Ще се спрем на някои частни решения на системата (8).

1. Полагаме $\theta = 0$. Тогава уравненията (8) добиват вида

$$C\dot{r} + (B - A)pq = 0,$$

$$[A\dot{p} + (C - B)qr]\cos\varphi = [B\dot{q} + (A - C)pr]\sin\varphi.$$

От формулите за p, q, r и техните производни след заместване с $\theta = 0$ получаваме

$$p = q = 0,$$

$$r = \dot{\psi} + \dot{\varphi},$$

$$C\dot{r} = 0 \to r = \dot{\psi} + \dot{\varphi} = r_0, \qquad \psi + \varphi = r_0 t + s_0.$$

За траекторията на допирната точка от (2) в този случай получаваме

$$x = x_0, \qquad y = y_0, \qquad z = b.$$

Сферата ще стои на едно място и ще се върти около вертикална ос, минаваща през центъра ѝ, с постоянна ъглова скорост ω с големина $|\omega| = r_0$.

2. Нека $\psi = \psi_0$ и $\varphi = 0$. Тогава имаме $p = \dot{\theta}$, $q = r = 0$. При тези условия (8) се свежда до уравнението $m(b^2 + A)\ddot{\theta} = 0$ или $\theta = \dot{\theta}_0 t + \theta_0$.

Да определим траекторията на допирната точка :

$$\dot{x} = b\dot{\theta}_0\sin\psi_0, \qquad x = b\dot{\theta}_0\sin\psi_0 t + x_0,$$

$$\dot{y} = -b\dot{\theta}_0\cos\psi_0, \qquad y = -b\dot{\theta}_0\cos\psi_0 t + y_0,$$

откъдето, изключвайки параметъра t, получаваме $y = (x_0 - x)\mathrm{ctg}\psi_0 + y_0$. При направените предположения стигаме до извода, че кълбото се движи с постоянна ъглова скорост $\omega = \dot{\theta}_0\cos\psi_0 i + \dot{\theta}_0\sin\psi_0 j$ и центърът му се движи праволинейно и равномерно със скорост $|v| = b\dot{\theta}_0$.

3. Нека $\theta = \theta_0$. Тогава уравненията на движението ще имат вида

$$\{[A\dot{p} + (C - B)qr]\sin\varphi + [B\dot{q} + (A - C)pr]\cos\varphi\}\sin\theta_0$$

$$+[C\dot{r} + (B - A)pq]\cos\theta_0 = 0,$$

$$(9) \qquad mb^2\sin^2\theta_0\ddot{\varphi} + C\dot{r} + (B-A)pq = 0,$$

$$mb^2\sin\theta_0\dot{\varphi}\dot{\psi} + [A\dot{p} + (C-B)qr]\cos\varphi$$
$$-[B\dot{q} + (A-C)pr]\sin\varphi = 0.$$

Замествайки p, q, r с техните равни, получаваме уравненията

$$\frac{d}{dt}[Ap\sin\theta_0\sin\varphi + Bq\sin\theta_0\cos\varphi + Cr\cos\theta_0] = 0,$$

$$\frac{d}{dt}[mb^2\sin^2\theta_0\dot{\varphi} + Cr] + (B-A)\sin^2\theta_0\dot{\psi}^2\sin\varphi\cos\varphi = 0,$$

$$\frac{d}{dt}[Ap\cos\varphi - Bq\sin\varphi] = \dot{\psi}[\cos\theta_0(Ap\sin\varphi + Bq\cos\varphi) - \sin\theta_0(Cr + mb^2\dot{\varphi})].$$

Нека още $\psi = \psi_0$. Тогава $p = q = 0$, $r = \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$, $\varphi = \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0$. За траекторията на допирната точка получаваме

$$\begin{aligned} x &= -b\dot{\varphi}_0\sin\theta_0\cos\psi_0 t + x_0, \\ y &= -b\dot{\varphi}_0\sin\theta_0\sin\psi_0 t + y_0. \end{aligned}$$

В случая $\theta = \theta_0$, $\psi = \psi_0$ допирната точка отново описва права и кълбото се търкаля с ъглова скорост $|\bar{\omega}| = \dot{\varphi}_0$,

$$\overline{\omega} = \dot{\varphi}_0\sin\theta_0\sin\psi_0 i - \dot{\varphi}_0\sin\theta_0\cos\psi_0 j + \dot{\varphi}_0\cos\theta_0 k.$$

4. Полагаме $\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0$. В уравненията (9) заместваме $\varphi = \varphi_0$:

$$[A(\sin\varphi_0\sin\theta_0)^2 + B(\sin\theta_0\cos\varphi_0)^2 + C\cos^2\theta_0]\dot{\psi} = C_1,$$

$$C\cos\theta_0\ddot{\psi} = \dot{\psi}^2(A-B)\sin^2\theta_0\sin\varphi_0\cos\varphi_0,$$

$$(A-B)\sin\varphi_0\cos\varphi_0\sin\theta_0\ddot{\psi} = \dot{\psi}^2\sin\theta_0\cos\theta_0(A\sin^2\varphi_0 + B\cos^2\varphi_0 - C).$$

От първото уравнение получаваме $\dot{\psi} = \text{const} = \dot{\psi}_0$. Очевидно $\ddot{\psi} = 0$. За да е изпълнено това условие, коефициентите пред $\dot{\psi}$ във второто и третото уравнение трябва да са равни на нула. Това е изпълнено например в случая $\varphi_0 = 0$ и $B = C$.

И така, в случая $\theta = \theta_0$, $\varphi = 0$ и $A = B = C$ кълбото ще се върти около вертикална ос с ъглова скорост $\omega = \dot{\psi}_0 k$.

5. Нека $A = B$ — случай на динамична симетрия относно оста $C\zeta$. Уравненията на движение имат вида

$$[A\dot{p} + (C-A)qr]\sin\theta\sin\varphi + [A\dot{q} + (A-C)pr]\sin\theta\cos\varphi$$
$$+C\dot{r}\cos\theta = 0,$$
$$mb^2\sin\theta[\ddot{\varphi}\sin\theta + \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}\dot{\psi}] + C\dot{r} = 0,$$
$$mb^2[\ddot{\theta} + \dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta] + [A\dot{p} + (C-A)qr]\cos\varphi$$

$$-[A\dot{q} + (A - C)pr]\sin\varphi = 0.$$

Нека $\theta = \theta_0$, тогава

$$A\sin^2\theta_0 \frac{d}{dt}\dot{\psi} + C\cos\theta_0 \frac{d}{dt}(\dot{\psi}\cos\theta_0 + \dot{\varphi}) = 0,$$

$$mb^2\sin^2\theta_0 \frac{d}{dt}\dot{\varphi} + \cos\frac{d}{dt}(\dot{\psi}\cos\theta_0 + \dot{\varphi}) = 0,$$

$$[(mb^2 + C)\dot{\varphi}\sin\theta_0 + (C - A)\sin\theta_0\cos\theta_0\dot{\psi}]\dot{\psi} = 0.$$

От третото уравнение получаваме

$$\dot{\psi} = 0, \qquad \dot{\psi} = \frac{mb^2 + C}{(A - C)\cos\theta_0}\dot{\varphi}.$$

Нека $\dot{\psi} \neq 0$ (първият случай е тривиален). Умножаваме второто уравнение с $\cos\theta_0$ и го изваждаме от първото

$$A\frac{d}{dt}\dot{\psi} - mb^2\cos\theta_0 \frac{d}{dt}\dot{\varphi} = 0,$$

$$A\dot{\psi} - mb^2\cos\theta_0\dot{\varphi} = C_1$$

или

$$\dot{\psi} = \frac{C_1}{A} - \frac{mb^2\cos\theta_0}{A}\dot{\varphi}.$$

За да съществува решение на системата, интеграционната константа C_1 трябва да е равна на нула и да съществува зависимостта

$$\frac{mb^2 + C}{(A - C)\cos\theta_0} = \frac{mb^2\cos\theta_0}{A}.$$

Тъй като $|\cos\theta_0| < 1$, имаме

$$\frac{A(mb^2 + C)}{mb^2(A - C)} < 1, \quad A > C,$$

$$mb^2A + AC < mb^2A - mb^2C,$$

$$A < -mb^2 < 0 \text{ — противоречие}$$

$$A < C, \quad mb^2A + AC < mb^2C - mb^2A,$$

(10) $$A < \frac{mb^2C}{2mb^2 + C}.$$

И така, при направените предположения $A = B$, $\theta = \theta_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и (10) намираме, че ъглите ψ и φ ще се изменят по линеен закон

$$\psi = \dot{\psi}_0 t + \psi_0, \qquad \varphi = \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0.$$

От

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= b\omega_y = -b\dot{\varphi}_0 \sin\theta_0 \cos(\dot{\psi}_0 t + \psi_0), \\
\dot{y} &= b\omega_x = -b\dot{\varphi}_0 \sin\theta_0 \sin(\dot{\psi}_0 t + \psi_0), \\
x &= -k\sin(\dot{\psi}_0 t + \psi_0), \qquad k = \frac{b\dot{\varphi}_0 \sin\theta_0}{\dot{\psi}_0}, \\
y &= k\cos(\dot{\psi}_0 t + \psi_0),
\end{aligned}$$

за траекторията на допирната точка получаваме окръжност $x^2 + y^2 = k^2$.

6. Нека $A = B = C$ — класическия случай на търкаляне без хлъзгане на хомогенна сфера върху неподвижна равнина. Уравненията на движението са

$$(11) \qquad \ddot{\psi} + \ddot{\varphi}\cos\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta = 0,$$

$$mb^2 \sin\theta(\ddot{\varphi}\sin\theta + \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}\dot{\psi}) + A(\ddot{\psi}\cos\theta + \ddot{\varphi} - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta) = 0,$$

$$(mb^2 + A)(\ddot{\theta} + \dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta) = 0.$$

От (11) получаваме

$$\omega_x = \text{const}, \qquad \omega_y = \text{const}, \qquad \omega_z = \text{const},$$

откъдето се вижда, че векторът ω е постоянен.

Уравнения на движение на нехомогенно кълбо, когато масовият център G не съвпада с геометричния му център C.

В този случай да въведем подвижна координатна система $G\xi\eta\zeta$ с начало в масовия център. Да означим с ξ_0, η_0, ζ_0 координатите на геометричния център на кълбото спрямо осите на $G\xi\eta\zeta$. Очевидно ξ_0, η_0 и ζ_0 са константи. Векторът

$$\overline{GC} = \xi_0\overline{\xi}^0 + \eta_0\overline{\eta}^0 + \zeta_0\overline{\zeta}^0$$

определя положението на C спрямо главните инерчни оси $G\xi$, $G\eta$ и $G\zeta$. За да изведем уравненията на движение, прилагаме уравненията на Апел в квазикоординати

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\mu}_i} = Q_{\mu_i}, \qquad i = 1,\ 2,\ 3,$$

където квазикоординатите за разглежданата система се определят от равенствата $\dot{\mu}_1 = p$, $\dot{\mu}_2 = q$, $\dot{\mu}_3 = r$. И тук за обобщените сили получаваме $Q_{\mu_1} = Q_{\mu_2} = Q_{\mu_3} = 0$. Енергията на ускорението за този случай е

$$S = \frac{1}{2}mw_G^2 + \frac{1}{2}(A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2 + C\dot{r}^2)$$

$$+\dot{p}qr(C - B) + \dot{q}rp(A - C) + \dot{r}pq(B - A) + \dots,$$

където както и по-рано с многоточие са означени величините, не жащи $\dot{p}$, $\dot{q}$ и $\dot{r}$. Условието за търкаляне без хлъзгане на допирната приложено за масовия център G, дава

$$v_G + \omega \times GH = 0,$$

откъдето следва

$$w_G = \dot{\omega} \times GH + \omega \times \dot{GH}. \tag{12}$$

Повдигайки (12) в квадрат, получаваме

$$w_G^2 = \dot{\omega}^2 (GH)^2 - (\dot{\omega}.GH)^2 + (\omega.\dot{\omega})\frac{d}{dt}(GH)^2 \tag{13}$$
$$-2(\omega.GH)(\dot{\omega}.\dot{GH}) + \dots$$

От уравненията на Апел в квазикоординати и (13) намираме

$$A\dot{p} - (B-C)qr + m\dot{p}(GH)^2 - m(\dot{\omega}.GH)(GH)_\xi \tag{14}$$
$$+\frac{m}{2}p\frac{d}{dt}(GH)^2 - m(\dot{\omega}\cdot GH)(\dot{GH})_\xi = mg(\eta_0 a_{33} - \zeta_0 a_{32}),$$
$$B\dot{q} - (C-A)rp + m\dot{q}(GH)^2 - m(\dot{\omega}.GH)(GH)_\eta$$
$$+\frac{m}{2}q\frac{d}{dt}(GH)^2 - m(\omega.GH)(\dot{GH})_\eta = mg(\zeta_0 a_{31} - \xi_0 a_{33}),$$
$$C\dot{r} - (A-B)pq + m\dot{r}(GH)^2 - m(\dot{\omega}.GH)(GH)_\zeta$$
$$+\frac{m}{2}r\frac{d}{dt}(GH)^2 - m(\omega.GH)(\dot{GH})_\zeta = mg(\xi_0 a_{32} - \eta_0 a_{31}),$$
$$GH = \xi_0\xi^0 + \eta_0\eta^0 + \zeta_0\zeta^0 - bk,$$

откъдето за величините в (14) получаваме

$$(GH)^2 = b^2 + \xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 - 2b\xi_0 a_{31} - 2b\eta_0 a_{32} - 2b\zeta_0 a_{33},$$
$$\frac{d}{dt}(GH)^2 = -2b\xi_0\dot{a}_{31} - 2b\eta_0\dot{a}_{32} - 2b\zeta_0\dot{a}_{33},$$
$$(\dot{GH})_\xi = \zeta_0 q - \eta_0 r - b(\dot{a}_{31} - qa_{33} - ra_{32}),$$
$$(\dot{GH})_\eta = \xi_0 r - \zeta_0 p - b(\dot{a}_{32} + ra_{31} - pa_{33}),$$
$$(\dot{GH})_\zeta = \eta_0 p - \xi_0 q - b(\dot{a}_{33} - pa_{32} - qa_{31}),$$
$$\dot{\omega}.GH = \dot{p}(\xi_0 - ba_{31}) + \dot{q}(\eta_0 - ba_{32}) + \dot{r}(\zeta_0 - ba_{33}),$$
$$\omega.GH = p(\xi_0 - ba_{31}) + q(\eta_0 - ba_{32}) + r(\zeta_0 - ba_{33}).$$

Интегралът на енергията в този случай ще има вида

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + m\omega^2 GH^2 - m(\omega.GH)^2 = h - 2mgz_G,$$

където

$$z_G = b - \xi_0 a_{31} - \eta_0 a_{32} - \zeta_0 a_{33}.$$

II. УРАВНЕНИЯ НА ДВИЖЕНИЕТО НА НЕХОМОГЕННО КЪЛБО ПРИ ТЪРКАЛЯНЕ БЕЗ ХЛЪЗГАНЕ ВЪРХУ ПРОИЗВОЛНА АБСОЛЮТНО ГРАПАВА ПОВЪРХНИНА, КОЯТО СЕ ВЪРТИ РАВНОМЕРНО ОКОЛО ВЕРТИКАЛНА ОС

Ще предполагаме, че повърхнината, върху която се търкаля кълбото, се върти равномерно около вертикалната ос на неподвижна инерциална дясна координатна система $Oxyz$. Движещото се кълбо в общия случай е нехомогенно, но ще изискваме геометричният му център да съвпада с масовия, в който отново неподвижно с тялото е фиксирана ортогонална координатна система $G\xi\eta\zeta$ от главните инерчни оси за кълбото. Предполагаме, че кълбото се движи и тук по инерция под действие на теглото си.

Ще използваме следните означения :
$R = OH$ — радиус-вектор на допирната точка на кълбото с повърхнината, n^0 — единичен външен нормален вектор към повърхнината в допирната точка H, $\Omega = \Omega k$ ($\Omega = \mathrm{const}$) — ъглова скорост на повърхнината.

Да изведем уравненията на движение с помощта на уравненията на Апел в квазикоординати.

От формулата за разпределение на скоростите в твърдо тяло отново получаваме

$$v_H = v_G + \omega \times GH, \qquad GH = -bn^0,$$

откъдето

$$v_G = v_H + b(\omega \times n^0).$$

V_H — скорост на допирната точка на кълбото с повърхнината. Ако считаме точката H принадлежаща на повърхнината, то

$$v_H = \Omega \times R,$$

поради което

$$v_G = b(\omega \times n^0) + \Omega \times R \tag{15}$$

са уравненията на нехолономните връзки.

За квазикоординати и тук ще изберем компонентите на ъгловата скорост на кълбото върху подвижните оси :

$$\dot{\mu}_1 = p, \qquad \dot{\mu}_2 = q, \qquad \dot{\mu}_3 = r.$$

За определянето на обобщените сили ще използваме формулите

$$Q_{\mu_i} = \sum_{\nu=1}^{N} F_\nu a_{\nu_i}, \qquad i = 1,\ 2,\ 3,$$

където F_ν са активните сили.

Скоростите на точките от системата и квазискоростите са свърза[...] със зависимостта

$$v_\nu = \sum_{i=1}^{3} a_{\nu i}\dot{\mu}_i + b_\nu, \qquad (\nu = 1, \dots, N),$$

където N означава броя на точките на системата.

От формулата за разпределение на скоростите на точките в твър[...] тяло получаваме $v_\nu = v_G + \omega \times \rho_\nu$, откъдето

$$v_\nu = b(\omega \times n^0) + \Omega \times R + \omega \times \rho_\nu, \tag{16}$$

или в проекции върху неподвижните оси :

$$\dot{\xi}_\nu = b(qn_\zeta - rn_\eta) + q\zeta_\nu - r\eta_\nu + [\Omega \times R]_\xi,$$

$$\dot{\eta}_\nu = b(rn_\xi - pn_\zeta) + r\xi_\nu - p\zeta_\nu + [\Omega \times R]_\eta,$$

$$\dot{\zeta}_\nu = b(pn_\eta - qn_\xi) + p\eta_\nu - q\xi_\nu + [\Omega \times R]_\zeta,$$

където n_ξ, n_η, n_ζ са проекциите на единичния външен нормален векто[...] n^0 върху подвижните оси $G\xi\eta\zeta$, ξ_ν, η_ν, ζ_ν и $\dot{\xi}_\nu$, $\dot{\eta}_\nu$, $\dot{\zeta}_\nu$ — съответно прое[...] циите на радиус-вектора на произволна точка от кълбото и на скорост[...] спрямо същите оси.

От (16) следва

$$\dot{\xi}_\nu = 0\dot{\mu}_1 + (bn_\zeta + \zeta_\nu)\dot{\mu}_2 - (bn_\eta + \eta_\nu)\dot{\mu}_3 + [\Omega \times R]_\xi,$$

$$\dot{\eta}_\nu = -(bn_\zeta + \zeta_\nu)\dot{\mu}_1 + 0\dot{\mu}_2 + -(bn_\xi + \xi_\nu)\dot{\mu}_3 + [\Omega \times R]_\eta,$$

$$\dot{\zeta}_\nu = (bn_\eta + \eta_\nu)\dot{\mu}_1 - (bn_\xi + \xi_\nu)\dot{\mu}_2 + 0\dot{\mu}_3 + [\Omega \times R]_\zeta,$$

$$\Omega \times R = [\Omega \times R]_\xi \xi^0 + [\Omega \times R]_\eta \eta^0 + [\Omega \times R]_\zeta \zeta^0.$$

$$v_\nu = \sum_{i=1}^{3} a_{\nu i}\dot{\mu}_i + b_\nu \qquad (\nu = 1, \dots, N),$$

където

$$\begin{aligned} a_{\nu 1} &= -(bn_\zeta + \zeta_\nu)\eta^0 + (bn_\eta + \eta_\nu)\zeta^0, \\ a_{\nu 2} &= (bn_\xi + \xi_\nu)\zeta^0 - (bn_\zeta + \zeta_\nu)\xi^0, \\ a_{\nu 3} &= -(bn_\eta + \eta_\nu)\xi^0 + (bn_\xi + \xi_\nu)\eta^0. \end{aligned} \tag{17}$$

Отчитайки (17) и факта, че G е масов център на кълбото, а единствената активна сила е теглото, получаваме следните стойности за обобщените сили :

$$(18) \qquad \begin{aligned} Q_{\mu_1} &= mgb(n_\zeta a_{32} - n_\eta a_{33}),\\ Q_{\mu_2} &= mgb(n_\xi a_{33} - n_\zeta a_{31}),\\ Q_{\mu_3} &= mgb(n_\eta a_{31} - n_\xi a_{32}). \end{aligned}$$

За определяне на енергията на ускорението S,

$$S = \frac{1}{2}mw_G^2 + \frac{1}{2}(A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2 + C\dot{r}^2) + (C-B)\dot{p}qr + (A-C)\dot{q}rp + (B-A)\dot{r}pq + \dots$$

ще пресметнем ускорението на масовия център:

$$w_G = \frac{d}{dt}[b(\omega \times n^0) + (\Omega \times R)] = b(\dot{\omega} \times n^0 + \omega \times \dot{n}^0) + \Omega \times \dot{R},$$

$$w_G^2 = b^2(\dot{\omega} \times n^0)^2 + 2b^2(\dot{\omega} \times n^0)(\omega \times \dot{n}^0) + 2b(\Omega \times \dot{R})(\dot{\omega} \times n^0) + \dots,$$

където с многоточие са означени членовете, несъдържащи $\dot{\omega}$. Нека имаме представянето

$$R = R_\xi \xi^0 + R_\eta \eta^0 + R_\zeta \zeta^0.$$

Тогава

$$\dot{n}^0 = (\dot{n}_\xi + qn_\zeta - rn_\eta)\xi^0 + (\dot{n}_\eta + rn_\xi - pn_\zeta)\eta^0 + (\dot{n}_\zeta + pn_\eta - qn_\xi)\zeta^0,$$

$$\dot{R} = (\dot{R}_\xi + qR_\zeta - rR_\eta)\xi^0 + (\dot{R}_\eta + rR_\xi - pR_\zeta)\eta^0 + (\dot{R}_\zeta + pR_\eta - qR_\xi)\zeta^0.$$

След преработване на израза за w_G^2 :

$$(\dot{\omega} \times n^0)^2 = [n^0 \times (\dot{\omega} \times n^0)].\omega = (\dot{\omega})^2 - (\dot{\omega}.n^0)^2,$$

$$(\dot{\omega} \times n^0).(\omega \times \dot{n}^0)] = (\dot{R}.n^0).(\Omega.\dot{\omega}) - (\Omega.n^0)(\dot{R}\dot{\omega}),$$

$$\begin{gathered} w_G^2 = b^2[\dot{\omega}^2 - (\dot{\omega}.n^0)^2] - 2b^2(\omega.n^0)(\dot{\omega}.n^0)\\ +2b[(\dot{R}.n^0)(\Omega.\dot{\omega}) - (\Omega.n^0)(\dot{R}.\dot{\omega})] + \dots \end{gathered}$$

от уравненията на Апел в квазикоординати получаваме следните уравнения на движението :

$$(19) \qquad \begin{gathered} A\dot{p} - (B-C)qr + mb^2\dot{p} - mb^2 n_\xi(\dot{\omega}.n^0) + mb\Omega_\xi(\dot{R}.n^0)\\ -mb^2(\omega.n^0)(\dot{n}_\xi + qn_\zeta - rn_\eta) - mb(\Omega.n^0)(\dot{R}_\xi + qR_\zeta - rR_\eta)\\ = mgb(n_\zeta a_{32} - n_\eta a_{33}),\\ B\dot{q} - (C-A)rp + mb^2\dot{q} - mb^2 n_\eta(\dot{\omega}.n^0) + mb\Omega_\eta(\dot{R}.n^0)\\ -mb^2(\omega.n^0)(\dot{n}_\eta + rn_\xi - pn_\zeta) - mb(\Omega.n^0)(\dot{R}_\eta + rR_\xi - pR_\zeta) \end{gathered}$$

$$= mgb(n_\xi a_{33} - n_\zeta a_{31}),$$

$$C\dot{r} - (A-B)pq + mb^2\dot{r} - mb^2 n_\zeta(\dot{\omega}.n^0) + mb\Omega_\zeta(\dot{R}.n^0)$$

$$-mb^2(\omega.n^0)(\dot{n}_\zeta + pn_\eta - qn_\xi) - mb(\Omega.n^0)(\dot{R}_\zeta + pR_\eta - qR_\xi)$$

$$= mgb(n_\eta a_{31} - n_\xi a_{32}),$$

където с Ω_ξ, Ω_η, Ω_ζ сме означили проекциите на ъгловата скорост Ω върху подвижните оси.

Към уравненията (19) прибавяме уравненията на нехолономните връзки (15), с което получаваме пет обикновени диференциални уравнения за определяне на петте обобщени координати x_G, y_G, φ, θ, ψ във функция на времето.

III. ТЪРКАЛЯНЕ НА НЕХОМОГЕННО КЪЛБО ВЪРХУ АБСОЛЮТНО ГРАПАВ РАВНОМЕРНО ВЪРТЯЩ СЕ РОТАЦИОНЕН ЕЛИПСОИД

За да получим диференциалните уравнения, описващи движението на нехомогенно кълбо върху ротационен елипсоид, достатъчно е да заместим векторите R и n^0 с техните стойности за конкретната повърхнина. Нека Oz е ос на ротация на елипсоида. Произволна точка от повърхнината му има следния радиус-вектор :

(20) $$R = a\cos\alpha\sin\beta i + a\sin\alpha\sin\beta j + c\cos\beta k,$$

$$a = \text{const}, \qquad c = \text{const}, \qquad a > c > 0, \qquad \alpha \in [0,\ 2\pi], \qquad \beta \in [0,\ \pi],$$

а външният единичен нормален вектор в тази точка има представянето

(21) $$n^0 = a_1\cos\alpha\sin\beta i + a_1\sin\alpha\sin\beta j + c_1\cos\beta k,$$

където

(22) $$\begin{aligned} a_1 &= c(a^2\cos^2\beta + c^2\sin^2\beta)^{-\frac{1}{2}}, \\ c_1 &= a(a^2\cos^2\beta + c^2\sin^2\beta)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

За параметри на движението ще изберем гаусовите ъгли α, β и ойлеровите ъгли φ, θ, ψ, изменящи се в границите $0 \leqq \varphi < 2\pi$, $0 \leqq \psi < 2\pi$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$. Използувайки известните съотношения между директорните косинуси, определящи положението на единичните вектори ξ^0, η^0, ζ^0 спрямо i, j, k и проекциите на ъгловата скорост върху подвижните оси, ще получим от (15) и (19) система обикновени диференциални уравнения относно обобщените координати, интегрирането на която в общия случай е много трудно. Ето защо ще се ограничим с разглеждането на частния случай, в който нехомогенното кълбо притежава динамична ос на симетрия и допирната му точка описва "външен" или "вътрешен паралел" върху елипсоида, използувайки метода, развит в [7]. Ще казваме, че допирната точка на кълбото с елипсоида описва съответно "външен" или "вътрешен паралел", ако е изпълнено условието

$$\beta = \beta_0 = \text{const} \tag{23}$$

и съответно неравенството

$$GH.n^0 < 0 \qquad \text{или} \qquad GH.n^0 > 0. \tag{24}$$

Да разгледаме поотделно двата случая.

Нека допирната точка описва "външен паралел" върху елипсоида. Тогава

$$GH = -bn^0 \qquad \text{и} \qquad GH.n^0 < 0. \tag{25}$$

В проекции на неподвижните оси нехолономните връзки (15) имат вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_G &= b(\omega_y c_1 \cos\beta_0 - \omega_z a_1 \sin\alpha \sin\beta_0) - \Omega a \sin\alpha \sin\beta_0, \\ \dot{y}_G &= b(\omega_z a_1 \cos\alpha \sin\beta_0 - \omega_x c_1 \cos\beta_0) - \Omega a \cos\alpha \sin\beta_0, \\ \dot{z}_G &= b(\omega_x a_1 \sin\alpha \sin\beta_0 - \omega_y a_1 \cos\alpha \sin\beta_0), \end{aligned} \tag{26}$$

където $\Omega = |\Omega|$ и ω_x, ω_y и ω_z определяме от (5).

От $r_G = R + bn^0$, или в проекции на неподвижните оси:

$$\begin{aligned} x_G &= (a + ba_1)\cos\alpha \sin\beta_0, \\ y_G &= (a + ba_1)\sin\alpha \sin\beta_0, \\ z_G &= (c + bc_1)\cos\beta_0, \end{aligned} \tag{27}$$

откъдето получаваме

$$\begin{aligned} \dot{x}_G &= -\dot{\alpha}(a + ba_1)\sin\alpha \sin\beta_0, \\ \dot{y}_G &= \dot{\alpha}(a + ba_1)\cos\alpha \sin\beta_0, \\ \dot{z}_G &= 0. \end{aligned} \tag{28}$$

От (26), (27) и (28) следва уравнението

$$a_1\dot{\theta}\sin\beta_0 \sin(\alpha - \psi) + a_1\dot{\varphi}\sin\beta_0 \sin\theta \cos(\alpha - \psi) = 0,$$

което има частно решение

$$\theta = \theta_0 = \text{const}, \qquad \alpha = \psi + \frac{\pi}{2}. \tag{29}$$

Уравненията (26) с отчитане на (27), (28) и (29) водят до зависимостта

$$(30) \qquad \dot{\psi} = \lambda\dot{\varphi} + \Omega,$$

където

$$\lambda = \frac{b}{a \sin\beta_0}(a_1 \cos\theta_0 \sin\beta_0 + c_1 \sin\theta_0 \cos\beta_0),$$

като сме изключили случаите $\beta_0 = 0$ и $\beta_0 = \pi$.

Допускането (23) позволява намирането на пръв интеграл за системата (19), който в този случай има вида

$$(31) \qquad Apa_{31} + Bqa_{32} + Cra_{33} + a_1^2 b^2 \dot{\alpha}^2 \sin^2\beta_0 = c_1,$$

където

$$(32) \qquad \begin{aligned} a_{31} &= \sin\varphi \sin\theta, \\ a_{32} &= \cos\varphi \sin\theta, \\ a_{33} &= \cos\theta, \end{aligned}$$

и p, q, r намираме от (4).

Замествайки a_{31}, a_{32}, a_{33} от (32) и p, q, r от (4) в (31) и отчитайки (29) и (30), като допуснем още, че кълбото има динамична ос на симетрия оста $O\zeta$, т.е. е изпълнено равенството $A = B$, стигаме до заключението, че

$$(33) \qquad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = \text{const}.$$

Получените изрази за обобщените координати е необходимо да удовлетворяват уравненията (19). Последното от тях се изпълнява тъждествено за намереното решение, а всяко едно от първите две се свежда до квадратно уравнение относно $\dot{\varphi}_0$:

$$(34) \qquad L\dot{\varphi}_0^2 + Q\dot{\varphi}_0 + W = 0,$$

където

$$(35) \qquad L = \lambda^2(C - A)\sin\theta_0 \cos\theta_0 + \lambda\Phi,$$

$$Q = \Omega[2\lambda(C - A)\sin\theta_0 \cos\theta_0 + mb\lambda c_1(a + ba_1)\sin\beta_0 \cos\beta_0 + \Phi],$$

$$W = \Omega^2[(C - A)\sin\theta_0 \cos\theta_0 + mbc_1(a + ba_1)\sin\beta_0 \cos\beta_0]$$
$$+ mgba_1 \sin\beta_0,$$

$$\Phi = C\sin\theta_0 + mb^2 \sin\theta_0 + mb^2\lambda c_1 a_1 \sin\beta_0 \cos\beta_0$$
$$+ mb^2 a_1 \sin\beta_0(c_1 \cos\beta_0 \cos\theta_0 - a_1 \sin\beta_0 \sin\theta_0).$$

Необходимо и достатъчно условие (34) да има реално решение е

$$Q^2 - 4LW \geqq 0, \tag{36}$$

което поради (35) ще има вида

$$\Omega^2[mb\lambda c_1(a+ba_1)\sin\beta_0\cos\beta_0 - \Phi]^2 \geqq (4mgba_1\sin\beta_0)L.$$

Следователно, ако горното неравенство е изпълнено, системата (15), (19) допуска следното частно решение :

$$\begin{aligned} \alpha &= \psi + \frac{\pi}{2}, \qquad \beta = \beta_0 = \text{const}, \\ \varphi &= \dot\varphi_0 t + \varphi_0, \\ \psi &= (\lambda\dot\varphi_0 + \Omega)t + \psi_0, \\ \theta &= \theta_0 = \text{const}, \end{aligned} \tag{37}$$

където φ_0 и ψ_0 са начални условия, а $\dot\varphi_0$ се определя по формулата

$$\dot\varphi_0 = \frac{-Q \pm (Q^2 - 4LW)^{\frac{1}{2}}}{2L} \qquad (L \neq 0). \tag{38}$$

При движение на кълбото по външната стена на елипсоида нормалната реакция в допирната точка ще съвпада с посоката на външната нормала в тази точка, което означава, че кълбото оказва натиск върху повърхнината. За да намерим нормалната реакция, ще приложим теоремата за изменението на количеството на движение, която в нашия случай има вида

$$m\frac{dv_G}{dt} = -mgk + N, \tag{39}$$

където с N сме означили реакцията на връзката в допирната точка. Ще изискваме

$$N.n^0 > 0. \tag{40}$$

Умножавайки скаларно двете страни на (39) с n^0 и отчитайки (40), стигаме до неравенството

$$\dot v_G.n^0 < mgc_1\cos\beta,$$

което поради (23) се свежда до

$$\dot\alpha^2 < \frac{c_1 g\cos\beta_0}{a_1(a+ba_1)\sin^2\beta_0}, \tag{41}$$

откъдето следва, че $0 < \beta_0 < \frac{\pi}{2}$. От (41) и (30) получаваме

$$(\lambda\dot\varphi_0 + \Omega)^2 < \Gamma^2,$$

където сме означили

$$\Gamma = \left[\frac{c_1 g \cos\beta_0}{a_1(ba_1 + a)\sin^2\beta_0}\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad \Gamma > 0.$$

Оттук следват неравенствата

$$-(\Gamma + \Omega) < \lambda\dot{\varphi}_0 < \Gamma - \Omega,$$

или

(42) $$-\frac{\varepsilon\Gamma + \Omega}{\lambda} < \dot{\varphi}_0 < \frac{\varepsilon\Gamma - \Omega}{\lambda},$$

като предполагаме, че $\lambda \neq 0$,

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \lambda > 0, \\ -1, & \lambda < 0. \end{cases}$$

От (42) следва, че поне един от корените на (34) е необходимо да принадлежи на интервала

$$\left(-\frac{\varepsilon\Gamma + \Omega}{\lambda}, \frac{\varepsilon\Gamma - \Omega}{\lambda}\right),$$

необходимо и достатъчно условие за което е изпълнението на следните системи неравенства :

(43) $$Q^2 - 4LW > 0,$$

$$L\left[L\left(-\frac{\varepsilon\Gamma + \Omega}{\lambda}\right)^2 + Q\left(-\frac{\varepsilon\Gamma + \Omega}{\lambda}\right) + W\right] > 0,$$

$$L\left[L\left(\frac{\varepsilon\Gamma - \Omega}{\lambda}\right)^2 + Q\left(\frac{\varepsilon\Gamma - \Omega}{\lambda}\right) + W\right] < 0,$$

или

(44) $$Q^2 - 4LW > 0,$$

$$L\left[L\left(-\frac{\varepsilon\Gamma + \Omega}{\lambda}\right)^2 + Q\left(-\frac{\varepsilon\Gamma + \Omega}{\lambda}\right) + W\right] < 0,$$

$$L\left[L\left(\frac{\varepsilon\Gamma - \Omega}{\lambda}\right)^2 + Q\left(\frac{\varepsilon\Gamma - \Omega}{\lambda}\right) + W\right] > 0,$$

или условието (36) заедно с

$$(45)\qquad L\left[L\left(-\frac{\varepsilon\Gamma+\Omega}{\lambda}\right)^2+Q\left(-\frac{\varepsilon\Gamma+\Omega}{\lambda}\right)+W\right]>0,$$

$$L\left[L\left(\frac{\varepsilon\Gamma-\Omega}{\lambda}\right)^2+Q\left(\frac{\varepsilon\Gamma-\Omega}{\lambda}\right)+W\right]>0,$$

$$-\frac{\varepsilon\Gamma+\Omega}{\lambda}<\frac{-Q}{2L}<\frac{\varepsilon\Gamma-\Omega}{\lambda}.$$

И така, показахме, че достатъчно условие нехомогенно кълбо, притежаващо динамична ос на симетрия, да се търкаля върху абсолютно грапав равномерно въртящ се ротационен елипсоид така, че допирната му точка да описва "външен паралел" за елипсоида, е обобщените координати да удовлетворяват съотношенията (37) и (38) при съблюдаване на системите неравенства (43) или (44), или (36) наред с (45).

Винаги можем да предполагаме, че

$$\lambda\neq 0,\quad L\neq 0,\quad mb\lambda c_1(a+ba_1)\sin\beta_0\cos\beta_0-\varphi=c\sin\theta_0\neq 0$$

поради свободата, която имаме при избора на ъгъла θ.

От формулата за λ следва, че

$$\lambda=0\Leftrightarrow \mathrm{tg}\theta_0=-\frac{c}{a}\mathrm{tg}\beta_0,\qquad \theta_0\neq\frac{\pi}{2}.$$

Тогава ще имаме $L=0$, а условието (41) се свежда до $\Omega^2<\Gamma^2$.

Ще се спрем накратко и на случая на търкаляне на нехомогенно кълбо по вътрешната стена на абсолютно грапав равномерно въртящ се ротационен елипсоид.

В този случай е изпълнено неравенството

$$(46)\qquad GH.n^0>0$$

наред с необходимото условие

$$(47)\qquad b<\frac{c^2}{a}.$$

Уравненията на нехолономните връзки имат следното векторно записване:

$$(48)\qquad v_G=-b(\omega\times n^0)+\Omega\times R,$$

което води до промяна във вида на уравненията (19), които в този случай са:

$$(49)\qquad A\dot{p}-(B-C)qr+mb^2\dot{p}-mb^2n_\xi(\dot{\omega}.n^0)-mb\Omega_\xi(\dot{R}.n^0)$$

$$-mb^2(\omega.n^0)(\dot{n}_\xi + qn_\zeta - rn_\eta) + mb(\Omega.n^0)(\dot{R}_\xi + q\dot{R}_\zeta - rR_\eta)$$
$$= mgb(a_{33}n_\eta - a_{32}n_\zeta),$$
$$B\dot{q} - (C - A)rp + mb^2\dot{q} - mb^2 n_\eta(\dot{\omega}.n^0) - mb\Omega_\eta(\dot{R}.n^0)$$
$$-mb^2(\omega.n^0)(\dot{n}_\eta + rn_\xi - pn_\zeta) + mb(\Omega.n^0)(\dot{R}_\eta + rR_\xi - pR_\zeta)$$
$$= mgb(a_{31}n_\zeta - a_{33}n_\xi),$$
$$C\dot{r} - (A - B)pq + mb^2\dot{r} - mb^2 n_\zeta(\dot{\omega}.n^0) - mb\Omega_\zeta(\dot{R}.n^0)$$
$$-mb^2(\omega.n^0)(\dot{n}_\zeta + pn_\eta - qn_\xi) + mb(\Omega.n^0)(\dot{R}_\zeta + pR_\eta - qR_\xi)$$
$$= mgb(a_{32}n_\xi - a_{31}n_\eta).$$

По определение, ако са налице условията (23), (46) и (47), ще казваме, че допирната точка на кълбото с елипсоида описва "вътрешен паралел" върху него. С разсъждения, аналогични на тези от предишния случай, стигаме до следното частно решение на уравненията (48) и (49) при условията (23), (46), (47) и ограничението $A = B$:

$$\alpha = \psi + \frac{\pi}{2}, \qquad \beta = \beta_0 = \text{const}, \tag{50}$$
$$\varphi = \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0, \qquad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = \text{const},$$
$$\psi = (\lambda_1\dot{\varphi}_0 + \Omega)t + \psi_0,$$
$$\theta = \theta_0 = \text{const},$$

където φ_0 и ψ_0 са началните условия, $\lambda_1 = -\lambda$, а $\dot{\varphi}_0$ се определя от квадратното уравнение
$$L_1\dot{\varphi}_0^2 + Q_1\dot{\varphi}_0 + W_1 = 0,$$
където
$$L_1 = \lambda_1^2(C - A)\sin\theta_0\cos\theta_0 + \lambda_1\Phi_1,$$
$$Q_1 = \Omega[2\lambda_1(C - A)\sin\theta_0\cos\theta_0 - mb\lambda_1 c_1(a - ba_1)\sin\beta_0\cos\beta_0 + \Phi_1],$$
$$W_1 = \Omega^2[(C - A)\sin\theta_0\cos\theta_0 - mbc_1(a - ba_1)\sin\beta_0\cos\beta_0]$$
$$-mgba_1\sin\beta_0,$$
$$\Phi_1 = C\sin\theta_0 + mb^2\sin\theta_0 + mb^2\lambda_1 c_1 a_1\sin\beta_0\cos\beta_0$$
$$+mb^2 a_1\sin\beta_0(c_1\cos\theta_0\cos\beta_0 - a_1\sin\beta_0\sin\theta_0),$$
като предполагаме, че $Q_1^2 - 4L_1W_1 \geqq 0$.

Изискването кълбото да оказва натиск върху вътрешната стена на елипсоида, когато са изпълнени (23) и (47), се дава с неравенството

$$\dot{\alpha}^2 > \frac{gc_1\cos\beta_0}{a_1(a - ba_1)\sin^2\beta_0}, \tag{51}$$

като сме изключили случаите $\beta_0 = 0$ и $\beta_0 = \pi$.

Поради условието (51) е удобно да изберем θ_0 съобразно (45). Тогава $\lambda_1 = 0$ и (50) приема вида

$$\alpha = \psi + \frac{\pi}{2}, \quad \beta = \beta_0, \quad \varphi = \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0, \quad \psi = \Omega t + \psi_0, \quad \theta = \theta_0, \tag{52}$$

като $\dot{\varphi}_0$ се определя по формулата (знаменателя считаме различен от нула)

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{mgba_1 \sin\beta_0 - \Omega^2[(C-A)\sin\theta_0\cos\theta_0 - mbc_1(a - ba_1)\sin\beta_0\cos\beta_0]}{\Omega[C\sin\theta_0 + mb^2\sin\theta_0 + mb^2 a_1 \sin\beta_0(c_1\cos\theta_0\cos\beta_0 - a_1\sin\theta_0\sin\beta_0)]} \tag{53}$$

а неравенството (51) се свежда до

$$\Omega^2 > \frac{gc_1\cos\beta_0}{a_1(a + ba_1)\sin^2\beta_0}. \tag{54}$$

При $\beta_0 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ горното неравенство се удовлетворява автоматично, а за $\beta_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ — при достатъчно голяма по абсолютна стойност ъглова скорост Ω.

И така, за да може да се осъществи търкаляне без хлъзгане на нехомогенно кълбо, притежаващо динамична ос на симетрия, върху равномерно въртящ се ротационен елипсоид така, че допирната им точка да описва "вътрешен паралел" върху елипсоида, е достатъчно обобщените координати да удовлетворяват съотношенията (52) и (53), а ъгловата скорост на елипсоида да удовлетворява неравенството (54).

IV. ДВИЖЕНИЕ НА ХОМОГЕННО КЪЛБО ВЪРХУ ВЪРТЯЩА СЕ РАВНИНА

Нека равнината Oxy се върти с постоянна ъглова скорост Ω около оста Oz, а кълбото е хомогенно. Да намерим уравненията на движение. Условието за търкаляне без хлъзгане ще има вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_G - b\omega_y + \Omega y_G &= 0, \\ \dot{y}_G + b\omega_x + \Omega x_G &= 0. \end{aligned} \tag{55}$$

От

$$S = \frac{1}{2}m(\ddot{x}_G^2 + \ddot{y}_G^2) + \frac{1}{2}A(\dot{p}^2 + \dot{q}^2 + \dot{r}^2)$$

и

$$\ddot{x}_G = b\dot{\omega}_y - \Omega(\Omega x_G - b\omega_x),$$

$$\ddot{y}_G = -b\dot{\omega}_x + \Omega(b\omega_y - \Omega y_G)$$

за енергията на ускорението S получаваме

$$S = \frac{1}{2}m\{b^2(\dot{\omega}_x^2 + \dot{\omega}_y^2) + 2b\Omega[\dot{\omega}_x(\Omega y_G - b\omega_y)$$

$$-\dot{\omega}_y(\Omega x_G - b\omega_x)]\} + \frac{1}{2}A(\dot{\omega}_x^2 + \dot{\omega}_y^2 + \dot{\omega}_z^2),$$

откъдето уравненията на Апел ще имат вида

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\psi}} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial \ddot{\varphi}} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial \ddot{\psi}} = 0, \quad \text{или} \quad A\dot{\omega}_z = 0,$$

(56)
$$\{(mb^2 + A)(\dot{\omega}_x \sin\psi - \dot{\omega}_y \cos\psi) + mb\Omega[\sin\psi(\Omega y_G - b\omega_y)$$

$$+ \cos\psi(\Omega x_G - b\omega_x)]\}\sin\theta = 0,$$

$$\{(mb^2 + A)(\dot{\omega}_x \cos\psi + \dot{\omega}_y \sin\psi) + mb\Omega[\cos\psi(\Omega y_G - b\omega_y)$$

$$- \sin\psi(\Omega x_G - b\omega_x)]\} = 0.$$

Нека $\theta \neq 0$. След известни преобразувания от (56) ще получим уравненията

(57)
$$(mb^2 + A)\dot{\omega}_x + mb\Omega(\Omega y_G - b\omega_y) = 0,$$

$$(mb^2 + A)\dot{\omega}_x - mb\Omega(\Omega x_G - b\omega_x) = 0,$$

$$\dot{\omega}_z = 0.$$

От (55) и (57) намираме

$$(mb^2 + A)\omega_x - mb\Omega x_G = C_1,$$

$$(mb^2 + A)\omega_y - mb\Omega y_G = C_2,$$

където C_1 и C_2 са интеграционни константи. Означаваме с $m' = \dfrac{mb\Omega}{mb^2 + A}$. Тогава

$$\omega_x - m'x_G = C_1', \qquad \omega_y - m'y_G = C_2',$$

където

$$C_1' = \frac{C_1}{mb^2 + A}, \qquad C_2' = \frac{C_2}{mb^2 + A}.$$

Заместваме в (55) и получаваме следните уравнения за определяне на x_G и y_G :

(58)
$$\dot{x}_G - (\Omega - mb)y_G = C_2'b,$$

$$\dot{y}_G - (\Omega - mb)\dot{x}_G = -C_1'b,$$

$$\ddot{x}_G + (\Omega - mb)^2 x_G = C_3,$$

$$\ddot{y}_G + (\Omega - mb)^2 y_G = C_4.$$

От (58) се вижда, че върху грапава въртяща се равнина тежко кълбо описва в общия случай елипса, параметрите на която зависят от началните условия.

В по-общия случай, когато Ω е зададена функция на времето от клас C^1, а на кълбото действуват външни сили, имащи резултанта $F(F_x,\ F_y,\ F_z)$ през центъра на кълбото и двоица $M(M_x,\ M_y,\ M_z)$, от (55) намираме

$$\ddot{x}_G = b\omega_y - \Omega(\Omega x_G - b\omega_x) - \dot{\Omega} y_G,$$

$$\ddot{y}_G = -b\omega_x + \Omega(b\omega_y - \Omega y_G) + \dot{\Omega} x_G.$$

След несложни пресмятания уравненията на движение в този случай получаваме във вида

$$m\ddot{x}_G + \frac{A}{b^2}(\ddot{x}_G + \Omega\dot{y}_G + \dot{\Omega} y_G) = F_x + \frac{M_y}{b},$$

$$m\ddot{y}_G + \frac{A}{b^2}(\ddot{y}_G - \Omega\dot{x}_G - \dot{\Omega} x_G) = F_y + \frac{M_x}{b},$$

$$m\dot{\omega}_z = M_z.$$

Задачата за движение на тежко хомогенно кълбо, търкалящо се без хлъзгане върху грапава хоризонтална или наклонена равнина, въртяща се с постоянна ъглова скорост, за първи път е изследвана от Wltner и Л. А. Парс [11]. През 1983 г. Н. А. Фуфаев, а малко по-късно М. А. Abdelkager [13] разглеждат същата задача, отчитайки и силите на триене при търкаляне и вискозитета на средата, при което се установява, че силите на вязко триене довеждат кълбото до състояние на покой, а съпротивителните сили при търкаляне — до движение по развиваща се спирала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бобылев, Д. К. О шаре с жироскопом внутри.— В: Математический сборник. Т. XVI, М., 1892.
2. Жуковский, Н. Е. О гироскопическом шаре Бобылева. — В: Труды Отделения Физ. наук Общества любителей естествознания. Т. VI, 1894.
3. Чаплигин, С. А. Собрание сочинений, Москва – Ленинград, 1948.
4. Воронец, Н. В. Уравнения движения твердого тела, катящегося без скольжения по горизонтальной плоскости. — В: Собрание сочинений, Киев, 1903.
5. Харламова, Е. И. ПММ. Т.XXII, 1958.
6. Аппель, П. Теоретическая механика. Т.1, 2, М., Физматгиз, 1960.
7. Диамандиев, В. Год. Соф. унив., Фак. мат. и мех., 72, 1978.
8. Неймарк, Ф. И., И. А. Фуфаев. Динамика неголономных систем. М., 1967.

9. Д о б р о н р а в о в, В. В. Основы механики неголономных систем. М., 1970.
10. Г а н т м а х е р, Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М., 1966.
11. П а р с, Л. А. Аналитическая динамика. М., Наука, 1971, с. 635.
12. Ф у ф а е в, Н. А. ПММ.Т.47, вып. 1, 1983.
13. A b d e l k a g e r, M. A. — ZAMM, 66, 1986, 11, 563–564.

Поствпила 29.03.1989 г.

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 2 — Механика
Том 82, 1988

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA "ST. KLIMENT OHRIDSKI"
FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 2 — Mécanique
Tome 82, 1988

PASSIVE MOTIONS OF VECTORS AND REPERS

RUMEN SIMEONOV

Румен Симеонов. ПАССИВНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ВЕКТОРОВ И РЕПЕРОВ

Вводится понятие о пассивном движении векторов и реперов. Дается вариационная характеризация этого понятия. Указаны приложения к дифференциальной геометрии кривых, а также к аналитической механике. В частности, на этом пути естественным образом выведен интеграл С. Ковалевской о движении твердого тела около неподвижной точки.

Rumen Simeonov. PASSIVE MOTIONS OF VECTORS AND REPERS

The notioñ passive motion of vectors and repers is defined.

A variational characterization is given. Some applications to differential geometry of curves and to analytical mechanics are made. In particular, using this technique the S. Kowalewski integral concerning motions of a rigid body with a fixed point is derived in a natural way.

§1. DEFINITIONS AND BASIC PROPERTIES

Let V denote a threedimentional Euclidean vector space over $\mathbb{R}$, and $(a,\ b) = a \cdot b$ be the scalar product of elements $a,\ b \in V$. Further by Δ we'll denote a nonempty connected subset of $\mathbb{R}$, $C^m(\Delta;\ V)$ will denote the family of all m times ($m \geq 0$) continuously differentiable vector-functions $a : \Delta \longrightarrow V$. We put $|a| = \sqrt{a \cdot a}$, $S^1 = S^1(V) = \{a \in V : |a| = 1\}$ and $C^m(\Delta;\ S^1) = \{a \in C^m(\Delta;\ V) : |a(t)| = 1,\ \forall t \in \Delta\}$.

D e f i n i t i o n 1. Let $c \in C^m(\Delta;\ S^1)$, $m \geqq 1$ and $a \in C^m(\Delta;\ V)$, $a(t) \perp c(t)$ (i. e. $a(t) \cdot c(t) = 0$), $\forall t \in \Delta$. We'll say "$a(t)$ passively follows $c(t)$ for $t \in \Delta$" iff

$$\dot{a}(t) = \lambda(t)c(t), \quad \forall t \in \Delta, \text{ where } \lambda : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}. \tag{1}$$

Here and farther on $(\ )^\bullet = d/dt$. Since we suppose $a(t) \cdot c(t) = 0$, it is obvious that (1) es equivalent to the following

$$\dot{a}(t) = -(a(t) \cdot \dot{c}(t))c(t), \quad \forall t \in \Delta. \tag{2}$$

Definition 1 is a mathematical formalization of our intuitive idea a vector $a(t)$, $a(t) \cdot c(t) = 0$ "to do no rotation around $c(t)$ when $t \in \Delta$". This is so because (1) exactly means that $\dot{a}(t)$ has no component in the plane perpendicular to $c(t)$.

P r o p o s i t i o n 1. Let $m \geqq 1$, $c \in C^m(\Delta;\ S^1)$. Then

a) Given any $t_0 \in \Delta$ and $a_0 \in V$, $a_0 \perp c(t_0)$, there exists unique $a \in C^m(\Delta;\ V)$ such that $a(t)$ passively follows $c(t)$ for $t \in \Delta$ and $a(t_0) = a_0$.

b) If $a,\ b \in C^m(\Delta;\ V)$, $\lambda,\ \mu \in R$, $r(t) \doteq \lambda a(t) + \mu b(t)$, $t \in \Delta$, where $a(t)$, $b(t)$ passively follow $c(t)$ for $t \in \Delta$ then $r(t)$ passively follows $c(t)$ for $t \in \Delta$.

c) If $a,\ b \in C^m(\Delta;\ V)$, $a(t)$, $b(t)$ passively follow $c(t)$ for $t \in \Delta$ then $a(t) \cdot b(t) = \text{const}$ for $t \in \Delta$. Under the same assumptions it follows $|a(t)| = \text{const}$, $|b(t)| = \text{const}$, $\measuredangle(a(t),\ b(t)) = \text{const}$, $t \in \Delta$.

Proof. a) The equation (2) about $a = a(t)$ is equivalent to a linear system of three scalar differential equations solved with respect to the derivatives. According to the differential equations theory, the equation (2) has unique solution $a \in C^m(\Delta;\ V)$, with $a(t_0) = a_0$. It remains to be noted that (2) implies

$$(d/dt)(a(t) \cdot c(t)) = \dot{a}(t) \cdot c(t) + a(t) \cdot \dot{c}(t) = -(a(t) \cdot \dot{c}(t))c(t)^2 + a(t) \cdot \dot{c}(t) = 0,$$

$$a(t) \cdot c(t) = a(t_0) \cdot c(t_0) = a_0 \cdot c(t_0) = 0, \quad \forall t \in \Delta.$$

b) This assertion automatically follows from the linearity of the equation (2), because $a(t) \perp c(t)$, $b(t) \perp c(t)$ implies $r(t) \perp c(t)$, $\forall t \in \Delta$.

c) It is sufficient to prove $a(t) \cdot b(t) = \text{const}$, $t \in \Delta$. We calculate

$$(d/dt)(a(t) \cdot b(t)) = \dot{a}(t) \cdot b(t) + a(t) \cdot \dot{b}(t) =$$

$$-(a(t) \cdot \dot{c}(t))(c(t) \cdot b(t)) - (b(t) \cdot \dot{c}(t))(a(t) \cdot c(t)) =$$

$$-(a(t) \cdot \dot{c}(t)) \cdot 0 - (b(t) \cdot \dot{c}(t)) \cdot 0 = 0, \quad \forall t \in \Delta.$$

The proof of proposition 1 is completed.

Any ordered triple $R = (a,\ b,\ c)$, such that $\{a,\ b,\ c\}$ is an ortonormed base in V will be called strongly oriented 3-reper in V. The family of all such R will be denoted by V_3. If $a,\ b,\ c \in C^m(\Delta;\ V)$ and $R(t) = (a(t),\ b(t),\ c(t)) \in V_3$, $\forall t \in \Delta$ we will write $R \in C^m(\Delta;\ V_3)$.

Definition 2. If $m \geqq 1$, $R \in C^m(\Delta; V_3)$, $R(t) = (a(t), b(t), c(t))$, $a(t)$, $b(t)$ passively follow $c(t)$ for $t \in \Delta$ then we'll say "R is a passive C^m-motion of a reper in V_3 for $t \in \Delta$".

Proposition 2. Let $m \geqq 1$, $c \in C^m(\Delta; S^1)$, $t_0 \in \Delta$, $R_0 = (a_0, b_0, c(t_0)) \in V_3$. Then there exists an unique passive C^m-motion $R(t) \in V_3$, $t \in \Delta$ such that $R(t_0) = R_0$.

Proof. Let $a, b \in C^m(\Delta; V)$, $a(t)$, $b(t)$ passively follow $c(t)$ for $t \in \Delta$, $a(t_0) = a_0$, $b(t_0) = b_0$. According to proposition 1a) such a and b exist and are unique. We put $R(t) = (a(t), b(t), c(t))$, $t \in \Delta$ and we note that according to proposition 1c) it follows $a(t) \cdot b(t) = a_0 \cdot b_0 = 0$, $|a(t)| = |a_0| = 1$, $|b(t)| = |b_0| = 1$, $\forall t \in \Delta$. So proposition 2 is proved.

Proposition 3. Let $m \geqq 1$, $c \in C^m(\Delta; S^1)$, $R_i(t) = (a_i(t), b_i(t), c_i(t))$, $t \in \Delta$, $i = 1, 2$ be passive C^m-motions of repers R_1, $R_2 \in V_3$, $c_1(t) = c_2(t) = c(t)$, $t \in \Delta$. Then there exists an angle $\gamma = \text{const}$, $t \in \Delta$ (which is uniquely determined up to an addent $2l\pi$, $l \in Z$) such that

$$
\begin{aligned}
a_2(t) &= \cos\gamma a_1(t) + \sin\gamma b_1(t), \\
b_2(t) &= -\sin\gamma a_1(t) + \cos\gamma b_1(t)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$\forall t \in \Delta$. Conversely, if $R_1(t) = (a_1(t), b_1(t), c_1(t))$, $t \in \Delta$ is a passive C^m-motion of a reper $R_1 \in V_3$, $m \geqq 1$, $\gamma = \text{const}$, $c_2(t) = c_1(t) = c(t)$, $\forall t \in \Delta$ and $a_2(t)$, $b_2(t)$ are defined by (3) then the reper $R_2(t) = (a_2(t), b_2(t), c_2(t))$ will be a passive C^m-motion of a reper in V_3 for $t \in \Delta$.

Proof. Obviously a continuous function $\gamma(t)$, $t \in \Delta$ satisfying (3) exists and is uniquely determined up to an addent $2l\pi$, $l \in Z$. According to proposition 1c) we have $\cos\gamma(t) = a_2(t) \cdot a_1(t) = \text{const}$, $\sin\gamma(t) = a_2(t) \cdot b_1(t) = \text{const}$, $t \in \Delta$. This proves that $\gamma(t) = \text{const}$, $t \in \Delta$. The converse assertion follows immediately from proposition 1b).

§2. A VARIATIONAL CHARACTERIZATION OF THE PASSIVE MOTIONS

We denote $B = \{(\lambda, \mu, \nu) \in R^3 : \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 \leqq 1\}$ and consider B as a homogeneous rigid body with density 1. Let $R(t) = (\xi(t), \eta(t), \zeta(t))$, $t \in \Delta$, be an arbitrary C^m-motion of a reper $R \in V_3$, $m \geqq 1$. With each such a reper $R(t)$, $t \in \Delta$, we associate a motion of the rigid body B using the following formula

$$r(t; \lambda, \mu, \nu) = \lambda\xi(t) + \mu\eta(t) + \nu\zeta(t), \quad t \in \Delta.$$

The kinetic energy of this motion of B is determined by the formula

$$T_R(t) = \iiint\limits_{\lambda^2+\mu^2+\nu^2 \leqq 1} (1/2)\dot{r}^2(t; \lambda, \mu, \nu)\, d\lambda d\mu d\nu, \quad t \in \Delta.$$

Theorem 1. Let $m \geqq 1$, $\zeta \in C^m(\Delta; S^1)$, $R_0(t) = (a(t), b(t), \zeta(t))$, $t \in \Delta$, be a passive C^m-motion of a reper $R_0 \in V_3$. Let $R(t) = (\xi(t), \eta(t), \zeta(t))$, $t \in \Delta$, be an arbitrary C^1-motion of a reper $R \in V_3$ having the same third vector $\zeta(t)$, $t \in \Delta$. Then for the corresponding kinetic energies the following inequality

$$T_{R_0}(t) \leqq T_R(t), \quad \forall t \in \Delta, \tag{4}$$

holds. In (4) equality holds for each $t \in \Delta$ if and only if $R(t)$, $t \in \Delta$, is a passive motion of a reper in V_3 too.

Proof. Since R_0 and R have one and the same third vector we can find a continuously differentiable, function $\gamma(t)$, $t \in \Delta$, for which

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \cos\gamma(t)a(t) + \sin\gamma(t)b(t), \\ \eta(t) &= -\sin\gamma(t)a(t) + \cos\gamma(t)b(t) \end{aligned} \tag{5}$$

holds $\forall t \in \Delta$. Now we calculate

$$\begin{aligned} T_R(t) &= \iiint\limits_{\lambda^2+\mu^2+\nu^2 \leqq 1} (1/2)(\lambda\dot{\xi}(t) + \mu\dot{\eta}(t) + \nu\dot{\zeta}(t))^2 d\lambda d\mu d\nu \\ &= (1/2)A(\dot{\xi}^2(t) + \dot{\eta}^2(t) + \dot{\zeta}^2(t)), \quad \forall t \in \Delta, \end{aligned}$$

where

$$A = \iiint \lambda^2 d\lambda d\mu d\nu > 0, \quad A = \text{const}, \quad t \in \Delta.$$

Using (5) we find

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \dot{\gamma}(t)\eta(t) + \cos\gamma(t)\dot{a}(t) + \sin\gamma(t)\dot{b}(t), \\ \dot{\eta}(t) &= -\dot{\gamma}(t)\xi(t) - \sin\gamma(t)\dot{a}(t) + \cos\gamma(t)\dot{b}(t), \quad t \in \Delta. \end{aligned}$$

Since $a(t)$ and $b(t)$ passively follow $\zeta(t)$ we have $\dot{a}(t) \perp \xi(t)$, $\dot{a}(t) \perp \eta(t)$, $\dot{b}(t) \perp \xi(t)$, $\dot{b}(t) \perp \eta(t)$ and consequently

$$\begin{aligned} \dot{\xi}^2(t) &= \dot{\gamma}^2(t) + (\cos\gamma(t)\dot{a}(t) + \sin\gamma(t)\dot{b}(t))^2, \\ \dot{\eta}^2(t) &= \dot{\gamma}^2(t) + (-\sin\gamma(t)\dot{a}(t) + \cos\gamma(t)\dot{b}(t))^2, \\ \dot{\xi}^2(t) + \dot{\eta}^2(t) &= 2\dot{\gamma}^2(t) + \dot{a}^2(t) + \dot{b}^2(t), \\ T_R(t) &= A\dot{\gamma}^2(t) + T_{R_0}(t), \quad \forall t \in \Delta. \end{aligned}$$

This equality proves (4) and it is clear that we have equality in (4) if and only if $\dot{\gamma}(t) = 0$, $\forall t \in \Delta$, i. e. iff $\gamma(t) =$const, $t \in \Delta$. According to proposition 3, the last means that $R(t)$, $t \in \Delta$, is a passive motion of a reper in V_3. Thus Theorem 1 is proved.

§3. CURVATURE, TORSION AND PASSIVE VECTORS

Suppose in V is introduced an orientation (one of two possible) and let $\times$ denote the corresponding vector product operation. Let $r \in C^3(\Delta;\ V)$ be regular, i. e. $\dot{r}(t) \times \ddot{r}(t) \neq 0$, $\forall t \in \Delta$. As it is common in differential geometry of curves we put $\tau,\ \nu,\ \beta \in C^1(\Delta;\ V)$, $\tau(t) = r \cdot (t)/|\dot{r}(t)|$, $\beta(t) = (\dot{r}(t) \times \ddot{r}(t))/|\dot{r}(t) \times \ddot{r}(t)|$, $\nu(t) = \beta(t) \times \tau(t)$, $\forall t \in \Delta$. In such a case r is called regular curve in V; $\tau,\ \nu,\ \beta$ are called tangent, main normal, binormal unit vectors of r. The plane containing the end of the vector $r(t)$ and collinear to the vectors $\tau(t)$, $\nu(t)$ is called tangent plane; the plane containing the end of the vector $r(t)$ and collinear to the vectors $\nu(t)$, $\beta(t)$ is called normal plane.

Let $t_0 \in \Delta$ and $R_\tau(t) = (a(t),\ b(t),\ \tau(t)) \in V_3$, $t \in \Delta$, be a passive motion of a reper in V_3, determined by $R_\tau(t_0) = (\nu(t_0),\ \beta(t_0),\ \tau(t_0))$. According to proposition 3 such a reper exists and is unique. By virtue of Theorem 1 this reper has the property to rotate itself about $\tau(t)$, $t \in \Delta$, with a minimal kinetic energy. We involve the angle $\gamma(t)$, $t \in \Delta$, $\gamma \in C^0(\Delta;\ R)$ determined by $\gamma(t_0) = 0$ and

$$\begin{aligned} \nu(t) &= \cos\gamma(t)a(t) + \sin\gamma(t)b(t), \\ \beta(t) &= -\sin\gamma(t)a(t) + \cos\gamma(t)b(t), \quad \forall t \in \Delta. \end{aligned} \tag{6}$$

Since $r \in C^3$ it is easy to see that $\gamma \in C^1(\Delta;\ R)$. In an analogical way we introduce a passive reper $R_\beta(t) = (p(t),\ q(t),\ \beta(t))$, $t \in \Delta$, $R_\beta(t_0) = (\tau(t_0),\ \nu(t_0),\ \beta(t_0))$, and the corresponding angle $\theta \in C^1(\Delta;\ R)$, $\theta(t_0) = 0$,

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \cos\theta(t)p(t) + \sin\theta(t)q(t), \\ \nu(t) &= -\sin\theta(t)p(t) + \cos\theta(t)q(t), \quad \forall t \in \Delta. \end{aligned} \tag{7}$$

Now it is natural to give the following.

D e f i n i t i o n 3. The angle $\gamma(t)$, $t \in \Delta$, is called turning angle (reading from the moment $t = t_0$) of the normal plane. The angle $\theta(t)$, $t \in \Delta$, is called turning angle (reading from the moment $t = t_0$) of the tangent plane.

T h e o r e m 2. For each regular curve $r \in C^3(\Delta;\ V)$ the curvature $k(t)$ and the torsion $\sigma(t)$ can be expressed in the following way

$$k(t) = \dot{\theta}(t)|\dot{r}(t)|^{-1}, \quad \sigma(t) = \dot{\gamma}(t)|\dot{r}(t)|^{-1}, \quad \forall t \in \Delta. \tag{8}$$

The following (Frenet's) formulas

$$\dot{\tau}(t) = \dot{\theta}(t)\nu(t), \tag{9}$$

$$\dot{\nu}(t) = -\dot{\theta}(t)\tau(t) + \dot{\gamma}(t)\beta(t), \tag{10}$$

$$\dot{\beta}(t) = -\dot{\gamma}(t)\nu(t), \tag{11}$$

hold $\forall t \in \Delta$.

Proof. First we'll prove (9), (10), (11). From (7) and (6) it follows

$$\dot{\tau}(t) = \dot{\theta}(t)\nu(t) + \cos\theta(t)\dot{p}(t) + \sin\theta(t)\dot{q}(t),$$

$$\dot{\beta}(t) = -\dot{\gamma}(t)\nu(t) - \sin\gamma(t)\dot{a}(t) + \cos\gamma(t)\dot{b}(t).$$

Since $\tau(t) = \lambda(t)\dot{r}(t)$, $\lambda(t) = |\dot{r}(t)|^{-1}$, $\beta(t) = \mu(t)(\dot{r}(t)\times\ddot{r}(t))$, $\mu(t) = |\dot{r}(t)\times\ddot{r}(t)|^{-1}$ $\dot{\tau}(t)\cdot\beta(t) = (\dot{\lambda}(t)\dot{r}(t)+\lambda(t)\ddot{r}(t))\cdot\mu(t)(\dot{r}(t)\times\ddot{r}(t)) = 0$, $\forall t \in \Delta$, and $p(t)$, $q(t)$ passivel follow $\beta(t)$ for $t \in \Delta$ it is evident that

$$\cos\theta(t)\dot{p}(t) + \sin\theta(t)\dot{q}(t) = h(t)\beta(t) = (\dot{\tau}(t)\cdot\beta(t))\beta(t) = 0.$$

Thus (9) is proved. By the same manner we have

$$-\sin\gamma(t)\dot{a}(t) + \cos\gamma(t)\dot{b}(t) = g(t)\tau(t) = (\dot{\beta}(t)\cdot\tau(t))\tau(t) = (-\beta(t)\cdot\dot{\tau}(t))\tau(t) = 0$$

and (11) is proved. Since $\nu = \beta\times\tau$ we obtain

$$\dot{\nu}(t) = \dot{\beta}(t)\times\tau(t) + \beta(t)\times\dot{\tau}(t) = -\dot{\gamma}(t)(-\beta(t)) + \dot{\theta}(t)(-\tau(t))$$

which proves (10).

It is known from differential geometry [1, p. 44] that $\dot{\tau}(t)\cdot\nu(t) = |\dot{r}(t)|k(t$ and $\dot{\beta}(t)\cdot\nu(t) = -\sigma(t)|\dot{r}(t)|$, $\forall t \in \Delta$. This, (9) and (11) prove (8). Theorem 2 i proved.

We would like to mention that if $t = s$ is natural parameter, i. e. if $|\dot{r}(t)| = 1$ $\forall t \in \Delta$ then (8) has the very simple form

$$k(s) = \theta'(s), \ \sigma(s) = \gamma'(s), \quad \forall s \in \Delta. \tag{8'}$$

§4. PASSIVE VECTORS AND THE S. KOWALEWSKI INTEGRAL

Let us consider the classical problem concerned the motion of a rigid bod having a fixed point O. Let $R(t) = (\xi(t), \eta(t), \zeta(t))$, $t \in \Delta$, be a reper immobill attached to the body and such that $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ are main inertial axes for the poin O. Let A, B, C be the corresponding inertial moments, and let

$$P = -Mg(a_{31}(t)\xi(t) + a_{32}(t)\eta(t) + a_{33}(t)\zeta(t)) = -Mgk,$$

$$k = a_{31}(t)\xi(t) + a_{32}(t)\eta(t) + a_{33}(t)\zeta(t),$$

$$\dot{k}(t) = 0, \qquad t \in \Delta, \qquad |k| = 1$$

be the weight-force. The force P is applied at the mass center G of the body bein in consideration. Let us suppose that $OG = \xi_G\xi(t) + \eta_G\eta(t) + \zeta_G\zeta(t)$, $\eta_G = \zeta_G = 0$ $\xi_G = \text{const}$, $\forall t \in \Delta$. As it is wellknown [2, p. 513], the Euler equation for thi problem has the form

$$\begin{aligned}
A\dot{\omega}_\xi &= (B-C)\omega_\eta\omega_\zeta,\\
B\dot{\omega}_\eta &= (C-A)\omega_\zeta\omega_\xi + Mg\xi_G a_{33},\\
C\dot{\omega}_\zeta &= (A-B)\omega_\xi\omega_\eta - Mg\xi_G a_{32},\\
\dot{a}_{31} &= \omega_\zeta a_{32} - \omega_\eta a_{33},\\
\dot{a}_{32} &= \omega_\xi a_{33} - \omega_\zeta a_{31},\\
\dot{a}_{33} &= \omega_\eta a_{31} - \omega_\xi a_{32}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Let us remember also the following identities

$$\begin{aligned}
(13)\qquad \dot{\xi}(t) &= \omega_\zeta(t)\eta(t) - \omega_\eta(t)\zeta(t),\\
\dot{\eta}(t) &= -\omega_\zeta(t)\xi(t) + \omega_\xi(t)\zeta(t),\\
\dot{\zeta}(t) &= \omega_\eta(t)\xi(t) - \omega_\xi(t)\eta(t),
\end{aligned}$$

true for $t \in \Delta$.

According to Proposition 1c) for any vector $b(t) = b_1(t)\xi(t) + b_2(t)\eta(t)$, b_1, b_2 — scalars, which is in the plane $O\xi\eta$ and passively follows the vector $\zeta(t)$ we have $|b(t)| = \text{const}$, $t \in \Delta$, i. e. $b_1^2(t) + b_2^2(t) = \text{const}$, $t \in \Delta$. It becomes clear that if b_1 and b_2 are polynomials of the unknown ω_ξ, ω_η, $\dots$, a_{31}, a_{32}, $\dots$ then $I = b_1^2 + b_2^2$ will be a first integral of system (12). Following the S. Kowalewski idea let us involve the isomorphism $\langle\ \rangle : C \to O\xi\eta$, $\langle\lambda + \mu i\rangle = \lambda\xi + \mu\eta$. In the plane $O\xi\eta$ we have the vectors $\omega_{\xi\eta} = \omega_\xi\xi + \omega_\eta\eta$ and $a = a_{31}\xi + a_{32}\eta$. It is clear that a suitable way to find a vector b with coefficients b_1; b_2 being polynomials of ω_ξ, ω_η, a_{31}, a_{32} is to put $b = \langle b_1 + b_2 i\rangle$, $b_1 + b_2 i = f(z,\ m)$, $z = \omega_\xi + \omega_\eta i$, $m = a_{31} + a_{32}i$, where $f(z,\ m)$ is a polynomial of the complex variables z, m. We could begin with $f = m$, $f = z$, and so on. Very soon we come to the possibility $f(z,\ m) = z^2 - m$.

T h e o r e m 3. The vector $b = \langle z^2 - m\rangle$, where $z = \omega_\xi + \omega_\eta i$, $m = a_{31} + a_{32}i$, passively follows ζ when $t \in \Delta$, for $\omega_\xi(t_0)$, $\omega_\eta(t_0)$, $\omega_\zeta(t_0)$, $a_{33}(t_0)$ — arbitrary initial values, if and only if $A = B = 2C$ and $Mg\xi_G = C$.

Proof. We have $z^2 - m = \omega_\xi^2 - \omega_\eta^2 - a_{31} + (2\omega_\xi\omega_\eta - a_{32})i$, $b = b_1\xi + b_2\eta$,

$$(14)\qquad b_1 = \omega_\xi^2 - \omega_\eta^2 - a_{31}, \qquad b_2 = 2\omega_\xi\omega_\eta - a_{32}.$$

In accordance with Definition 1, b will follow passively if and only if $\dot{b}(t)\cdot\xi(t) = 0$ and $\dot{b}(t)\cdot\eta(t) = 0$, $\forall t \in \Delta$. Using (13) we obtain

$$\dot{b}(t) = \dot{b}_1(t)\xi(t) + \dot{b}_2(t)\eta(t) + b_1(t)\dot{\xi}(t) + b_2(t)\dot{\eta}(t),$$

$$\dot{b}(t)\cdot\xi(t) = \dot{b}_1(t) - b_2(t)\omega_\zeta(t),$$

$$\dot{b}(t)\cdot\eta(t) = \dot{b}_2(t) + b_1(t)\omega_\zeta(t)$$

for each $t \in \Delta$. According to (14) we have

$$\dot{b}_1 - b_2\omega_\zeta = 2\omega_\xi\dot{\omega}_\xi - 2\omega_\eta\dot{\omega}_\eta - \dot{a}_{31} - (2\omega_\xi\omega_\eta - a_{32})\omega_\zeta,$$

$$\dot{b}_2 + b_1\omega_\zeta = 2\dot{\omega}_\xi\omega_\eta + 2\omega_\xi\dot{\omega}_\eta - \dot{a}_{32} + (\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 - a_{31})\omega_\zeta.$$

Now from (12) follows

$$\dot{b}_1 - b_2\omega_\zeta = 2\left(\frac{B-C}{A} - 1 - \frac{C-A}{B}\right)\omega_\xi\omega_\eta\omega_\zeta + \left(-2Mg\frac{\xi_G}{B} + 1\right)\omega_\eta a_{33},$$

$$\dot{b}_2 + b_1\omega_\zeta = \left(2\frac{B-C}{A} - 1\right)\omega_\eta^2\omega_\zeta + \left(2\frac{C-A}{B} + 1\right)\omega_\xi^2\omega_\eta$$

$$+\left(2Mg\frac{\xi_G}{B}-1\right)\omega_\xi a_{33}.$$

Consequently $\dot{b}_1 - b_2\omega_\zeta = 0$ and $\dot{b}_2 + b_1\omega_\zeta = 0$, $\forall t \in \Delta$ and for arbitrary ω_ξ, ω_η, ω_ζ, a_{33} if and only if $2Mg\xi_G = B$ and

$$\frac{B-C}{A} - 1 - \frac{C-A}{B} = 0, \quad 2\frac{B-C}{A} - 1 = 0, \quad 2\frac{C-A}{B} + 1 = 0.$$

Solving the last system we find the unique possibility $A = B = 2C = 2Mg\xi_G$. With this Theorem 3 is proved.

If we change the time t by $\tau = \lambda t$, where $\lambda = (Mg\xi_G/C)^{1/2}$then in (12) on the place of $Mg\xi_G$ will appear C. In such a way we see that the condition $Mg\xi_G = C$ is not essential.

C o r o l l a r y. If $\eta_G = \zeta_G = 0$ and the change $\tau = \lambda t$, $\lambda = (Mg\xi_G/C)^{1/2}$ is already made then

$$I = (\omega_\xi^2 - \omega_\eta^2 - a_{31})^2 + (2\omega_\xi\omega_\eta - a_{32})^2$$

will be a first integral of the system (12) if and only if $A = B = 2C$.

After all above we have seen how the S. Kowalewski integral could be derived constructing an appropriate passive vector. Something more — the conditions $A = B = 2C$ appear as some necessary conditions for realizing such a construction.

LITERATURE

1. Б е л ь к о, И. В., А. А. Б у р д у н, В. И. В е д е р н и к о в, А. С. Ф е д е н к о. Дифференциальная геометрия. Минск, 1982.
2. С у с л о в, Г. К. Теоретическая механика. Москва — Ленинград, 1946.

Received 29. III. 1989

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 2 — Механика
Том 82, 1988

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA "ST. KLIMENT OHRIDSKI"
FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 2 — Mécanique
Tome 82, 1988

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ РАДИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА II. НЕЦЕЛЫЕ ОРБИТАЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ

ЙОРДАН МИШЕВ

Йордан Мишев. ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ РАДИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА II. НЕЦЕЛЫЕ ОРБИТАЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ

Получены формулы разложения по произведениям решений двух радиальных уравнений Шредингера с нецелым моментом $l \geqq -1/2$. Рассмотрен случай, когда $x = 0$ — граничная точка и граничная окружность. Результаты являются обобщением ранеé полученных при $l = 0$ и при $l = 1, 2, 3, \ldots$

Jordan Mishev. ON INVERSE PROBLEM IN QUANTUM SCATTERING THEORY FOR RADIAL SCHRÖDINGER EQUATION II. NONINTEGRAL ORBITAL MOMENTUM

Some expansions over products of solutions of two radial Schrödinger equations with nonintegral momentum $l \geqq -1/2$ are obtained. The limit point and limit circle cases for $x = 0$ are considered. The results are generalisation of previously obtained for the cases $l = 0$ and $l = 1, 2, 3$, etc.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрены формулы разложения по произведениям решений (ФРП) двух сингулярных уравнений Штурма — Лиувилля

$$(1)\qquad \frac{d^2}{dx^2}y_n + \left\{k^2 - \left[\frac{l(l+1)}{x^2} + v_n(x)\right]\right\} y_n = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad n = 1,\ 2.$$

Предполагаем, что потенциал $v_n(x)$ — вещественная функция, удовлетворяющая условию

$$\|v_n\|_{X_1} \equiv \int_0^\infty (1+x)|v_n(x)|dx < \infty,$$

а параметр l — вещественная константа, $l \in \left[-\frac{1}{2},\ \infty\right)$.

Как приложение полученных ФРП доказаны теоремы единственности Марченко в соответствующих обратных задачах рассеяния.

При $l = 0,\ 1,\ 2, \ldots$ уравнение (1) называется радиальным уравнением Шредингера (РУШ) и получается, когда потенциал взаимодействия стационарен и сферически симметричен [1, с. 23]. Название РУШ сохраним для (1) и при нецелых l.

Уравнение (1) можно толковать как сингулярную задачу на собственных значениях со спектральным параметром $\lambda = k^2$. Оказывается, что по терминологии Вейля [2, с. 240] $x = \infty$ всегда граничная точка, а $x = 0$ является граничной окружностью при $l \in \left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ и граничной точкой при $l \in \left[\frac{1}{2},\ \infty\right)$.

В п. 2 изучены некоторые решения (1) и граничное условие в $x = 0$. Основным моментом является определение фундаментальной системы решений $g_n(x,\ k)$, $h_n(x,\ k)$, составленной из целых, четных функций переменной k, аналоги решениям при $v_n(x) \equiv 0$

$$(2)\qquad g_0(x,\ k) = \frac{1}{k^{l+1}}\sqrt{\frac{\pi k x}{2}}J_{(l+\frac{1}{2})}(kx), \qquad l \in \left[-\frac{1}{2},\ \infty\right),$$

$$(3)\qquad h_0(x,\ k) = \begin{cases} \dfrac{k^l}{\cos l\pi}\sqrt{\frac{\pi k x}{2}}J_{-(l+\frac{1}{2})}(kx), & l \in \left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) \\ -\sqrt{\dfrac{\pi x}{2}}N_0(kx) + \left[\frac{2}{\pi}\ln k\right]\sqrt{\dfrac{\pi x}{2}}J_0(kx), & l = -\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

$$W(h_0(x,\ k),\ g_0(x,\ k)) = 1 \qquad (W(f,\ g) = fg' - f'g).$$

Трудность состоит в том, что $g_n(x,\ k)$ можно найти однозначно, но $h_n(x,\ k)$ не определяется однозначно из условия $W(h_n,\ g_n) = 1$ и нужно избавиться от примесей функции g_n . При $l \in \left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, $l \neq 0$ дополнительную трудность создает факт, что в общем случае $k = 0$ есть точка ветвления для решения уравнений (1). Иллюстрируем ситуацию при $v_n(x) \equiv 0$. Рассмотрим решение

$$\tilde{h}_0(x,\ k) = ik^l \sqrt{\frac{\pi k x}{2}} H^1_{l+\frac{1}{2}}(kx).$$

Выполнено условие $W(\tilde{h}_0,\ g_0) = 1$, но из представления

$$(4) \qquad \tilde{h}_0(x,\ k) = \begin{cases} h_0(x,\ k) + \left[\dfrac{i(-1)^l k^{2l+1}}{\cos l\pi}\right] g_0(x,\ k), & l \in \left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right),\ l \neq 0 \\ h_0(x,\ k) + \left[i - \dfrac{2}{\pi}\ln k\right] g_0(x,\ k), & l = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

ясно, что $k = 0$ — точка ветвления и это связано с множителем k^{2l+1} при $l \in \left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, $l \neq 0$ и $\ln k$ при $l = -\frac{1}{2}$.

Результаты п. 2 являются обобщением при $v_n(x) \neq 0$ этих из [12, с. 94] относительно граничного условия в $x = 0$ при $l \in \left[\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$. Так, при $v_n(x) \equiv 0$ после замены констант можно получить формулы 4.11.4 и 4.11.6 из [12].

В п.3 получены два вида ФРП соответственно при вронскианских и при нулевых граничных условиях в $x = 0$. Обозначим эти формулы соответственно ФРП$(l,\ v_1,\ \alpha_1,\ v_2,\ \alpha_2)$, $l \in \left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ и ФРП$(l,\ v_1,\ \infty,\ v_2,\ \infty)$, $l \in \left[-\frac{1}{2},\ \infty\right)$. Отметим, что при $l \in \left[\frac{1}{2},\ \infty\right)$ нулевое граничное условие выделяет решения уравнение (1), которые квадратично интегрируемы в окрестности $x = 0$.

При $l = 0$ ФРП$(0,\ v_1,\ \infty,\ v_2,\ \infty)$ получены в [9], а ФРП$(0,\ v_1,\ \alpha_1,\ v_2,\ \alpha_2)$ получены в [13]. При целых $l = 1,\ 2, \ldots$ ФРП$(l,\ v_1,\ \infty,\ v_2,\ \infty)$ получены в [11]. Настоящая работа отличается от цитируемых тем, что здесь работаем в полной общности Ойлеровой Г функций и Беселевых функций неполуцелого порядка. При целых l работы со специальными функциями можно избежать, как это показано в [9], используя преобразование Крамма — Крейна.

В п. 4 рассмотрено одно приложение полученных в п. 3 ФРП. Доказаны теоремы единственности Марченко в обратной задаче рассеяния для РУШ с нецелым моментом. Более особый момент в этой работе — необходимость в расширении пространств, с которыми работаем в случае вронскианских граничных условий. Это связано с фактом, что граничная задача в случае определяется потенциалом $v_n(x)$ в РУШ и константой

$\alpha_n \in R^1$ в граничном условии. Подобная процедура в крайнем интервале проведена в [10].

2. ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ В НУЛЕ

2.1. Вначале изучим некоторые решения уравнения (1). При $v_n(x) \equiv 0$, кроме функций g_0 и h_0 из (2) и (3), рассмотрим еще решение

$$f_0(x,\ k) = i^{l+1}\sqrt{\frac{\pi k x}{2}}H^1_{(l+\frac{1}{2})}(kx), \qquad l \in \left[-\frac{1}{2},\infty\right).$$

Функции g_0, h_0 и f_0 характерны асимптотическим поведением

$$(5)\ g_0(x,\ k) = a_1 x^{l+1}\left[1+O(x^2)\right], \quad x \to 0, \qquad l \in \left[-\frac{1}{2},\ \infty\right),$$

$$(6)\ h_0(x,\ k) = \begin{cases} b_1 x^{-l}[1+O(x^2)], & x \to 0, \quad l \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ c_1\sqrt{x}\ln x[1+O(x^2)], & x \to 0, \quad l = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$(7)\ f_0(x,\ k) = e^{ikx}[1+O(x^{-1})], \quad x \to \infty, \quad \operatorname{Im} k \geqq 0, \quad l \in \left[-\frac{1}{2},\ \infty\right),$$

где константы

$$a_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{l+1}\Gamma(l+\frac{3}{2})}, \qquad b_1 = \frac{2^l\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}, \qquad c_1 = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$

зависят только от l.

Функции g_0 и h_0 — целые, четные функции от k. При $l \in \left(-\frac{1}{2},\ \infty\right)$ функция $f_0(x,\ k)$ аналитична при $\operatorname{Im}k > 0$, а произведение $k^l f_0$ непрерывно при $\operatorname{Im}k \geqq 0$. При $l = 0$ точки $k = 0$ не является особой для f_0; при $l = 1,\ 2,\ 3, \ldots$ $k = 0$ полюс порядка l; при $l \in \left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, $l \neq 0$, $k = 0$ является точкой ветвления для f_0 . При $l = -\frac{1}{2}$ функция $k^l f_0$ имеет особенность вида $\ln k$, при $k = 0$ и $k = 0$ является точкой ветвления.

При $|k| \to \infty$, $\operatorname{Im} k \geqq 0$ справедливы асимптотики [7, с. 785]

$$(8) \qquad g_0(x,\ k) = \frac{1}{k^{l+1}}\sin\left(kx - \frac{l\pi}{2}\right) + O\left(\frac{e^{\operatorname{Im}kx}}{|k|^{l+2}}\right), \quad l \in \left[-\frac{1}{2},\infty\right),$$

$$(9)\quad h_0(x,\ k) = \frac{k^l}{\cos l\pi}\cos\left(kx+\frac{l\pi}{2}\right)+O\,|k|^{l-1}e^{\mathrm{Im}kx}),\quad l\in\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),$$

$$(10)\, h_0(x,\ k) = k^{-\frac{1}{2}}\left[\cos\left(kx+\frac{\pi}{4}\right)+\left(\frac{2}{\pi}\ln k\right)\cos\left(kx-\frac{\pi}{4}\right)\right] + O\left(|k|^{-\frac{3}{2}}\ln|k|e^{\mathrm{Im}kx}\right)+O\left(|k|^{-\frac{3}{2}}e^{\mathrm{Im}kx}\right),\quad l=-\frac{1}{2},$$

$$(11)\, f_0(x,\ k) = e^{ikx}+O\left(\frac{e^{-\mathrm{Im}kx}}{|k|}\right),\quad l\in\left[-\frac{1}{2},\ \infty\right).$$

При $v_n(x)\not\equiv 0$ определим решения g_n, h_n и F_n так, чтобы они имели асимптотическое поведение (5), (6) и (7). Дефинируем как обычно решение Йоста f_n [3, р. 14; 1, с. 35] и решение g_n [3, р. 21; 1, с. 34]. Справедливы следующие:

Л е м м а 2.1. Функция f_n аналитична при $\mathrm{Im}k>0$ и непрерывна при $\mathrm{Im}k\geqq 0$, за исключением точки $k=0$, где непрерывно произведение $k^l f_n$ при $l\in(-\frac{1}{2},\ \infty)$. При $l=-\frac{1}{2}$, $k^l f_n$ имеет особенность вида $\ln k$ в $k=0$. Справедливы оценка

$$|f_n(x,\ k)|\leqq \mathrm{const}\left(\frac{|k|x}{1+|k|x}\right)^{-|l|}e^{-\mathrm{Im}kx}$$

и асимптотики

$$(12)\quad \begin{aligned} &f_n(x,\ k)=e^{ikx}[1+o(1)], && x\to\infty\\ &f_n(x,\ k)=e^{ikx}+O\left(\frac{e^{-\mathrm{Im}kx}}{|k|}\right), && |k|\to\infty,\quad \mathrm{Im}\,k\geqq 0.\end{aligned}$$

Л е м м а 2.2. Функция g_n целая, четная функция от k . Справедливы оценка

$$|g_n(x,\ k)|\leqq \mathrm{const}\left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{l+1}e^{\mathrm{Im}kx}$$

и асимптотики

$$(13)\quad \begin{aligned} &g_n(x,\ k)=a_1x^{l+1}[1+O(x)], && x\to 0\\ &g_n(x,\ k)=\frac{\sin\left(kx-\frac{l\pi}{2}\right)}{k^{l+1}}+O\left(\frac{e^{\mathrm{Im}kx}}{|k|^{l+2}}\right), && |k|\to\infty,\quad \mathrm{Im}\,k\geqq 0.\end{aligned}$$

Аналогично случаю $l=0$ [8, с. 16] определим h_n для достаточно малых $x: 0<x\leqq\varepsilon$ как решение интегрального уравнения

$$(14)\qquad h_n(x,\ k)=h_0(x,\ k)-h_0(x,\ k)\int\limits_0^x g_0(t,\ k)v_n(t)h_n(t,\ k)dt$$

$$-g_0(x,\ k)\int_x^{\varepsilon} h_0(t,\ k)v_n(t)h_n(t,\ k)dt.$$

После этого додефинируем h_n при $\varepsilon \leqq x < \infty$ с помощью значении $h_n(\varepsilon,\ k)$ и $h_n'(\varepsilon,\ k)$. Для $\operatorname{Im} k \geqq 0$ имеем

$$|h_0(x,\ k)| \leqq C_1 \left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{-|l|} e^{\operatorname{Im} kx},$$

$$|g_0(x,\ k)| \leqq C_2 \left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{l+1} e^{\operatorname{Im} kx}.$$

Пусть $|k| \leqq N$. Выбираем $\varepsilon > 0$ так, чтобы

$$q_n \equiv C_1C_2\exp(2N\varepsilon)N^{-1}\int_0^{\varepsilon}|v_n(x)|dx < 1. \tag{15}$$

Это возможно, потому что $v_n \in X_1$. Справедлива следующая

Л е м м а 2.3. При $0 < x \leqq \varepsilon$ уравнение (14) имеет решение $h_n(x,\ k)$ которое целая, четная функция от k . Справедливы оценка

$$|h_n(x,\ k)| \leqq \mathrm{const}\left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{-|l|} e^{\operatorname{Im} kx} \tag{16}$$

и асимптотики при $x \to 0$

$$\left|\begin{array}{ll} h_n(x,\ k) = b_1x^{-l}[1+O(x)], & l \in \left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right), \\ h_n(x,\ k) = c_1\sqrt{x}\ln x[1+O(x)], & l = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \tag{17}$$

и при $|k| \to \infty$, $\operatorname{Im} k \geqq 0$

$$\left|\begin{array}{l} h_n(x,\ k) = \dfrac{k^l}{\cos l\pi}\cos(kx+\dfrac{l\pi}{2}) + O(|k|^{l-1}e^{\operatorname{Im} kx}),\quad l \in \left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right), \\ h_n(x,\ k) = k^{-\frac{1}{2}}\left[\cos(kx+\dfrac{\pi}{4}) + (\dfrac{2}{\pi}\ln k)\cos(kx-\dfrac{\pi}{4})\right] \\ \quad +O\left(|k|^{-\frac{3}{2}}\ln|k|e^{\operatorname{Im} kx}\right) + O\left(|k|^{-\frac{3}{2}}e^{\operatorname{Im} kx}\right),\quad l = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right. \tag{18}$$

Доказательство. При ε, определенном в (15), решаем (14) методо последовательных приближений. Положим

$$h_n^{(0)}(x,\ k) = h_0(x,\ k),$$

$$h_n^{(m)}(x,\ k) = -h_0(x,\ k)\int\limits_0^x g_0(t,\ k)v_n(t)h_n^{(m-1)}(t,\ k)dt$$

$$-g_0(x,\ k)\int\limits_x^\varepsilon h_0(t,\ k)v_n(t)h_n^{(m-1)}(t,\ k)dt, \qquad m = 1,\ 2,\dots$$

Тогда при $0 < x \leqq \varepsilon$ имеем

$$|h_n^{(0)}(x,\ k)| \leqq C_1\left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{-|l|} e^{\operatorname{Im}kx},$$

$$|h_n^{(1)}(x,\ k)| \leqq \left[C_1\left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{-|l|} e^{\operatorname{Im}kx}\right] q_n^m.$$

По индукции легко получить

$$|h_n^{(m)}(x,\ k)| \leqq \left[C_1\left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{-|l|} e^{\operatorname{Im}kx}\right] q_n^m, \qquad m = 2,\ 3,\dots$$

и, следовательно, ряд $h_n(x,\ k) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} h_n^{(m)}(x,\ k)$ сходится равномерно по $|k| \leqq N,\ x \in (0,\ \varepsilon]$, так как мажорируется рядом

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[C_1\left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{-|l|} e^{\operatorname{Im}kx}\right] q_n^m.$$

Кроме того,

$$|h_n(x,\ k)| \leqq \left[C_1\left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{-|l|} e^{\operatorname{Im}kx}\right] \frac{1}{1-q_n^m},$$

т.е. доказано (16). От уравнения (14) и оценки (16), аналогично [1, с. 35], получаем асимптотики (17) и (18) . От того, что функции $g_0(x,\ k)$ и $h_0(x,\ k)$ — целые, четные от k, следует, что такая $h_n(x,\ k)$ для $x \in (0,\ \varepsilon]$ и, в частности, $h_n(\varepsilon,\ k)$ и $h_n'(\varepsilon,\ k)$. Следовательно, продолжение $h_n(x,\ k)$ в интервале $[\varepsilon,\ \infty)$ тоже целая, четная функция от k. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 2.1. От (12), (13) и (18) видно, что асимптотики функций g_n, h_n и f_n при $|k| \to, \operatorname{Im}k \geqq 0$ совпадают с асимптотиками (8) — (11) функций g_0, h_0 и f_0 .

2.2. Известно [4], что при $\operatorname{Im}k > 0$ имеется только одно, с точностью до множителя, решение уравнения (1), квадратично интегрируемое в бесконечности, и оно убывает как e^{ikx} при $x \to \infty$. По терминологии Вейля, $x = \infty$ является граничной точкой и условие

$$\text{(19)} \qquad \lim_{x\to\infty}\left\{e^{-ikx}y_n(x,\ k)\right\} < \infty, \qquad \operatorname{Im}k \geqq 0$$

$$-g_0(x,\ k)\int\limits_x^{\varepsilon} h_0(t,\ k)v_n(t)h_n(t,\ k)dt.$$

После этого додефинируем h_n при $\varepsilon \leqq x < \infty$ с помощью значении $h_n(\varepsilon,\ k)$ и $h'_n(\varepsilon,\ k)$. Для $\operatorname{Im} k \geqq 0$ имеем

$$|h_0(x,\ k)| \leqq C_1 \left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{-|l|} e^{\operatorname{Im} kx},$$

$$|g_0(x,\ k)| \leqq C_2 \left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{l+1} e^{\operatorname{Im} kx}.$$

Пусть $|k| \leqq N$. Выбираем $\varepsilon > 0$ так, чтобы

$$q_n \equiv C_1 C_2 \exp(2N\varepsilon) N^{-1} \int\limits_0^{\varepsilon} |v_n(x)| dx < 1. \tag{15}$$

Это возможно, потому что $v_n \in X_1$. Справедлива следующая

Л е м м а 2.3. При $0 < x \leqq \varepsilon$ уравнение (14) имеет решение $h_n(x,\ k)$ которое целая, четная функция от k . Справедливы оценка

$$|h_n(x,\ k)| \leqq \mathrm{const} \left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{-|l|} e^{\operatorname{Im} kx} \tag{16}$$

и асимптотики при $x \to 0$

$$\left| \begin{array}{ll} h_n(x,\ k) = b_1 x^{-l}[1+O(x)], & l \in \left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right), \\ h_n(x,\ k) = c_1 \sqrt{x} \ln x [1+O(x)], & l = -\frac{1}{2} \end{array} \right. \tag{17}$$

и при $|k| \to \infty$, $\operatorname{Im} k \geqq 0$

$$\left| \begin{array}{l} h_n(x,\ k) = \dfrac{k^l}{\cos l\pi} \cos(kx + \dfrac{l\pi}{2}) + O(|k|^{l-1} e^{\operatorname{Im} kx}), \quad l \in \left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right), \\ h_n(x,\ k) = k^{-\frac{1}{2}} \left[\cos(kx + \dfrac{\pi}{4}) + (\dfrac{2}{\pi} \ln k) \cos(kx - \dfrac{\pi}{4})\right] \\ \qquad + O\left(|k|^{-\frac{3}{2}} \ln|k| e^{\operatorname{Im} kx}\right) + O\left(|k|^{-\frac{3}{2}} e^{\operatorname{Im} kx}\right), \quad l = -\frac{1}{2}. \end{array} \right. \tag{18}$$

Доказательство. При ε, определенном в (15), решаем (14) методом последовательных приближений. Положим

$$h_n^{(0)}(x,\ k) = h_0(x,\ k),$$

$$h_n^{(m)}(x,\ k) = -h_0(x,\ k)\int\limits_0^x g_0(t,\ k)v_n(t)h_n^{(m-1)}(t,\ k)dt$$

$$-g_0(x,\ k)\int\limits_x^\varepsilon h_0(t,\ k)v_n(t)h_n^{(m-1)}(t,\ k)dt, \qquad m = 1,\ 2,\dots$$

Тогда при $0 < x \leqq \varepsilon$ имеем

$$|h_n^{(0)}(x,\ k)| \ \leqq \ C_1\left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{-|l|} e^{\mathrm{Im}kx},$$

$$|h_n^{(1)}(x,\ k)| \ \leqq \ \left[C_1\left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{-|l|} e^{\mathrm{Im}kx}\right] q_n^m.$$

По индукции легко получить

$$|h_n^{(m)}(x,\ k)| \leqq \left[C_1\left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{-|l|} e^{\mathrm{Im}kx}\right] q_n^m, \qquad m = 2,\ 3,\dots$$

и, следовательно, ряд $h_n(x,\ k) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} h_n^{(m)}(x,\ k)$ сходится равномерно по $|k| \leqq N,\ x \in (0,\ \varepsilon]$, так как мажорируется рядом

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[C_1\left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{-|l|} e^{\mathrm{Im}kx}\right] q_n^m.$$

Кроме того,

$$|h_n(x,\ k)| \leqq \left[C_1\left(\frac{x}{1+|k|x}\right)^{-|l|} e^{\mathrm{Im}kx}\right] \frac{1}{1-q_n^m},$$

т.е. доказано (16). От уравнения (14) и оценки (16), аналогично [1, с. 35], получаем асимптотики (17) и (18) . От того, что функции $g_0(x,\ k)$ и $h_0(x,\ k)$ — целые, четные от k, следует, что такая $h_n(x,\ k)$ для $x \in (0,\ \varepsilon]$ и, в частности, $h_n(\varepsilon,\ k)$ и $h_n'(\varepsilon,\ k)$. Следовательно, продолжение $h_n(x,\ k)$ в интервале $[\varepsilon,\ \infty)$ тоже целая, четная функция от k. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 2.1. От (12), (13) и (18) видно, что асимптотики функций g_n, h_n и f_n при $|k| \to, \mathrm{Im}k \geqq 0$ совпадают с асимптотиками (8) — (11) функций g_0, h_0 и f_0 .

2.2. Известно [4], что при $\mathrm{Im}k > 0$ имеется только одно, с точностью до множителя, решение уравнения (1), квадратично интегрируемое в бесконечности, и оно убывает как e^{ikx} при $x \to \infty$. По терминологии Вейля, $x = \infty$ является граничной точкой и условие

(19) $$\lim_{x\to\infty}\left\{e^{-ikx}y_n(x,\ k)\right\} < \infty, \qquad \mathrm{Im}\,k \geqq 0$$

выделяет эти решения. Из (12) видно, что решение Йоста f_n удовлетворяет (19).

Из (13) и (17) видно, что при $l \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$: $g_n \in L_2(0,.)$, $h_n \notin L_2(0,.)$, т.е. $x = 0$ — граничная точка и граничное условие в $x = 0$

(20) $$\lim_{x\to 0}\{x^{-(l+1)}y_n(x, k)\} < \infty.$$

При $l \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$: $g_n \in L_2(0,.)$ и $h_n \in L_2(0,.)$, т.е. $x = 0$ является граничной окружностью. Граничное условие можно [2, с. 264] записать в виде

(21) $$\lim_{x\to 0} W(\xi_n(x), y_n(x, k)) = 0,$$

где $\xi_n(x)$ — фиксированное решение (1) при $k = 0$. Пусть

$$\xi_n(x) = \gamma_n[\cos\beta_n g_n(x, 0) + \sin\beta_n h_n(x, 0)],$$

$$y_n(x, k) = A_n(k)g_n(x, k) + B_n(k)h_n(x, k).$$

Используя очевидное $W(x^{-l}, x^{l+1}) = 2l+1, W(\sqrt{x}\ln x, \sqrt{x}) = -1$, получаем при $x \to 0$

$$W(\xi_n, y_n) \sim \mathrm{const}\,[A_n \sin\beta_n - B_n\cos\beta_n], \quad \mathrm{const} \neq 0.$$

Следовательно, условие (21) эквивалентно

$$y_n(x, k) = \rho_n(k)[\cos\beta_n g_n(x, k) + \sin\beta_n h_n(x, k)], \quad \rho_n \neq 0,$$

т.е. (21) выделяет решения (1), пропорциональные решению

$$y_n^{(\beta_n)}(x, k) = \cos\beta_n g_n(x, k) + \sin\beta_n h_n(x, k).$$

При $\sin\beta_n \neq 0$ обозначим $y_n^{(\beta_n)}(x, k)$ в виде

$$\varphi_n(\alpha_n; x, k) = h_n(x, k) + \alpha_n g_n(x, k),$$

где $\alpha_n = \mathrm{cotg}\beta_n$, а при $\sin\beta_n = 0$ обозначим $y_n^{(\beta_n)}(x, k)$ в виде

$$\varphi_n(\infty; x, k) = g_n(x, k).$$

Решение $\varphi_n(\alpha_n; x, k)$, $\alpha_n \in R^1$, $\alpha_n = \infty$ называем регулярным решением. Ясно, что $\varphi_n(\alpha_n; x, k)$ удовлетворяет (21). Запишем (21) в виде

(22) $$\lim_{x\to 0} W(\varphi_n(\alpha_n; x, 0), y_n(x, k)) = 0.$$

Так как $\varphi_n(\infty; x, k) \sim a_1 x^{l+1}$, $x \to 0$, то при $l \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ (20) принимает вид

(23) $$\lim_{x\to 0} W(\varphi_n(\infty; x, 0), y_n(x, k)) = 0,$$

и это условие выделяет решения (1), пропорциональные $g_n(x,\ k)$. По аналогии при $l \in \left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ можно выделить (23) из остальных условий и называть каким-то образом. Так в [5] при $l=0$ условие (23), т.е. $y_n(0,\ k)=0$ называется нулевым, а (22) — вронскианским и задаче приписывается параметр $l=-1$. Мы придерживаемся этой терминологии.

2.3. В заключении п. 2 дефинируем некоторые функции и константы, связанные с граничными задачами (1), (22) и (1), (23). Пусть

$$(24)\qquad \left|\begin{array}{l} \psi_n(\alpha_n;\ x,\ k) = \dfrac{-\alpha_n}{1+\alpha_n^2} h_n(x,\ k) + \dfrac{1}{1+\alpha_n^2} g_n(x,\ k) \\ \psi_n(\infty;\ x,\ k)) = -h_n(x,\ k). \end{array}\right.$$

От того, что $W(h_n,\ g_n)=1$, следует $W(\varphi_n,\ \psi_n)=1$, $\alpha_n \in R^1$, $\alpha_n=\infty$. Из леммы 2.2 и 2.3 получаем, что $\varphi_n(\alpha_n;\ x,\ k)$ и $\psi_n(\alpha_n;\ x,\ k)$, $\alpha_n \in R^1$, $\alpha_n=\infty$ целые, четные функции от k. Дефинируем

$$\left|\begin{array}{l} e_n(\alpha_n;\ k) = (-ik)^l W(\varphi_n(\alpha_n;\ x,\ k),\ f_n(x,\ k)), \quad \alpha_n \in R^1 \\ e_n(\infty;\ k) = (-ik)^l W(f_n(x,\ k),\ \varphi_n(\infty;\ x,\ k)). \end{array}\right.$$

Видно, что

$$e_n(\alpha_n;\ k) = e_n(0;\ k) - \alpha_n e_n(\infty;\ k),$$

$$(25)\qquad f_n(x,\ k) = \frac{e_n(\infty;\ k)}{(-ik)^l} h_n(x,\ k) + \frac{e_n(0;\ k)}{(-ik)^l} g_n(x,\ k).$$

Из леммы 2.1, 2.2 и 2.3 следует, что $e_n(\alpha_n;\ k)$, $\alpha_n \in R^1$, $\alpha_n=\infty$ аналитична при $\operatorname{Im} k > 0$ и непрерывна при $\operatorname{Im} k \geqq 0$. Всегда можно найти такое $\alpha_n = \alpha_n^*$, что $e_n(\alpha_n^*;\ 0)=0$. При $e_n(\infty;\ 0)=0$: $\alpha_n^*=\infty$, а при $e_n(\infty;\ 0)\neq 0$: $\alpha_n^* = e_n(0;\ 0)[e_n(\infty;\ 0)]^{-1}$. Для простоты изложения, далее будем предполагать, что $e_n(\infty;\ 0)\neq 0$, $e_n(\alpha_n;\ 0)\neq 0$.

От того, что $\varphi_n(\alpha_n;\ x,\ k)$ четная функция от k, аналогично [1, с. 25] получаем для вещественных $k \neq 0$

$$\varphi_n(\alpha_n;\ x,\ k) = -\frac{1}{2ik}\frac{1}{(ik)^l}[e_n(\alpha_n;\ -k)f_n(x,\ k) - (-1)^l e_n(\alpha_n;\ k) f_n(x,\ -k)],$$

$$\varphi_n(\infty;\ x,\ k) = \frac{1}{2ik}\frac{1}{(ik)^l}[e_n(\infty;\ -k)f_n(x,\ k) - (-1)^l e_n(\infty;\ k) f_n(x,\ -k)].$$

Отсюда следует, что для $k \in R^1$, $k \neq 0$: $e_n(\alpha_n,\ k)\neq 0$, $\alpha_n \in R^1$, $\alpha_n=\infty$. Из асимптотик (13), (18) находим при $|k|\to\infty$, $\operatorname{Im} k \geqq 0$

$$(26)\qquad \varphi_n(\infty;\ x,\ k) = \frac{\sin(kx - \frac{l\pi}{2})}{k^{l+1}} + O\left(\frac{e^{\operatorname{Im} kx}}{|k|^{l+2}}\right), \quad l \in \left[-\frac{1}{2},\ \infty\right),$$

$$\varphi_n(\alpha_n;\ x,\ k)=\begin{cases}\dfrac{k^l}{\cos l\pi}\cos(kx+\dfrac{l\pi}{2})+O\left(|k|^{l-1}e^{\operatorname{Im}kx}\right), & l\in\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)\\ k^{-\frac{1}{2}}\left[\cos\left(kx+\dfrac{\pi}{4}\right)+\alpha_n\sin\left(kx+\dfrac{\pi}{4}\right)+\left(\dfrac{2}{\pi}\ln k\right)\cos\left(kx-\dfrac{\pi}{4}\right)\right] & \\ +O\left(|k|^{-\frac{3}{2}}\ln|k|e^{\operatorname{Im}kx}\right)+O\left(|k|^{-\frac{3}{2}}e^{\operatorname{Im}kx}\right), & l=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Отсюда для $e_n(\alpha_n;\ k)$, $\alpha_n\in R^1$, $\alpha_n=\infty$ имеем при $|k|\to\infty$, $\operatorname{Im}k\geqq 0$

$$e_n(\infty;\ k)=1+O(|k|^{-1}),\qquad l\in\left[-\frac{1}{2},\ \infty\right), \tag{27}$$

$$e_n(\alpha_n;\ k)=\begin{cases}\dfrac{i(-1)^l k^{2l+1}}{\cos l\pi}[1+O(|k|^{-1})], & l\in\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)\\ \left[i-\left(\alpha_n+\dfrac{2}{\pi}\ln k\right)\right][1+O(|k|^{-1})], & l=-\dfrac{1}{2}.\end{cases} \tag{28}$$

З а м е ч а н и е 2.2. Из (27), (28), (25) и (4) видно, что асимптотики функции $e_n(\infty;\ k)$, $e_n(\alpha_n;\ k)$ при $|k|\to\infty$, $\operatorname{Im}k\geqq 0$ совпадают со значениями этих функций при $v_n(x)\equiv 0$.

Из асимптотик (27), (28) видно, что число нулей функций $e_n(\alpha_n;\ k)$, $\alpha_n\in R^1$, $\alpha_n=\infty$ в области $\operatorname{Im}k\geqq 0$ конечное. Стандартно [1, с. 42] получается, что эти нули чисто мнимые. Докажем, что они простые.

Пусть $e_n(\alpha_n;\ k_1)=0$, $\alpha_n\in R^1$; $e_n(\infty;\ k_2)=0$, $k_n=i\kappa_n$, $\kappa_n>0$. Тогда $f_n(x,\ k_1)=D_1(v_n,\ \alpha_n)\varphi_n(\alpha_n;\ x,\ k_1)$. Обозначим

$$M_1^{-1}(v_n,\ \alpha_n)=\int_0^\infty f_n^2(x,\ k_1)dx,\qquad M_2^{-1}(v_n,\ \infty)=\int_0^\infty f_n^2(x,\ k_2)dx,$$

$$C_1^{-1}(v_n,\ \alpha_n)=\int_0^\infty \varphi_n^2(\alpha_n;\ x,\ k_1)dx,\quad C_2^{-1}(v_n,\ \infty)=\int_0^\infty \varphi_n^2(\infty;\ x,\ k_2)dx.$$

Справедлива следующая

Л е м м а 2.4. Имеют место представления

$$D_1(v_n,\ \alpha_n)=\frac{e_n(\infty;\ k_1)}{(-ik_1)^l},\qquad D_2(v_n,\ \infty)=\frac{e_n(0;\ k_2)}{(-ik_2)^l}, \tag{29}$$

$$\begin{aligned} M_1^{-1}(v_n,\ \alpha_n)&=\frac{e_n(\infty;\ k_1)\dot e_n(\alpha_n;\ k_1)}{2(-1)^l(k_1)^{2l+1}},\\ M_2^{-1}(v_n,\ \infty)&=-\frac{e_n(0;\ k_2)\dot e_n(\infty;\ k_2)}{2(-1)^l(k_2)^{2l+1}}, \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} C_1^{-1}(v_n,\ \alpha_n)&=\frac{\dot e_n(\alpha_n;\ k_1)}{2k_1e_n(\infty;\ k_1)},\\ C_2^{-1}(v_n,\ \infty)&=-\frac{\dot e_n(\infty;\ k_2)}{2k_2e_n(0;\ k_2)}. \end{aligned} \tag{31}$$

Доказательство получается аналогично [1, с. 44], [9], используя функцию $\psi_n(\alpha_n;\ x,\ k)$ из (24) и тождество

$$\frac{d}{dx} W(f_n(x,\ k),\ \dot f_n(x,\ k)) = -2k f_n^2(x,\ k).$$

С л е д с т в и е 2.1. Функции $e_n(\alpha_n;\ k)$, $\alpha_n \in R^1$ и $e_n(\infty;\ k)$ имеют простые нули.

Следуя [9], [13], можно получить при $x \to \infty$

$$(32)\qquad \left|\begin{aligned} \dot\varphi_n(\alpha_n;\ x,\ k_1) &= \frac{(-1)^l}{(2ik_1)(ik_1)^l}\dot e_n(\alpha_n;\ k_1)e^{\kappa_1 x}[1+o(1)] \\ \dot\varphi_n(\infty;\ x,\ k_2) &= -\frac{(-1)^l}{(2ik_2)(ik_2)^l}\dot e_n(\infty;\ k_2)e^{\kappa_2 x}[1+o(1)]. \end{aligned}\right.$$

3. ФОРМУЛЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ПРОИЗВЕДЕНИЯМ

3.1. Сначала получим ФРП $(l,\ v_1,\ \infty,\ v_2,\ \infty)$ при $l \in \left[-\frac{1}{2},\ \infty\right)$. Рассмотрим две РУШ

$$(33)\quad \frac{d^2}{dx^2}y_n + \left\{k^2 - \left[\frac{l(l+1)}{x^2} + v_n(x)\right]\right\} y_n = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad n = 1,\ 2,$$

с нулевыми граничными условиями

$$(34)\qquad \lim_{x\to 0} W(\varphi_n(\infty;\ x,\ 0),\ y_n(x,\ k)) = 0.$$

Предполагаем, что $v_n \in X_1$ и $l \in \left[-\frac{1}{2},\ \infty\right)$. Обозначим произведения

$$\Phi(\infty;\ x,\ k) = \varphi_1(\infty;\ x,\ k)\varphi_2(\infty;\ x,\ k),$$

$$F(x,\ k) = f_1(x,\ k)f_2(x,\ k),$$

$$E(\infty;\ k) = e_1(\infty;\ k)e_2(\infty;\ k)$$

и множества собственных значений

$$\sigma_n(\infty) = \{k_{n_j} : e_n(\infty;\ k_{n_j}) = 0, \quad j = 1, \ldots,\ N_n\},$$

$$\sigma(\infty) = \sigma_1(\infty)\cup\sigma_2(\infty), \quad \sigma'(\infty) = \sigma_1(\infty)\cap\sigma_2(\infty), \quad \sigma''(\infty) = \sigma(\infty)\backslash\sigma'(\infty).$$

Введем систему функций $\{\widetilde F(\infty)\}$

$$(35)\qquad \widetilde F(\infty;\ x,\ k) = -\frac{4}{\pi}(-1)^l k^{2l+1}\,\mathrm{Im}\left(\frac{F(x,\ k)}{E(\infty;\ k)}\right), \qquad k \in (0,\ \infty),$$

$$
(36)\qquad \begin{cases} \widetilde{F}_{n,j}(\infty;\ x) = a_{n,\ j}(\infty)F(x,\ k_{n,j}), & k_{n,j} \in \sigma''(\infty) \\ a_{n,j}(\infty) = \dfrac{4(-1)^l(k_{n,j})^{2l+1}}{\dot{E}(\infty;\ k_{n,j})}, & \end{cases}
$$

$$
(37)\qquad \begin{cases} \widetilde{F}_{j,1}(\infty;\ x) = b_j(\infty)[\dot{F}(x,\ k_j) + d_j(\infty)F(x,\ k_j)], \\ \widetilde{F}_{j,2}(\infty;\ x) = b_j(\infty)F(x,\ k_j), \qquad k_j \in \sigma'(\infty) \\ b_j(\infty) = \dfrac{8(-1)^l(k_j)^{2l+1}}{\ddot{E}(\infty;\ k_j)}, \qquad d_j(\infty) = \dfrac{2l+1}{k_j} - \dfrac{\dddot{E}(\infty;\ k_j)}{3\ddot{E}(\infty;\ k_j)}. \end{cases}
$$

Для произвольной функции $u(x) \in L(0,\ \infty)$ обозначим интегралы

$$
(38)\qquad \left|\begin{array}{l} \langle \Phi(\infty;\ k),\ u\rangle = \displaystyle\int_0^\infty \Phi(\infty;\ x,\ k)u(x)dx, \qquad k \in (0,\ \infty) \cup \sigma(\infty) \\ \langle \dot{\Phi}(\infty;\ k_j),\ u\rangle = \displaystyle\int_0^\infty \dot{\Phi}(\infty;\ x,\ k_j)u(x)dx, \quad k_j \in \sigma'(\infty). \end{array}\right.
$$

Как в [9], [13], используя (32), доказываем

Л е м м а 3.1. *Для каждой $u \in L(0,\ \infty)$ интегралы* (38) *сходятс абсолютно.*

ФРП$(l,\ v_1,\ \infty,\ v_2,\ \infty)$ устанавливается в следующей

Т е о р е м а 3.1. *Для каждой функции $u \in L(0,\ \infty)$ при $x >$ справедливо разложение*

$$
(39)\qquad \begin{aligned} -\int_x^\infty u(t)dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \widetilde{F}(\infty;\ x,\ k)\langle\Phi(\infty;\ k),\ u\rangle dk \\ + \sum_{\sigma''(\infty)} \widetilde{F}_{n,j}(\infty;\ x)\langle\Phi(\infty;\ k_{n,j}),\ u\rangle \\ + \sum_{\sigma'(\infty)}\left[\widetilde{F}_{j,1}(\infty;\ x)\langle\Phi(\infty;\ k_j),\ u\rangle + \widetilde{F}_{j,2}(\infty;\ x)\langle\dot{\Phi}(\infty;\ k_j),\ u\rangle\right]. \end{aligned}
$$

Доказательство. Оно проводится по схеме [9], [13]: Строим функц

$$
(40)\qquad G(\infty;\ x,\ t,\ k) = \frac{4(-1)^l k^{2l+1}}{E(\infty;\ k)} = \begin{cases} F(x,\ k)\Phi(\infty;\ t,\ k) & \text{при } 0 < t \leqq x \\ f_1(x,\ k)\varphi_2(\infty;\ x,\ k)\varphi_1(\infty;\ t,\ k)f_2(t,k) & \\ +\varphi_1(\infty;\ x,\ k)f_2(x,\ k)f_1(t,\ k)\varphi_2(\infty;\ t,\ k) & \\ -\Phi(\infty;\ x,\ k)F(t,\ k) & \text{при } x < t < \infty, \end{cases}
$$

$$U(\infty;\ x,\ k) = \int\limits_0^\infty G(\infty;\ x,\ t,\ k)u(t)dt, \quad I_R(\infty;\ x) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_R} U(\infty;\ x,\ k)dk,$$

где контур

$$\gamma_R = \{-R \leqq k \leqq R\}\bigcup \Gamma_R,\ \Gamma_R = \{k = Re^{i\theta},\ 0 \leqq \theta \leqq \pi\},\ R > \max|k_{n,j}|$$

обходится в положительном направлении. Контурный интеграл подсчитывается двумя способами, сперва по теореме о вычетах, а потом, используя асимптотики (12), (26) и (27) при $|k| \to \infty$, $\operatorname{Im} k \geqq 0$ находится асимптотика $I_R(\infty;\ x)$ при $R \to \infty$.

3.2. Сейчас остановимся на ФРП(l, v_1, α_1, v_2, α_2) при $l \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Рассмотрим (33) с вронскианскими граничными условиями

$$\lim_{x\to 0} W(\varphi_n(\alpha_n;\ x,\ 0),\ y_n(x,\ k)) = 0. \tag{41}$$

Обозначим произведения

$$\begin{aligned}
\Phi(\alpha;\ x,\ k) &= \varphi_1(\alpha_1;\ x,\ k)\varphi_2(\alpha_2;\ x,\ k),\\
\tilde{\Phi}(\alpha;\ x,\ k) &= \Phi(\alpha;\ x,\ k) - \frac{1}{2}\frac{k^{2l}}{\cos^2 l\pi},\\
E(\alpha;\ k) &= e_1(\alpha_1;\ k)e_2(\alpha_2;\ k)
\end{aligned}$$

и множества собственных значений

$$\sigma_n(\alpha_n) = \{k_{n,j}:\ e_n(\alpha_n;\ k_{n,j}) = 0,\quad j = 1, \dots, N_n\}, \qquad n = 1,\ 2,$$

$$\sigma(\alpha) = \sigma_1(\alpha_1)\cup\sigma_2(\alpha_2), \quad \sigma'(\alpha) = \sigma_1(\alpha_1)\cap\sigma_2(\alpha_2), \quad \sigma''(\alpha) = \sigma(\alpha)\setminus\sigma'(\alpha),$$

Введем систему функций $\{\tilde{F}(\alpha)\}$, аналогично (35), (36), (37). Для произвольной $u(x) \in L(0,\ \infty)$ обозначим интегралы

$$\begin{aligned}
\langle\tilde{\Phi}(\alpha;\ k),\ u\rangle &= \int\limits_0^\infty \tilde{\Phi}(\alpha;\ x,\ k)u(x)dx, \qquad k \in (0,\ \infty)\cup\sigma(\alpha)\\
\langle\dot{\tilde{\Phi}}(\alpha;\ k_j),\ u\rangle &= \int\limits_0^\infty \dot{\tilde{\Phi}}(\alpha;\ x,\ k_j)u(x)dx, \quad k_j \in \sigma'(\alpha).
\end{aligned} \tag{42}$$

Справедлива следующая

Л е м м а 3.2. Для каждой $u \in L(0,\ \infty)$ интегралы (42) сходятся абсолютно.

ФРП(l, v_1, α_1, v_2, α_2) устанавливается в

Т е о р е м а 3.2. *Для каждой функции $u \in L(0, \infty)$ при $x > 0$ справедливо разложение*

$$
(43) \qquad -\int_x^\infty u(t)dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \widetilde{F}(\alpha;\ x,\ k)\langle\widetilde{\Phi}(\alpha;\ k),\ u\rangle dk
$$

$$
+ \sum_{\sigma''(\alpha)} \widetilde{F}_{n,j}(\alpha;\ x)\langle\widetilde{\Phi}(\alpha;\ k_{n,j}),\ u\rangle
$$

$$
+ \sum_{\sigma'(\alpha)} \left[\widetilde{F}_{j,1}(\alpha;\ x)\langle\widetilde{\Phi}(\alpha;\ k_j),\ u\rangle + \widetilde{F}_{j,2}(\alpha;\ x)\langle\dot{\widetilde{\Phi}}(\alpha;\ k_j),\ u\rangle\right].
$$

Доказательство. Строим функцию $G(\alpha;\ x,\ t,\ k)$ аналогично (40). Пусть

$$
\begin{aligned}
G_1(\alpha;\ x,\ t,\ k) &= G(\alpha;\ x,\ t,\ k) - \frac{2(-1)^l k^{2l+1}}{E(\alpha;\ k)} \frac{k^{2l}}{\cos^2 l\pi} F(x,\ k), \\
U(\alpha;\ x,\ k) &= \int_0^\infty G(\alpha;\ x,\ t,\ k)u(t)dt, \\
I_R(\alpha;\ x) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R} U(\alpha;\ x,\ k)dk,
\end{aligned}
$$

где контур γ_R тот же как в теореме 3.1. Доказательство проводится аналогично.

Как частный случай при $v_n(x) \equiv 0$ из (41) и (43) можно получить формулы разложения по квадратам функций Беселя. В этом случае

$$
g_n(x,\ k) = g_0(x,\ k), \quad h_n(x,\ k) = h_0(x,\ k), \quad f_n(x,\ k) = f_0(x,\ k),
$$

$$
\begin{aligned}
e_n(\infty;\ k) &= 1, \\
e_n(\alpha_n;\ k) &= \begin{cases} 1 - \alpha_n \dfrac{i(-1)^l k^{2l+1}}{\cos l\pi}, & l \in \left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right) \\ i - \left(\alpha_n + \dfrac{\pi}{2}\ln k\right), & l = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

4. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ

Как следствие из теорем 3.1 и 3.2 легко получаем

Л е м м а 4.1. *Пусть для граничных задач (33), (34) и (33), (41) имеем $E(\alpha,\ 0) \neq 0$, $E(\infty,\ 0) \neq 0$. Тогда из условий*

$$
\langle\Phi(\infty,\ k),\ u\rangle = 0, \quad k \in (0,\ \infty) \cup \sigma(\infty),
$$

$$
\langle\dot{\Phi}(\infty,\ k_j),\ u\rangle = 0, \quad k_j \in \sigma'(\infty).
$$

или из условий

$$
(44) \qquad \begin{aligned} &\langle \widetilde{\Phi}(\alpha;\ k),\ u\rangle = 0, \quad k \in (0,\ \infty) \cup \sigma(\alpha), \\ &\langle \dot{\widetilde{\Phi}}(\alpha;\ k_j),\ u\rangle = 0, \quad k_j \in \sigma'(\alpha) \end{aligned}
$$

следует, что $U(x) = 0$ в $L(0,\ \infty)$.

В дальнейшем нам нужно расширение пространства $L(0,\ \infty)$ [10]. Обозначим пространство $W_1 = L(0,\ \infty) \oplus R^1$ и билинейную форму

$$
\langle \hat{f}_1,\ \hat{f}_2\rangle_1 = \int\limits_0^\infty f_1(x) f_2(x) dx + \mu_1\mu_2,
$$

$$
\hat{f}_n = (f_n(x),\ \mu_n) \in W_1, \qquad n = 1,\ 2.
$$

Обозначим элементы пространства W_1 :

$$
\hat{\Phi}(k) = (\Phi(\alpha;\ x,\ k),\ 1), \qquad k \in (0,\ \infty) \cup \sigma(\alpha),
$$

$$
\dot{\hat{\Phi}}(k_j) = (\dot{\Phi}(\alpha;\ x,\ k_j),\ 0), \qquad k_j \in \sigma'(\alpha).
$$

Справедлива следующая

Л е м м а 4.2. Пусть $\hat{u} = (u(x),\ \mu) \in W_1$. Если выполнено

$$
(45) \qquad \left| \begin{aligned} &\langle \hat{\Phi}(k),\ \hat{u}\rangle_1 = 0, \quad k \in (0,\ \infty) \cup \sigma(\alpha), \\ &\langle \dot{\hat{\Phi}}(k_j),\ \hat{u}\rangle_1 = 0, \quad k_j \in \sigma'(\alpha), \end{aligned} \right.
$$

то $\hat{u} = \hat{0}$, т.е. $u(x) = 0$, $\mu = 0$.

Доказательство. Рассуждения аналогичны [10]. То, что $\langle \hat{\Phi}(k),\ \hat{u}\rangle_1 = 0$, $k \in (0,\ \infty)$ введет к $\int\limits_0^\infty \Phi(\alpha;\ x,\ k) u(x) dx + \mu = 0$, $k \in (0,\ \infty)$, т.е.

$$
(46) \qquad \int\limits_0^\infty \left[\frac{\cos^2 l\pi}{k^{2l+1}} \Phi(\alpha;\ x,\ k)\right] u(x) dx + \left[\frac{\cos^2 l\pi}{k^{2l}}\right] \mu = 0, \qquad k \in (0,\ \infty).
$$

При $k \to \infty$ имеем

$$
(47) \qquad \frac{\cos^2 l\pi}{k^{2l}} \Phi(\alpha;\ x,\ k) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2kx + l\pi).
$$

а) Пусть $l = 0$. Тогда из (47) и леммы Римана — Лебега получаем

$$
(48) \qquad \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty u(t) dt + \mu = 0.
$$

Из (48) и (45) следует (44) и из леммы 4.1 получаем $u(x) = 0$. Тогда из (48) имеем $\mu = 0$.

б) Пусть $l \in \left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$. Из (47), (48) и леммы Римана — Лебега имеем

$$(49) \qquad \frac{1}{2}\int_0^\infty u(x)dx + \lim_{k\to\infty}\left[\frac{\cos^2 l\pi}{k^{2l}}\right]\mu = 0.$$

Но $\lim_{k\to\infty}\left[\frac{\cos^2 l\pi}{k^{2l}}\right] = \infty$, а $\frac{1}{2}\int_0^\infty u(x)dx < \infty$. Следовательно, если справедливо (49), то необходимо $\mu = 0$. Тогда $\frac{1}{2}\int_0^\infty u(x)dx = 0$ и снова из леммы 4.1 получаем $u(x) = 0$.

в) Пусть $l \in \left(0,\ \frac{1}{2}\right)$. Тогда $\lim_{k\to\infty}\left[\frac{\cos^2 l\pi}{k^{2l}}\right] = 0$. Следовательно, для любого $\mu \in R^1$ из (49) следует $\frac{1}{2}\int_0^\infty u(x)dx = 0$, т.е. для любого μ справедливо $\int_0^\infty \Phi(\alpha;\ x,\ k)u(x)dx + \mu = 0$ В частности, при $\mu = 0$ имеем

$$\int_0^\infty \Phi(\alpha;\ x,\ k)u(x)dx = 0, \quad k \in (0,\ \infty).$$

Аналогично получаем

$$\int_0^\infty \Phi(\alpha;\ x,\ k_{n,j})u(x)dx = 0, \qquad k_{n,j} \in \sigma(\alpha),$$

$$\int_0^\infty \dot{\Phi}(\alpha;\ x,\ k_j)u(x)dx = 0, \qquad k_j \in \sigma'(\alpha).$$

Тогда из леммы 4.1 следует $u(x) = 0$. Следовательно $\mu = 0$.

Рассмотрим краевую задачу (33), (34). Сопоставим задачи фазы рассеяния

$$\eta(v_n,\ \infty;\ k) = \arg e_n(\infty;\ k), \qquad 0 < k < \infty(\eta \to 0,\ k \to \infty),$$

нормировочные константы (см. (30))

$$M_j^{-1}(v_n,\ \infty) \equiv \int_0^\infty f_n^2(x,\ k_{n,j})dx = -\frac{e_n(0;\ k_{n,j})\dot{e}_n(\infty;\ k_{n,j})}{2(-1)^l(k_{n,j})^{2l+1}}$$

и данные рассеяния

$$Sc(v_n,\ \infty) = \{S(v_n,\ \infty;\ k),\ -\infty < k < +\infty;\ \lambda_{n,j} = (k_{n,j})^2,\ M_j(v_n,\ \infty)\},$$

где функция рассеяния

$$S(v_n,\ \infty;\ k) = \exp(-2i\eta(v_n,\ \infty;\ k)), \qquad 0 < k < \infty,$$
$$S(v_n,\ \infty;\ -k) = \overline{S(v_n,\ \infty;\ k)}.$$

Аналогично сопоставим краевой задачи (33), (41) ее данные рассеяния. Обозначим

$$\Delta\hat{v} = (\Delta v(x),\ \Delta\alpha), \qquad \Delta v(x) = v_1(x) - v_2(x), \qquad \Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2.$$

Л е м м а 4.3. Справедливы равенства

(50) $$\langle\Phi(\infty;\ k),\ \Delta v\rangle = \frac{|E(\infty;\ k)|}{k^{2l+1}}\sin[\eta(v_1,\ \infty;\ k) - \eta(v_2,\ \infty;\ k)],$$

$$\langle\Phi(\infty;\ k),\ \Delta v\rangle = -\frac{|E(\infty;\ k)|}{2ik^{2l+1}}[S(v_1,\ \infty;\ k) - S(v_2,\ \infty;\ k)], \quad k \in (0,\ \infty),$$

(51) $$\langle\Phi(\infty;\ k_{n,j}),\ \Delta v\rangle = (-1)^n 2(a_{n,j}(\infty))^{-1} M_j(v_n,\ \infty), \quad k_{n,j} \in \sigma''(\infty),$$

(52) $$\langle\Phi(\infty;\ k_j),\ \Delta v\rangle = 0,$$

$$\langle\dot{\Phi}(\infty;\ k_j),\ \Delta v\rangle = 2(b_j(\infty))^{-1}[M_j(v_1,\ \infty) - M_j(v_2,\ \infty)], \quad k_j \in \sigma'(\infty),$$

(53) $$\langle\hat{\Phi}(k),\ \hat{\Delta v}\rangle_1 = \frac{|E(\alpha;\ k)|}{k^{2l+1}}\sin[\eta(v_1,\ \alpha_1;\ k) - \eta(v_2,\ \alpha_2;\ k)],$$

$$\langle\hat{\Phi}(k),\ \hat{\Delta v}\rangle_1 = -\frac{E(\alpha;\ k)}{2ik^{2l+1}}[S(v_1,\ \alpha_1;\ k) - S(v_2,\ \alpha_2;\ k)], \quad k \in (0,\ \infty),$$

(54) $$\langle\hat{\Phi}(k_{n,j}),\ \Delta v\rangle_1 = (-1)^n 2(a_{n,j}(\alpha))^{-1} M_j(v_n,\ \alpha_n), \quad k_{n,j} \in \sigma''(\infty),$$

(55) $$\langle\Phi(k_j),\ \hat{\Delta v}\rangle_1 = 0,$$

$$\langle\dot{\hat{\Phi}}(k_j),\ \Delta v\rangle_1 = 2(b_j(\alpha))^{-1}[M_j(v_1,\ \alpha_1) - M_j(v_2,\ \alpha_2)], \quad k_j \in \sigma'(\alpha).$$

Доказательство, как известно [9], получается при помощи тождества

$$(56)\quad \begin{aligned} &\frac{d}{dx}W(\varphi_2(\alpha_2;\ x,\ k),\ \varphi_1(\alpha_1;\ x,\ k)) = [v_1(x) - v_2(x)]\Phi(\alpha;\ x,\ k) \\ &\frac{d}{dx}W(\varphi_2(\infty;\ x,\ k),\ \varphi_1(\infty;\ x,\ k)) = [v_1(x) - v_2(x)]\Phi(\infty;\ x,\ k). \end{aligned}$$

Интегрируя по x от 0 до ∞ для $k \in (0,\ \infty) \cup \sigma(\infty)$ и соответственно, $k \in (0,\ \infty) \cup \sigma(\alpha)$ получаем (50), (51) и (53), (54). Дифференцируя (56) по k при $k_j \in \sigma'(\infty)$, $k_j \in \sigma'(\alpha)$ и интегрируя по x от 0 до ∞, получаем (52) и (55). Характерное отличие при (53), (54) и (55), что

$$\lim_{x\to 0} W(\varphi_2(\alpha_2;\ x,\ k),\ \varphi_1(\alpha_1;\ x,\ k)) = \Delta\alpha, \qquad k \in (0,\ \infty) \cup \sigma(\alpha).$$

Этот факт приводит к необходимости расширения пространства $L(0,\ \infty)$ до W_1. Как уже отметили в п. 1, такое расширение естественно, потому что задача (33), (41) определяется потенциалом $v_n(x)$ и константой $\alpha_n \in R^1$ в краевом условии.

Как следствие лемм 4.1, 4.2 и 4.3 получаем

Теорема 4.1. Пусть для краевых задач (33), (34) известно, что $Sc(v_1,\ \infty) = Sc(v_2,\ \infty)$. Тогда $v_1(x) \equiv v_2(x)$.

Теорема 4.2. Пусть для краевых задач (33), (41) известно, что $Sc(v_1,\ \alpha_1) = Sc(v_2,\ \alpha_2)$. Тогда $v_1(x) \equiv v_2(x)$ и $\alpha_1 = \alpha_2$.

Автор выражает глубокую благодарность проф. д-р Е. Христову за внимание к этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шадан, К., П. Сабатье. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния, М., Мир, 1980.
2. Коддингтон, Э.А., А. Левинсон. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., ИЛ, 1958.
3. Newton, R. The complex j-plane. W.A. Benjamin, N.Y., Amsterdam, 1964.
4. Сохин, А. Обратная задача рассеяния для уравнения с особенностью. – Труды ФТИНТ АН УССР, Мат. физ. и функц. анализ, вып. II, Харьков, 1971.
5. Корон, В. Обратная задача рассеяния для уравнения с особенностью. Сиб. мат. журнал, 11, 1961, №5, 672–693.
6. Левитан, Б. Обратные задачи Штурма – Лиувилля, М., Наука, 1984.
7. Корн, Г., Т. Корн. Справочник по математике. М., Наука, 1984.
8. Агранович, З., В. Марченко. Обратная задача теории рассеяния. Харьков, 1960.
9. Христов, Е. О спектральных свойствах операторов, связанных с разложениями по произведениям решений двух радиальных уравнений Шредингера. I. Формулы разложения. II. Спектральная теория. – Год. Соф. унив., Фак. мат. и мех., 75, 1981, кн. 2 – Механика.

10. Кирчев, К., Е. Христов. О разложениях, связанных с произведениями решений двух регулярных задач Штурма–Лиувилля. — Сиб. мат. журнал, 21, 1980, 98–109.
11. Мишев, Й., Е. Христов. Об [illegible] задаче [illegible] рассеяния для радиального уравнения Ш[illegible] теория операторов $\Lambda_0^{(l)}$ и $\Lambda_\infty^{(l)}$. — Год. [illegible] Фак. [illegible] 98[illegible], кн. 2 — Механика.
12. Титчмарш, Э.Ч. Разложения [illegible], М., ИЛ, 1961.
13. Христов, Е. О разложениях по произведениям решений двух задач Штурма–Лиувилля на полуоси. — Дифф. уравн., 16, 1980, 2023–2029.

Поступила на 14. IV. 1989 г.

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 2 — Механика
Том 82, 1988

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA "ST. KLIMENT OHRIDSKI"
FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 2 — Mécanique
Tome 82, 1988

ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

ВАСИЛ ВАСИЛЕВ

Васил Василев. ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

В работе исследуется инвариантность одного класса линейных дифференциальных уравнений по отношению к однопараметрическим группам Ли. Данный класс уравнений выбран в качестве предмета исследований в связи с тем, что к этому классу относится ряд уравнений механики пластин и оболочек. Доказано, что если уравнение данного вида допускает группу, то сужение этой группы на пространстве независимых переменных является не более чем шестипараметрической подгруппой группы конформных преобразований евклидовой плоскости. Полностью определены групповые свойства уравнений данного класса по отношению к группе гомотетий.

Vassil Vassilev. GROUP PROPERTIES OF A CLASS OF FOURTH-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

The invariance under Lie groups of transformations of a class of linear p. d. eqns is investigated. The choice of this class of p. d. eqns is grounded on its applicability to different mechanical problems. A set of determining equations is obtained for the generators of admissible symmetry groups. A group - classification theorem is proved. If p. d. eqn of the considred class admits a group, then the restriction of this group on

the space of independent variables is not broader then a six - parameter subgroup of conformal transformations group of the plane. The group properties of the [illegible] [illegible] with respect to the homothetic [illegible] group of the [illegible]

1. ОПИСАНИЕ КЛАССА УРАВ[illegible]

[illegible] пространстве независимых [illegible] [illegible] класс [illegible] однородных дифференциа[illegible] [illegible]да

$$(1) \qquad g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla_\mu\nabla_\nu w + a^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta w + b^{\alpha}\nabla_\alpha \text{[illegible]}$$

для искомой функции w. В этой записи принято: [illegible] пр[illegible]ранство R^2 отнесено к общей системе криволинейных координат (x^1, x^2), через $g^{\alpha\beta}$ обозначен метрический тензор пространства R^2; ∇ — оператор ковариантного дифференцирования; $a^{\alpha\beta} = a^{\beta\alpha}, b^\alpha$ и c соответственно тензорное, векторное и скалярное поля на $\mathbf{R}^2$ класса $\mathbf{C}^\infty$; греческие индексы принимают значения 1, 2; по повторяющемуся ковариантному и контравариантному греческому индексу производится суммирование.

В работе изучаются групповые свойства уравнений вида (1) в смысле инвариантности относительно локальных групп Ли точечных переобразований пространства $\mathbf{R}^3(x^1, x^2, w)$ независимых и зависимой переменных и проводится групповая классификация по отношению к произвольному элементу набору $\{a^{\alpha\beta}, b^\alpha, c\}$ коэффициентов уравнения (см. [1, §6]).

Данный клас дифференциальных уравнений выбран в качестве предмета исследований в связи с тем, что к этому классу относится ряд уравнений механики пластин и оболочек, а также и некоторые уравнения гидроупругости и магнитоупругости (см. [2 -6]).

2. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

Построение системы определяющих уравнений для касательного поля $\zeta = (\xi^1, \xi^2, \eta)$ группы $G(\xi)$, допускаемой уравнением вида (1), осуществляется в соответствии с алгоритмом Ли — Овсянникова [1, с.69]. Решение этой задачи не вызывает приинципиальных затруднений, однако оно связано с довольно большим объемом аналитических выкладок. Поэтому ниже приводятся только окончательные результаты.

Т е о р е м а 1. а) Группа, допускаемая уравнением класса (1), содержит стандартную (связанную с линейностью и однородностью данных уравнений) инвариантную подгруппу, порожденную операторами

$$X_0 = w\partial/\partial w, \qquad X_u = u\partial/\partial w,$$

где u — решение уравнения.

б) Беря факторгруппу по этой инвариантной подгрупне, каждый допускаемый оператор можно представить в виде

$$(2) \qquad X = \xi^\mu\partial/\partial x^\mu + (1/2)(w\nabla_\mu\xi^\mu)\partial/\partial w,$$

[illegible] допускает оператор вида (2) тогда и только [illegible] является решением системы уравнений

$$[illegible]\nabla_\mu\xi^\alpha = [illegible]\nabla[illegible]$$

$$[illegible]\xi^\mu\nabla_\mu a_\alpha [illegible] = -2\nabla[illegible]\nabla_\beta\nabla_\mu\xi^\mu,$$

$$[illegible]\nabla_\mu\xi [illegible] + \xi^\mu\nabla_\mu b_\alpha = -(a/2)\nabla_\alpha\nabla_\mu\xi^\mu$$

$$2p\nabla_\mu\xi^\mu + \xi^\mu\nabla_\mu p = 0,$$

[illegible] $a \neq 0$, или уравнения

$$2q\nabla_\mu\xi^\mu + \xi^\mu\nabla_\mu q = 0,$$

[illegible] $a = 0$, где

$$a = g_{\mu\nu}a^{\mu\nu},$$

$$p = 8c - a_{\mu\nu}a^{\mu\nu} - (4/a)b_\mu b^\mu,$$

$$q = 8c - a_{\mu\nu}a^{\mu\nu} - 4\nabla_\mu b^\mu.$$

Пусть G — группа преобразований пространства $\mathbf{R}^3(x^1, x^2, w)$ с оператором (2), а G_r — ее сужение на пространстве $\mathbf{R}^2(x^1, x^2)$, определенном [illegible] оператором

$$X_r = \xi^\mu(x)\partial/\partial x^\mu.$$

Если группа G допускается уравнением (1), то в силу теоремы 1 касательное поле ξ^μ группы G_r удовлетворяет уравнениям (3). Эти уравнения, как известно, являются определяющими уравнениями группы конформных преобразований пространства $\mathbf{R}^2$. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Сужение G_r группы G, допускаемой уравнением вида (1), является подгруппой группы конформных преобразований пространства $\mathbf{R}^2$.

Определяющие уравнения (3), записанные в прямоугольной декартовой системе координат* x^1, x^2, совпадают с уравнениями Коши — Римана

$$\frac{\partial\xi^1}{\partial x^1} = \frac{\partial\xi^2}{\partial x^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial\xi^1}{\partial x^2} + \frac{\partial\xi^2}{\partial x^1} = 0.$$

*[illegible] компоненты соответствующих тензорных [illegible] прямоугольной декартовой системы координат в пространстве $\mathbf{R}$[illegible]

Поэтому каждому решению ξ^{μ} системы определяющих уравнений (3) — (7) соответствует голоморфная комплексная функция

$$f = \tilde{\xi}^1 + i\tilde{\xi}^2 \tag{11}$$

комплексной переменной $z = \tilde{x}^1 + i\tilde{x}^2$. Записывая формально уравнения (3) — (7) в системе координат $(z, \bar{z})$, определяемой соотношениями

$$z = \tilde{x}^1 + i\tilde{x}^2, \qquad \bar{z} = \tilde{x}^1 - i\tilde{x}^2,$$

приходим к эквивалентной системе уравнений для функции (11). Она состоит из уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \tag{12}$$

$$f''' + 2hf' + \frac{\partial h}{\partial z} f + \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} \bar{f} = 0, \tag{13}$$

$$a(f' + \bar{f}') + \frac{\partial a}{\partial z} f + \frac{\partial a}{\partial \bar{z}} \bar{f} = 0, \tag{14}$$

$$af'' + b(2f' + \bar{f}') + \frac{\partial b}{\partial z} f + \frac{\partial b}{\partial \bar{z}} \bar{f} = 0 \tag{15}$$

и уравнения

$$2p(f' + \bar{f}') + \frac{\partial p}{\partial z} f + \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \bar{f} = 0, \tag{16}$$

если $a \neq 0$, или уравнения

$$2q(f' + \bar{f}') + \frac{\partial q}{\partial z} f + \frac{\partial q}{\partial \bar{z}} \bar{f} = 0, \tag{17}$$

если $a = 0$. В уравнениях (12) — (17) приняты обозначения

$$h = (\tilde{a}_{11} - \tilde{a}_{22} - 2i\tilde{a}_{12})/8, \tag{18}$$

$$b = \tilde{b}_1 - i\tilde{b}_2, \tag{19}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1} - i\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^2}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1} + i\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^2}\right). \tag{20}$$

В записи уравнений (13) — (17) учитывается, что действие оператора $\partial/\partial z$ совпадает с дифференцированием по переменной z (оно здесь обозначается штрихом) только на множестве голоморфных функций, которое, как известно, совпадает с ядром оператора $\partial/\partial\bar{z}$. Как обычно, если v некоторая комплексная функция, то чрез $\bar{v}$ обозначена ее комплексно сопряженная.

Задача групповой классификации дифференциальных уравнений (1) сводится к задаче классификации пространства голоморфных решений системы уравнений (13) — (17) по отношению к произвольному элементу — набору функций $\{h, a, b, p\}$, если $a \neq 0$ или $\{h, b, q\}$, если $a = 0$.

3.ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Пусть $f(z)$ — голоморфная функция, а $\varphi(z)$ - вещественная функция, отличная от нуля. Рассмортим следующее уравнение для функции $f(z)$:

$$f' + \overline{f}' + \frac{\partial \ln\varphi}{\partial z} f + \frac{\partial \ln\varphi}{\partial \bar{z}} \overline{f} = 0. \tag{21}$$

Для коэффициентов этого уравнения существуют следующие альтернативные возможности: (A) функция φ удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\frac{\partial^2 \ln\varphi}{\partial z \partial \bar{z}} = C\varphi,$$

где C некоторая вещественная постоянная; (B) для любой вещественной постоянной C выполняется

$$\frac{\partial^2 \ln\varphi}{\partial z \partial \bar{z}} \neq C\varphi. \tag{22}$$

Случай (A). Здесь существуют две возможности: (A_1) $C = 0$ и (A_2) $C \neq 0$.

(A_1) Если $C = 0$, то $\ln\varphi$ будет гармонической функцией. Поэтому функцию φ можно представить в виде

$$\varphi = \chi'\overline{\chi}', \tag{23}$$

где χ и λ — голоморфные функции, отличные от постоянной. С помощью подстановки (23) уравнение (21) сводится к следующему уравнению

$$f' + (\chi''/\chi')f = C_1 + iC_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные вещественные постоянные. Отсюда следует, что в данном случае каждое решение уравнения (21) имеет вид

$$f = C_1\frac{\chi}{\chi'} + C_2\frac{i\chi}{\chi'} + C_3\frac{1}{\chi'} + C_4\frac{i}{\chi'},$$

где C_3 и C_4 — произволные вещественные постоянные. Это означает, что в рассматриваемом случае пространство решений уравнения (21) является четырехмерным векторным пространством над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$.

(A_2) Если $C \neq 0$, то, используя общее представление решений уравнения Лиувилля [1, с. 129], [8, с. 7], функцию φ можно записать в виде

$$\varphi = \frac{2}{C}\frac{\varkappa'\bar{\lambda}'}{(\varkappa + \bar{\lambda})^2}, \tag{24}$$

где $\varkappa$ и λ — голоморфные функции, отличные от постоянной. Если к уравнений (21) применить оператор $\partial/\partial z$, потом разделить на $C\varphi$ и к полученному результату снова применить оператор $\partial/\partial z$, то получается уравнение, которое с помощью подстановки (24) можно представить в виде

$$f''' + 2\omega f' + \omega' f = 0,$$

где

$$\omega = \left(\frac{\varkappa''}{\varkappa'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{\varkappa''}{\varkappa'}\right)^2$$

Прямой подстановкой можно проверить, что общее решение этого уравнения дается формулой

$$f = k_1\frac{1}{\varkappa'} + k_2\frac{\varkappa}{\varkappa'} + k_3\frac{\varkappa^2}{\varkappa'}, \tag{25}$$

где k_1, k_2 и k_3 — комплексные постоянные. В данном случае каждое решение исходного уравнения (21) будет функцией вида (25), но не все функции указанного вида являются решениями этого уравнения. Действительно, пусть f_0 нетривиальное решение уравнения (21). Допустим, что if_0 тоже удовлетворяет этому уравнению. Теперь, если подставить эти функции в уравнение (21) и к сумме полученных выражений применить оператор $\partial/\partial\bar{z}$, то оказывается, что

$$\frac{\partial^2 \ln\varphi}{\partial z\partial\bar{z}} f_0 = 0.$$

Но в данном случае

$$\frac{\partial^2 \ln\varphi}{\partial z\partial\bar{z}} \neq 0$$

и, значит, $f_0 = 0$. Получается противоречие. Из этого следует вывод, что не существует решения f_0 (кроме $f_0 = 0$), для которого функция if_0 была бы тоже решением этого уравнения. По этой причине, если $(f_j), j = 1, 2, 3$ — базис в пространстве функций вида (25), такой, что каждая из функций f_j удовлетворяет уравнению (21), то решениями этого уравнения могут быть только линейные комбинации функций f_j с вещественными коэффициентами. Поэтому в данном случае пространство решений уравнения (21) будет не более чем трехмерное векторное пространство над $\mathbb{R}$.

Случай (B). Введем в рассмотрение функцию

$$\psi = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varphi}\frac{\partial^2 \ln\varphi}{\partial z\partial\bar{z}}\right). \tag{26}$$

В силу предположения (22) эта функция хорошо определена и отлична от нуля. Если к уравнению (21) применить оператор $\partial^2/\partial z\partial \bar{z}$, потом разделить на $\partial^2 \ln \varphi/\partial z\partial \bar{z}$ и из последнего выражения вычесть уравнение (21), то получается уравнение, которое, после некоторых элементарных преобразований, можно записать, с помощью подстановки (26), в виде

$$f' + \frac{\partial \ln(\varphi/\bar{\varphi})}{\partial z} = 0. \tag{27}$$

Уравнение (27) имеет нетривиальное решение только тогда, когда

$$\frac{\partial^2 \ln(\varphi/\bar{\varphi})}{\partial z\partial \bar{z}} = 0.$$

В этом случае имеет место представление

$$(\varphi/\bar{\varphi}) = \sigma\bar{\lambda},$$

где σ и λ — голоморфные функции, отличные от нуля. Поэтому общее решение уравнения (27) имеет вид

$$f = k(1/\sigma). \tag{28}$$

где k — комплексная постоянная. Следовательно, в данном случае каждое решение исходного уравнения (21) будет функцией вида (28). Пусть f_0 — нетривиальное решение уравнения (21). Тогда функции f_0 и if_0 можно взять в качестве базиса пространства функций вида (28). Но, учитывая, что функция if_0 не является решением уравнения (21) (см. A_2), приходим к выводу, что пространство решений уравнения (21) в рассматриваемом случае будет не более чем одномерное векторное пространство над $\mathbf{R}$.

4 АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ (14), (16) И (17)

Каждое из этих уравнений удовлетворяется тождественно, если соответствующая функция a, p или q равна нулю. Если эти функции отличны от нуля, то очевидно, каждое из указанных уравнений можно представить в виде (21), если положить соответственно

$$\varphi = a, \qquad \varphi = p^{1/2}, \qquad \varphi = q^{1/2}.$$

5 АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ (15)

Пусть $a = 0, b = 0$. Тогда уравнение (15) удовлетворяется тождественно

Пусть $a = 0, b \neq 0$. Тогда, если уравнение (15) разделить на b и прибавить к полученному уравнению его комплексно сопряженное, то с помощью подстановки

$$\varphi = (b\bar{b})^{1/3} \tag{29}$$

приходим к уравнению (21).

Отметим, что если воспользоваться соотношением (19), то функцию (29) можно выразить в ковариантной форме

$$\varphi = (b^\mu b_\mu)^{1/3}.$$

Пусть $a \neq 0, b = 0$. Тогда общее решение уравнения (15) дается формулой

$$f = k_1 z + k_2,$$

где k_1 и k_2 — комплексные постоянные.

Пусть $a \neq 0, b \neq 0$. Тогда уравнение (15) можно заменить следующим эквивалентным уравнением

$$d(2f' + \bar{f}') + \frac{\partial d}{\partial \bar{z}} f + \frac{\partial d}{\partial \bar{z}} \bar{f} = 0, \tag{30}$$

где

$$d = 2b - 2\partial a/\partial z. \tag{31}$$

Действительно, если к уравнению (14) применить оператор $\partial/\partial z$ и вычесть полученное выражение из уравнения (15), то после подстановки (31) приходим к уравнению (30). Если $d \neq 0$, то оно сводится к уравнению (21), если положить

$$\varphi = (d\bar{d})^{1/3}. \tag{32}$$

Если $d = 0$, то уравнение (30) удовлетворяется тождественно. Используя выражения (19) и (20) и вектор

$$d^\alpha = 2b^\alpha - \nabla^\alpha a,$$

представим функцию (31) в виде

$$d = d^1 - id^2.$$

Из этого следует, что выражение (32) можно записать в ковариантной форме

$$\varphi = (d^\mu d_\mu)^{1/3}.$$

6. АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ (13)

Для коэффициентов уравнения (13) существуют две возможности: (1°) $\partial h/\partial \bar{z} = 0$; (2°) $\partial h/\partial \bar{z} \neq 0$.

Случай (1°). Пусть $\partial h/\partial \bar{z} = 0$. Тогда функция h будет голоморфной, а уравнение (13) примет вид

$$f''' + 2hf' + h'f = 0. \tag{33}$$

Пространство решений этого уравнения является трехмерным векторным пространством над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$. Его можно овеществить обычным способом (см. например [7]) и рассматривать дальше как шестимерное векторное пространство над $\mathbf{R}$.

Случай (2°). Пусть $\partial h/\partial \bar{z} \neq 0$. Тогда если к уравнению (13) применить оператор $\partial/\partial z$, потом разделить на $\partial h/\partial \bar{z}$ и прибавить к полученному уравнению его комплекно сопряженное, то, полагая

$$\varphi = \left(\frac{\partial h}{\partial \bar{z}}\frac{\overline{\partial h}}{\partial \bar{z}}\right)^{1/3} \tag{34}$$

приходим к уравнению (21).

Отметим, что с помощью вектора

$$a^{\alpha} = 2\nabla_{\mu}a^{\alpha\mu} - \nabla^{\alpha}a \tag{35}$$

функцию $\partial h/\partial \bar{z}$ можно выразить следующим образом

$$\partial h/\partial \bar{z} = \tilde{a}^1 - i\tilde{a}^2, \tag{36}$$

а функцию (34) можно записать в ковариантной форме $\varphi = (a^{\mu}a_{\mu})^{1/3}$. Ето можно показать, исходя из выражений (8), (18) и (20).

7. КЛАССИФИКАЦИОННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Здесь формулируются наиболее существенные результаты групповой классификации уравнений вида (1), которые устанавливаются на основании анализа определяющих уравнений (13) — (17), проведенного в п.п. 3 — 6.

Т е о р е м а 3. Если уравнение класса (1) допускает группу G, то эта группа не более чем шестипараметрическая.

Доказательство. Если уравнение вида (1) допускает группу G, то, в силу теоремы 1, касательное поле ξ^{α} ее суждения G_r удовлетворяет системе определяющих уравнений (3) — (7). Но, как было показано в п.2, это выполняется тогда и только тогда, когда $f = \tilde{\xi}^1 + i\tilde{\xi}^2$ является голоморфной функцией, принадлежащей пространству решений системы уравнений (12) — (17), и, в частности, пространству решений уравнения

(13). Так как пространство решений уравнения (13) является не более чем шестимерным векторным пространством над $\mathbf{R}$ (см. п.6 и п.3), то группа G будет не более чем шестипараметрической. Тогда, учитывая, что, согласно общему виду допускаемого оператора (2), число параметров группы G совпадает с числом параметров группы G_x, приходим к выводу, что группа G не более чем шестипараметрическая.

Т е о р е м а 4. Если группа G допускается уравнением класса (1), для которого хотя бы один из векторов a^α, b^α или скаляров a, q отличен от нуля, то эта группа не более чем четырехпараметрическая.

Доказательство. Если хотя бы один из векторов a^α, b^α или скаляров a, q отличен от нуля, то тогда система определяющих уравнений (12) — (17) содержит хотя бы одно уравнение, которое можно свести к уравнению вида (21), причем соответствующая функция φ будет отлична от нуля. В случае $a \neq 0$ это уравнение (14) (см. п.4); в случае $a = 0, q \neq 0$ — уравнение (17) (см. п.4); в случае $a = 0, b^\alpha \neq 0$ — уравнение (15) (см. п.5), причем здесь надо учитывать, что, согласно выражению (19), $b^\alpha \neq 0$ тогда и только тогда, когда $b \neq 0$; в случае $a = 0, a^\alpha \neq 0$ это уравнение (13) (см. п.6), причем здесь надо учитывать, что, согласно выражению (36), $a^\alpha \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\partial h/\partial \bar{z} \neq 0$ и тогда имеет место случай 2^o, п.6. Как было показано в п.3, пространство решений уравнения (21) при $\varphi \neq 0$ является не более чем четырехмерным векторным пространством над $\mathbf{R}$. Отсюда, аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 3, можно заключить, что допускаемая группа не более чем четырехпараметрическая.

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия для того, чтобы уравнение класса (1) допускало группу максимального порядка.

Т е о р е м а 5. Уравнение вида (1) допускает шестипараметрическую группу G тогда и только тогда, когда все векторы a^α, b^α и скаляры a, q тождественно равны нулю.

Доказательство. Если все перечисленные векторы и скаляры тождественно равны нулю, то тогда, учитывая соотношения (19) и (36), приходим к выводу, что все определяющие уравнения, кроме уравнения (13), удовлетворяются тождественно, а оно сводится к уравнению (33) (см. 1^o, п.6). Из этого следует, что пространство решений системы определяющих уравнений, в данном случае, будет шестимерным векторным пространством над $\mathbf{R}$. Как уже обсуждалось при доказательстве теоремы 3, размерность этого пространства совпадает с числом параметров допускаемой группы, и, следовательно, эта группа будет шестипараметрической.

Наоборот, если хотя бы один из перечисленных векторов и скаляров отличен от нуля, то, согласно теореме 4, допускаемая группа не более чем четырехпараметрическая.

С л е д с т в и е. Уравнение вида (1) допускает шестипараметрическую группу G, которая, в силу теоремы 3, является группой максимального порядка для уравнений данного класса тогда и только тогда, когда для его коэффициентов имеют место соотношения

$$a^{\alpha\beta} = \nabla^\alpha\nabla^\beta\Phi, \quad b^\alpha = 0, \quad c = (1/8)(\nabla^\mu\nabla^\nu\Phi)\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi), \tag{37}$$

где Φ — произвольная гармоническая функция.

Доказательство. Соотношения (37) эквивалентны условиям теоремы 5. Действительно, свертывая равенства $(37)_1$ с метрическим тензором $g^{\alpha\beta}$, получаем, что $a = 0$, так как функция Φ гармоническая. По той же причине равна нулю и дивергенция тензора $a^{\alpha\beta}$. Тогда из формулы (35) следует, что $a^\alpha = 0$. Если подставить формулы (37) в выражение (10), то получается, что $q = 0$. Наоборот, если $a = 0$ и $a^\alpha = 0$; то из формулы (35) следует, что дивергенция симметрического тензора $a^{\alpha\beta}$ равна нулю. Но это, как известно, является необходимым и достаточным условием существования функции Φ, такой, что

$$a^{\alpha\beta} = \nabla^\alpha\nabla^\beta\Phi - g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi. \tag{38}$$

Свертывая обе части равенства (38) с метрическим тензором $g^{\alpha\beta}$ и учитывая, что $a = 0$, получаем

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi = 0, \tag{39}$$

т.е.Φ будет гармонической функцией. Из выражений (38) и (39) следует соотношение $(37)_1$. И наконец, если $q = 0$, то из выражений (10) и $(37)_{1,2}$ получается соотношение $(37)_3$.

Результаты, полученные в п.п.3 — 6, дают возможность осуществить более детальную групповую классификацию уравнений класса (1), но здесь мы ограничились изложением только наиболее общих групповых свойств уравнений данного вида.

8. ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЙ КЛАССА (1) ПО ОТНОШЕНИЮ К ГРУППЕ ГОМОТЕТИЙ ПРОСТРАНСТВА $\mathbf{R}^2$

Определяющие уравнения группы гомотетий пространства $\mathbf{R}^2$, как известно, имеют вид

$$g^{\alpha\mu}\nabla_\mu\xi^\beta + g^{\beta\mu}\nabla_\mu\xi^\alpha = 2C_1 g^{\alpha\beta}$$

с общим решением

$$\begin{aligned} \xi^1 &= C_1 x^1 - C_2 x^2 + C_3, \\ \xi^2 &= C_2 x^1 + C_1 x^2 + C_4, \end{aligned} \tag{40}$$

где $C_1 - C_4$ — вещественные постоянные. Общий вид оператора этой группы дается формулой

$$X = \sum_{j=1}^{4} C_j X_j. \tag{41}$$

где

$$X_1 = \tilde{x}^1\partial/\partial\tilde{x}^1 + \tilde{x}^2\partial/\partial\tilde{x}^2, \qquad X_3 = \partial/\partial\tilde{x}^1,$$

$$X_2 = \tilde{x}^1\partial/\partial\tilde{x}^2 - \tilde{x}^2\partial/\partial\tilde{x}^1, \qquad X_4 = \partial/\partial\tilde{x}^2.$$

Группа гомотетий является подгруппой группы конформных преобразований, определенной условием $\nabla_\mu\xi^\mu = 2C_1$. Поэтому ее касательное поле ξ^α удовлетворяет определяющим уравнениям (3). Остальные определяющие уравнения, с учетом выражений (40), после некоторых элементарных преобразований можно записать в виде

$$4C_1\tilde{a}^{\alpha\beta} - \tilde{a}^{\alpha\mu}\frac{\partial\tilde{\xi}^\beta}{\partial\tilde{x}^\mu} - \tilde{a}^{\mu\beta}\frac{\partial\tilde{\xi}^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu} + \tilde{\xi}^\mu\frac{\partial\tilde{a}^{\alpha\beta}}{\partial\tilde{x}^\mu} = 0, \tag{42}$$

$$4C_1\tilde{b}^\alpha - \tilde{b}^\mu\frac{\partial\tilde{\xi}^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu} + \tilde{\xi}^\mu\frac{\partial\tilde{b}^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu} = 0, \tag{43}$$

$$4C_1\tilde{c} + \tilde{\xi}^\mu\frac{\partial\tilde{c}}{\partial\tilde{x}^\mu} = 0. \tag{44}$$

Тогда, согласно теореме 1, уравнение (1) допускает оператор (41) тогда и только тогда, когда его коэффициенты удовлетворяют уравнениям (42) — (44) для соответствующего набора вещественных постоянных C_1, C_2, C_3, C_4.

Следующая теорема дает эффективный критерий, характеризующий уравнения класса (1), допускающие операторы вида (41).

Т е о р е м а 6. Уравнение класса (1) допускает оператор вида (41) тогда и только тогда, когда в пространстве $\mathbf{R}^2$ существует система координат (t^1, t^2), относительно которой для компонент метрического тензора и коэффициентов уравнения имеют место соотношения

$$g^{\alpha\beta}(t^1, t^2) = g^{*\alpha\beta}(t^2)\exp\{-2C_1t^1\}, \tag{45}$$

$$a^{\alpha\beta}(t^1, t^2) = a^{*\alpha\beta}(t^2)\exp\{-4C_1t^1\}, \tag{46}$$

$$b^\alpha(t^1, t^2) = b^{*\alpha}(t^2)\exp\{-4C_1t^1\}, \tag{47}$$

$$c(t^1, t^2) = c^*(t^2)\exp\{-4C_1t^2\}, \tag{48}$$

Доказательство этой теоремы существенно опирается на следующие две леммы, доказательство которых не представляет большой трудности и поэтому не приводится.

Л е м м а 1. Компоненты метрического тензора $g^{\alpha\beta}$ пространства $\mathbf{R}^2$ в системе координат (t^1, t^2) имеют вида (45) тогда и только тогда, когда преобразования системы координат (t^1, t^2) в прямолинейной декартовой системе координат удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial t^1} = \tilde{\xi}^\alpha, \tag{49}$$

где функции $\tilde{\xi}^\alpha$ имеют вид (40).

Л е м м а 2. Компоненты тензора $a^{\alpha\beta}$, вектора b^α и скаляр C в системе координат (t^1, t^2) имеют вид соответственно (46) — (48) тогда и только тогда, когда преобразования системы координат (t^1, t^2) в прямолинейной декартовой системе координат удовлетворяют соотношениям (49), а компоненты $\tilde{a}^{\alpha\beta}, \tilde{b}^\alpha$ и $\tilde{c}$ удовлетворяют уравнениям (42) — (44), где функции $\tilde{\xi}^\alpha$ имеют вид (40).

Установленные групповые свойства уравнений класса (1) по отношению к группе гомотетий пространства $\mathbf{R}^2$ могут быть эффективно использованы для анализа и решения этих уравнений. Например, если уравнение данного класса допускает оператор вида (41), то с помощью преобразования системы координат, определяемого из выражений (49), его можно привести к эквивалентному уравнению с коэффициентами вида (45) — (48). В этом случае $\exp\{-4C_1 t^1\}$ является общим множителем, который можно сократить, и таким способом получить уравнение, эквивалентное первоначальному, но с коэффициентами, не зависящими от одной из независимых переменных. Это позволяет строить частные решения данного уравнения, используя метод разделения переменных и другие известные аналитические методы.

9. ПРИМЕР

Рассмотрим тонкую упругую прямоугольную пластинку на упругом основании под действием сжимающих — вдоль оси y и растягивающих — вдоль оси x, усилий с интенсивностью $\sigma = const \geq 0$; здесь приняты обозначения $x \equiv \tilde{x}^1, y \equiv \tilde{x}^2$. Формы потери устойчивости данной пластинки (в рамках гипотез Киргхоффа) описываются уравнением

$$\Delta\Delta w - \frac{\sigma}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\sigma}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{k}{D} w = 0. \tag{50}$$

Здесь D — цилиндрическая жесткость пластинки ($D > 0$); $w(x, y)$ — функция прогиба; Δ — оператор Лапласа; k — винклеровская константа упругого основания.

Уравнение (50) принадлежит к уравнениям класса (1), причем здесь

$$\tilde{a}^{11} = -(\sigma/D), \; \tilde{a}^{12} = 0, \; \tilde{a}^{22} = \sigma/D, \; \tilde{b}^\alpha = 0, \; \tilde{c} = k/D. \tag{51}$$

Отсюда, с помощью формул (35), (8) и (10), получаем, что для данного уравнения $a^\alpha = 0$, $b^\alpha = 0$, $a = 0$, $q = \frac{k}{D} - \frac{\sigma^2}{4D^2}$. Здесь существуют две возможности: либо $k \neq \sigma^2/4D$, т.е. $q \neq 0$; либо $k \neq \sigma^2/4D$,, т.е.$q = 0$. В первом случае, согласно теореме 4, уравнение (50) допускает не более чем четырехпараметрическую группу, а во втором случае, согласно теореме 5, оно допускает шестипараметрическую группу, т.е. группу максимального порядка.

Система определяющих уравнений (12) — (17), с учетом соотношений (51), (18) и (19), сводится к следующим двум уравнениям:

(52) $$f''' - (\sigma/2D)f' = 0,$$

(53) $$q(f' + \overline{f}') = 0.$$

Если $\sigma = 0$, то общее решение уравнения (52) дается формулой

(54) $$f = l_1 + l_2 z + l_3 z^2,$$

где l_1, l_2, l_3 — комплексные постоянные. Группа, определяемая функцией (54), согласно формулам (11) и (2), совпадает с группой, допускаемой бигармоническим уравнением (см. [9]). Уравнение (50) совпадает с этим уравнением при $\sigma = 0$ и $k = 0$. Если $\sigma = 0$, но $k \neq 0$, то $q \neq 0$, и тогда из уравнения (53) и формулы (54) следует, согласно формулам (11) и (2), что в данном случае уравнение (50) допускает трехпараметрическую группу движений в пространстве $\mathbf{R}^2$.

Если $\sigma \neq 0$, то общее решение уравнения (52) имеет вид

$$f = k_1 + k_2 e^{\lambda z} + k_3 e^{-\lambda z},$$

где k_1, k_2 и k_3 — комплексные постоянные и $\sigma = \sqrt{\sigma/2D} > 0$. Отсюда, используя формулы (11) и (2), находим, что в этом случае каждый допускаемый оператор имеет вид

(55) $$X = \sum_{j=1}^{6} C_j X_j,$$

где C_j — вещественные постоянные и

$$X_1 = \partial/\partial x, \qquad X_2 = \partial/\partial y,$$

$$\begin{aligned}
X_3 &= e^{\lambda x}\cos(\lambda y)\partial/\partial x + e^{\lambda x}\sin(\lambda y)\partial/\partial y + \lambda e^{\lambda x}\cos(\lambda y)w\partial/\partial w, \\
X_4 &= -e^{\lambda x}\sin(\lambda y)\partial/\partial x + e^{\lambda x}\cos(\lambda y)\partial/\partial y - \lambda e^{\lambda x}\sin(\lambda y)w\partial/\partial w, \\
X_5 &= e^{-\lambda x}\cos(\lambda y)\partial/\partial x - e^{-\lambda x}\sin(\lambda y)\partial/\partial y - \lambda e^{-\lambda x}\cos(\lambda y)w\partial/\partial w, \\
X_6 &= e^{-\lambda x}\sin(\lambda y)\partial/\partial x + e^{\lambda x}\cos(\lambda y)\partial/\partial y - \lambda e^{-\lambda x}\sin(\lambda y)w\partial/\partial w.
\end{aligned}$$

Если $q \neq 0$, то из уравнения (53) следует, что в этом случае уравнение (50) допускает только двухпараметрическую группу сдвигов в пространстве $\mathbf{R}^2$. Если $q = 0$, то уравнение (53) удовлетворяется тождественно и, следовательно, в этом случае уравнение (50) допускает все операторы вида (55).

Рассмотрим алгебру Ли L_6 и соответствующую группу Ли G_6, которая допускается уравнениями (50) в случае $q = 0, \sigma \neq 0$. Так как здесь число независимых переменных $n = 2$, а число искомых функций $m = 1$, то представляют интерес инвариантные H-решения ранга $\rho = 1$, которые получаются для однопараметрических подгрупп $H \subset G_6$. Методом перебора (см. [1]) строится оптимальная система Θ_1 одномерных подалгебр алгебры L_6. Оказывается, что она содержит следующие одиннадцать классов неподобных подалгебр:

$$C_1X_1 + C_2X_2,\ X_3,\ X_5,$$

$$X_3 \pm X_5, \quad X_3 \pm X_6, \quad X_4 \pm X_5, \quad X_4 \pm X_6,$$

первому из которых соответствует бесконечное множество всех однопараметрических подгрупп группы сдвигов в пространстве $\mathbf{R}^2$.

В качестве примера рассмотрим инвариантные решения уравнения (50) с коэффициентами $q = 0$ и $\sigma \neq 0$, соответствующие операторам X_3 и $X_3 + X_5$.

Универсальный инвариант группы с оператором X_3 есть $J = (\lambda x - \ln |\sin\lambda y|,\ w/\sin\lambda y)$. Переменные разделяются и общий вид инвариантного $H(X_3)$-решения таков:

$$w = u(t)\sin\lambda y, \quad t = \lambda x - \ln|\sin\lambda y|. \tag{56}$$

Подстановка в уравнение (50) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$u^{IV}(t) + 2u'''(t) - u''(t) - 2u'(t) = 0$$

с общим решением

$$u(t) = A_1 + A_2e^t + A_3e^{-t} + A_4e^{-2t},$$

где A_1, A_2, A_3 и A_4 — вещественные постоянные. Отсюда, используя формулы (56), получаем все инвариантные $H(X_3)$-решения в явном виде

$$w = A_1\sin\lambda y + A_2e^{\lambda x} + A_3e^{-\lambda x}\sin\lambda y + A_4e^{-2\lambda x}\sin^3\lambda y.$$

Универсальный инвариант группы с оператором $X_3 + X_5$ есть $J =$ $= (\sin\lambda y/ch\lambda x,\ w/ch\lambda x)$. Переменные разделяются, и общий вид инвариантного $H(X_3 + X_5)$-решения таков:

$$w = u(t)ch\lambda x,\ t = \sin\lambda y/ch\lambda x. \tag{57}$$

Подстановка (57) в уравнение (50) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(58)\qquad (t^2-1)^2u^{IV}(t)+8t(t^2-1)u'''(t)+4(3t^2-1)u''(t)=0.$$

Уравнение (58) можно легко проинтегрировать, так как оно эквивалентно уравнению $[(t^2-1)^2u''(t)]''=0$. Общее решение дается формулой

$$u=B_1t\ln\frac{1+t}{1-t}+B_2\ln\frac{1+t}{1-t}+B_3t+B_4,$$

где B_1, B_2, B_3 и B_4 — вещественные постоянные. Отсюда, используя формулы (57), получаем все инвариантные $H(X_3+X_5)$-решения в явном виде

$$w=B_1\sin\lambda y\ln\frac{ch\lambda x+\sin\lambda y}{ch\lambda x-\sin\lambda y}+B_2ch\lambda x\ln\frac{ch\lambda x+\sin\lambda y}{ch\lambda x-\sin\lambda y}+B_3\sin\lambda y+B_4ch\lambda x.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников, Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., Наука, 1978.
2. Вольмир, А. С. Устойчивость деформиреумых систем. М., Наука, 1967.
3. Власов, В. З., Н. Н. Леонтьев. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М., 1960.
4. Доннел, Л.Г. Балки, пластины и оболочки. М. Наука, 1982.
5. Kerr, A.D. Elastic and Viscoelastic Foundation Models. — Trans. of ASME. Ser. E, **31**, 1964, No 3.
6. Амбарцумян, С. А., Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М., Наука, 1977.
7. Дубровин, Б. А., С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. Современная геометрия. М., Наука, 1979.
8. Фущич, В.И. О симетерии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики. — В: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики. Киев, И-т математики АН УССР, 1983.
9. Овсянников, Л. В. Групповые свойства уравнений механики. — В: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М., Наука, 1972.

Поступила на 14.04.1989 г.

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 2 — Механика
Том 82, 1988

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA "ST. KLIMENT OHRIDSKI"
FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 2 — Mécanique
Tome 82, 1988

ON THE EFFECTIVE BEHAVIOUR OF A NONLINEAR DISPERSION OF SPHERES

KONSTANTIN MARKOV, KRASSIMIR ZVYATKOV

Константин Марков, Красимир Цвятков. ОБ ЭФФЕКТИВНОМ ПОВЕДЕНИИ НЕЛИНЕЙНОЙ СУСПЕНЗИЙ СФЕР

Рассматривается эффективное поведение нелинейной суспензии сфер на примере распространения тепла; нелинейность понимается в том смысле, что коэффициент проводимости, разный для матрицы и для сфер, зависит также и от градиента температуры в каждой точке. Используется вариационная процедура для оценки эффективных свойств суспензий; в случае малой концентрации сфер получены аналитические результаты.

Konstantin Markov, Krassimir Zvyatkov. ON THE EFFECTIVE BEHAVIOUR OF A NONLINEAR DISPERSION OF SPHERES

The effective behaviour of a nonlinear random dispersion of spheres is considered in the context of heat propagation; nonlinearity is understood in the sense that the coefficient of thermal conductivity, being different for the matrix and for the spheres, depends on the temperature gradient at each point. A variational technique is proposed which allows to estimate the effective properties of the dispersion. In the case of a dilute dispersion the estimates are explicitly evaluated.

1. INTRODUCTION

Consider a two-phase random medium which is statistically homogeneous and isotropic. For the sake of definiteness only, we shall call one of the constituents matrix and the other filler, though our considerations will for the moment hold for an arbitrary two-phase medium. All quantities connected with the matrix will be supplied with the subscript "m", and those connected with the filler — with "f". To describe the random constitution of the medium we introduce the random field $I_f(\mathbf{x})$ which equals 1 if $\mathbf{x}$ lies in the filler and vanishes otherwise. The set of all multipoint moments (or correlation functions) for $I_f(\mathbf{x})$ defines adequately the random medium [1, 2].

Consider the stationary heat propagation in the medium which we suppose to be governed by the nonlinear version of the Fourier law:

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{q}(\mathbf{x}) &= 0, \qquad \mathbf{q}(\mathbf{x}) = K(\mathbf{x};T(\mathbf{x}))\nabla\theta(\mathbf{x}), \\ K(\mathbf{x};T) &= K_m(T) + [K_f(T) - K_m(T)]I_f(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{1.1a}$$

$T = T(\mathbf{x}) = |\nabla\theta(\mathbf{x})|^2$, where $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ is the opposite heat flux vector, $\theta(\mathbf{x})$ is the temperature field; this means that each of the constituents has a coefficient of thermal conductivity that depends on the magnitude of the local temperature gradient. We suppose that

$$0 < k_1 < K(\mathbf{x};T) < k_2 < \infty, \qquad \forall\mathbf{x},\ \forall T. \tag{1.2}$$

Let the medium be subject to constant macroscopic temperature gradient, i. e.

$$\langle\nabla\theta(\mathbf{x})\rangle = \mathbf{G}, \tag{1.1b}$$

where $\langle\cdot\rangle$ denotes ansemble averaging. The condition (1.1b) plays the role of a boundary one for the nonlinear random equation (1.1a). Under certain assumptions about the functions $K_m(T)$ and $K_f(T)$, see §2, the problem (1.1) possesses a solution $\theta(\mathbf{x})$ which is unique. By means of the latter we can evaluate the average heat flux, $\mathbf{Q}$, in the medium

$$\mathbf{Q} = \langle\mathbf{q}(\mathbf{x})\rangle = \langle K(\mathbf{x};T(\mathbf{x}))\nabla\theta(\mathbf{x})\rangle = K^*(g)\mathbf{G}; \tag{1.3}$$

here $g = \mathbf{G}\cdot\mathbf{G}$ and K^* is the effective thermal conductivity of the medium which similarly to that of the constituents, represents a certain nonlinear function of the average temperature gradient acting on the medium, $K^* = K^*(g)$.

Thus the given random geometry of the medium under study defines a nonlinear operator $\mathbf{K}$ that transforms the functions $K_m(\tau)$ and $K_f(\tau)$ into the function $K^*(g)$ which describes the effective behaviour of the medium;

$$K^*(\cdot) = \mathbf{K}[K_m(\cdot), K_f(\cdot)]. \tag{1.4}$$

The well-known homogenization problem consists in evaluation of the operator $\mathbf{K}$. Note that the problem of estimating the operator $\mathbf{K}$ for given statistics of the medium is considered by J. Willis [3] making use of a variational principle of the type of the Hashin-Shtrikman's, see also [4].

Certain remarks concerning the operator $\mathbf{K}$ are now warranted.

First, in the case of linear behaviour of the constituents we have $K_m(T) \equiv \kappa_m$, $K_f(T) \equiv \kappa_f$, $K^*(g) \equiv \kappa^*$, where κ^* is the effective conductivity of the medium, so that the operator $\mathbf{K}$ reduces to a scalar function of two scalar arguments

$$\kappa^* = \mathbf{K}(\kappa_m, \kappa_f). \tag{1.5}$$

Even in this simplest case there is no general algorithm how to calculate κ^* for an arbitrary random geometry; the difficulty of such a calculation is well acknowledged in the literature, see, e. g., [2, 5], and it stems from the fact the basic random problem (1.1) is statisticallly nonlinear even when the behaviour of the constituents is linear, i. e., when they obey the classical Fourier law. In the case under consideration, the problem (1.1) is both statistically and physically nonlinear. The latter makes the analysis of nonlinear random media much more complicated. The interest in such media however, has increased in the recent years. One of the basic reasons is that the nonlinear effects become important in certain polarizable materials when the electric field (the exact counterpart of $|\nabla\theta(\mathbf{x})|$ here) is large, e. g., when a laser beam is directed into the material, cf. [6, 7] for details and references.

Second, the operator $\mathbf{K}$ is homogeneous in the sense that

$$\mathbf{K}[\lambda K_m(\cdot), \lambda K_f(\cdot)] = \lambda \mathbf{K}[K_m(\cdot), K_f(\cdot)], \tag{1.6}$$

for any $\lambda \in \mathbb{R}$. In the linear case this yields that κ^* depends on the ratio κ_f/κ_m, but in the nonlinear case the latter statement cannot be generalized, i. e., $K^*(\cdot)$ does not depend on the ratio $K_f(\cdot)/K_m(\cdot)$ only, except when $K_m(\cdot) \equiv const$.

Our aim here is to get certain results for the effective behaviour of the nonlinear composite, i. e. for the function $K^*(g)$, in the particular case of a random dispersion of spheres, making use of the variational procedure introduced and briefly discussed in [8].

2. THE VARIATIONAL PRINCIPLE

We replace the random problem (1. 1) by the variational principle which states that the true temperature field in the medium minimizes the functional

$$\begin{aligned} W_A[\theta(\cdot)] &= \langle \Phi(\mathbf{x}; |\nabla\theta(\mathbf{x})|^2) \rangle \longrightarrow \min, \\ \Phi(\mathbf{x}; T) &= \frac{1}{2}\int_0^T K(\mathbf{x}; \tau)d\tau; \qquad T = T(\mathbf{x}) = |\nabla\theta(\mathbf{x})|^2, \end{aligned} \tag{2.1}$$

over the class of random fields $\theta(\mathbf{x})$ which satisfy (1.1b). Moreover,

$$\min W_A[\theta(\cdot)] = \frac{1}{2}K^*(g)g, \qquad g = \mathbf{G}\cdot\mathbf{G}. \tag{2.2}$$

This is a straightforward generalization of the classical variational principle in the linear case [1].

It is noteworthy that the variational principle (2.1) allows to sketch a simple proof of an existence and uniqueness theorem for the basic random problem (1.1).

Indeed, let us consider the class of random fields $\theta(\mathbf{x})$ whose gradients are statistically homogeneous. On using a statement of ergodic type, we replace ensemble averages by spatial ones

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{V} \int_V \cdot d^3x,$$

where V is a certain macro-region. We next introduce the standard Hilbert space $H_1(V)$ and consider the set $G \subset H_1(V)$ of functions that satisfy the boundary condition

$$\theta(\mathbf{x}) \,|_{\partial V} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{x}.$$

This is obviously a convex closed subset in $H_1(V)$. Moreover, the Gauss theorem easily yields that the functions $\theta \in G$ comply with the condition (1.1b). The functional W_A in (2.1) is strictly convex on $H_1(V)$ if the function Φ is such with respect to T. The latter holds in turn if the function $K(\mathbf{x}; \tau)$ is strictly monotonically increasing with respect to τ. Due to (1.1a), this will be true if both functions $K_f(\tau)$ and $K_m(\tau)$ have the same monotonicity property:

$$\frac{d}{d\tau} K_f(\tau) > 0, \qquad \frac{d}{d\tau} K_m(\tau) > 0 \tag{2.3}$$

— something which will be assumed hereafter. The conditions (2.3) also yield that the functional W_A is coercitive, i. e.,

$$W_A[\theta(\cdot)] \longrightarrow \infty \ \text{ if } \ ||\theta|| \longrightarrow \infty. \tag{2.4}$$

According to a classical result of the convex analysis, see, e. g., [9, Ch. II, prop. 1.2], the property (2.4) suffices to claim that the functional W_A, strictly convex under the assumptions (2.3), possesses a unique minimizing element $\theta^*(\mathbf{x})$ over the convex set G; this element is just the true temperature field in the medium, i. e., the solution of the basic problem (1.1).

In what follows a special attention will be paid to the particular case of nonlinear constitutive relation [7] for which

$$K_f(\tau) = \kappa_f^0 + \kappa_f^1 \tau, \, K_m(\tau) = \kappa_m^0 + \kappa_m^1 \tau. \tag{2.5}$$

The functional (2. 1) in this case becomes

$$W_A[\theta(\cdot)] = \frac{1}{2} \langle \kappa^0(\mathbf{x}) |\nabla \theta(\mathbf{x})|^2 \rangle + \frac{1}{4} \langle \kappa^1(\mathbf{x}) |\nabla \theta(\mathbf{x})|^4 \rangle, \tag{2.6}$$

where

$$\kappa^i(\mathbf{x}) = \kappa_m^i + [\kappa^i] I_f(\mathbf{x}), \tag{2.7}$$

$[\kappa^i] = \kappa^i_f - \kappa^i_m$; $i = 0, 1$. The condition of strict convexity for the functional (2.6) reads

$$\kappa^i_f,\ \kappa^i_m > 0, \qquad i = 0, 1, \tag{2.8}$$

cf. (2.3), which will be assumed hereafter in order to ensure the existence and uniqueness for the solution of the random problem (1.1) in the particular case of constitutive relations (2.5).

The variational principle, dual to (2.1), can be easily derived if we reformulate the random problem (1.1) with respect to the heat flux $\mathbf{q}(\mathbf{x})$. From (1.1) and (2.5) we get

$$\nabla\theta(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}; \mathbf{q}(\mathbf{x}))\mathbf{q}(\mathbf{x}), \tag{2.9}$$

where L denotes the compliance field

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}; \mathbf{q}(\mathbf{x})) &= 1/K(\mathbf{x}; T(\mathbf{x})) \\ &= L^0(\mathbf{x}) - L^1(\mathbf{x})|\mathbf{q}(\mathbf{x})|^2 + L^2(\mathbf{x})|\mathbf{q}(\mathbf{x})|^4 - \dots; \\ L^0(\mathbf{x}) &= 1/\kappa^0(\mathbf{x}), \\ L^1(\mathbf{x}) &= L^O(\mathbf{x})\kappa^1(\mathbf{x})/(\kappa^0(\mathbf{x}))^3, \qquad \text{etc.} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Obviously the compliance field does not have the form (2.5) of the conductivity field. This form holds only if the nondimensional temperature gradient g_m, defined in (4.5) below, is small, $g_m \ll 1$. In the latter case, within the accuracy $o(g_m)$, the series (2.10) can be truncated after the second term and we thus will obtain the counterpart of (2.5), namely,

$$\nabla\theta(\mathbf{x}) = \{L^0(\mathbf{x}) - L^1(\mathbf{x})|\mathbf{q}(\mathbf{x})|^2\}\mathbf{q}(\mathbf{x}). \tag{2.11}$$

To the same order of accuracy we can reformulate the random problem (1. 1) as follows

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \nabla \times \Psi(\mathbf{x}), \tag{2.12a}$$

$$\nabla\theta(\mathbf{x}) = \{L^0(\mathbf{x}) - L^1(\mathbf{x})|\mathbf{q}(\mathbf{x})|^2\}\mathbf{q}(\mathbf{x}), \tag{2.12b}$$

$$\langle\nabla \times \Psi(\mathbf{x})\rangle = \mathbf{Q}, \tag{2.12c}$$

where $\mathbf{Q}$ is the prescribed macroscopic heat flux. The problem (2.12) is equivalent to the variational principle

$$W_B[\Psi(\cdot)] = \frac{1}{2}\langle L^0(\mathbf{x})|\nabla \times \Psi(\mathbf{x})|^2\rangle - \frac{1}{4}\langle L^1(\mathbf{x})|\nabla \times \Psi(\mathbf{x})|^4\rangle \longrightarrow \min, \tag{2.13}$$

where the functional W_B is considered over the class of vector potential fields $\Psi(\mathbf{x})$ that satisfy (2.12c). Moreover,

$$\min W_B = \frac{1}{2}L^*(q)q, \qquad q = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}, \tag{2.14}$$

where $L^*(q)$ is the effective compliance of the composite defined as follows

$$\mathbf{G} = L^*(q)\mathbf{Q}, \tag{2.15}$$

the counterpart of (1.3). The relation between $K^*(g)$ and $L^*(q)$ is a consequence of the identities

$$q = K^*(g)g, \qquad g = L^*(q)q, \tag{2.16}$$

cf. (1.3) and (2.15).

Finally, let us recall once more that all relations (2.11) to (2.16) are correct only to the order $O(g_m)$, i. e. for small values of the temperature gradient impressed on the medium.

As is well known, the variational principles allow to obtain estimates on the effective properties of random media [10, 11]. Here we shall use the principles (2.1) and (2.13) in order to derive such estimates on the function $K^*(\cdot)$ that defines the effective behaviour of a nonlinear dilute dispersion of spheres whose constituents obey (2.5).

3. THE VARIATIONAL PROCEDURE FOR A DISPERSION OF SPHERES

Let the medium be a random dispersion of equisized and nonoverlapping spheres of radius a and let $\mathbf{x}$ be the set of random points that serve as centers of spheres. After [12] we introduce the field

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j), \tag{3.1}$$

called the random density field for the dispersion. Obviously, $\langle\psi(\mathbf{x})\rangle = n$, where n is the number density of the spheres, $n = c/V_a$ and c is the volume fraction of the spheres. The field $\psi(\mathbf{x})$ provides an exhaustive description of the random set $\mathbf{x}_j$ and thus of the dispersion as well. Its application is very convenient here because the random fields in (2.7) have simple integral representations by means of $\psi(\mathbf{x})$, namely,

$$\kappa^i(\mathbf{x}) = \kappa^i_m + [\kappa^i] \int h(\mathbf{x} - \mathbf{y})\psi(\mathbf{y})d^3\mathbf{y}, \qquad i = 0, 1, \tag{3.2}$$

where $h(\mathbf{x})$ is the indicator function for a single sphere of radius a located at the origin. (Hereafter if the integration domain is not explicitly indicated, the integrals are taken over the whole $\mathbb{R}^3$.)

Consider after [11] the class of trial fields

$$\theta(\mathbf{x}) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{x} + \int P(\mathbf{x} - \mathbf{y})\psi'(\mathbf{y})d^3\mathbf{y}, \tag{3.3}$$

where $\psi'(\mathbf{y}) = \psi(\mathbf{y}) - n$ is the fluctuating part of $\psi(\mathbf{y})$ and $P(\mathbf{x})$ is a nonrandom kernel. The fields (3.3) are obviously admissible since they satisfy (1.1b). On introducing (3.2) and (3.3) into the functional (2.6) we make the latter an usual functional of the kernel $P(\mathbf{x})$ whose minimization yields the respective Euler-Lagrange equation for the minimizing $P(\mathbf{x})$. If this equation could be solved we would be able to obtain an upper bound of the function $K^*(g)$. Making use of the arguments of [11, p. 1], it can be shown that this estimate would be the best possible which employs the statistical information given by the l-point correlation functions for the dispersion up to $l = 5$. The said Euler-Lagrange equation is however very complicated: even in the dilute case, $c \ll 1$, when its form is much simpler:

$$\begin{aligned}\langle\kappa^0\rangle\Delta P(\mathbf{x}) + \nabla\cdot\{[\kappa^0]h(\mathbf{x})[\mathbf{G} + \nabla P(\mathbf{x})] \\ +[\langle\kappa^1\rangle + [\kappa^1]h(\mathbf{x})]|\mathbf{G} + \nabla P(\mathbf{x})|^2(\mathbf{G} + \nabla P(\mathbf{x}))\} = 0,\end{aligned} \tag{3.4}$$

it seems very diffficult to be handled analytically. That is why we shall employ a certain variational procedure of Ritz type, similar to that proposed by Beran [13] and discussed by the authors in [14] in the linear case.

Consider the perturbation solution of the problem (1.1) in the case of weakly inhomogeneous medium governed by the constitutive relations (2.5):

$$\theta(\mathbf{x}) = \mathbf{G}\cdot\mathbf{x} + \theta^{(1,0)}(\mathbf{x}) + \theta^{(0,1)}(\mathbf{x}) + \dots, \tag{3.5}$$

where $\theta^{(p,q)}(\mathbf{x})$ are centered, $\langle\theta^{(p,q)}(\mathbf{x})\rangle = 0$, and have the order of magnitude $(\delta\kappa^0)^p(\delta\kappa^1)^q$, $p, q = 0, 1, \dots$.

$$\delta\kappa^i = \max_x\left|\frac{\kappa^{i'}(\mathbf{x})}{\langle\kappa^i\rangle}\right|, \qquad i = 0, 1;$$

we suppose that both $\delta\kappa^i \ll 1$, but $\delta\kappa^0$ and $\delta\kappa^1$ could be small of different order of magnitudes. (The prime denotes the fluctuating part of the respective random variable.)

Simple arguments show that the functions $\theta^{(1,0)}(\mathbf{x})$ and $\theta^{(0,1)}(\mathbf{x})$ comply with the equations

$$[\langle\kappa^0\rangle + g\langle\kappa^1\rangle]\Delta\theta^{(1,0)}(\mathbf{x}) + 2\langle\kappa^1\rangle\mathbf{G}\mathbf{G} : \nabla\nabla\theta^{(1,0)}(\mathbf{x}) + \nabla\cdot\{\kappa^{0'}(\mathbf{x})\mathbf{G}\} = 0, \tag{3.6a}$$

$$[\langle\kappa^0\rangle + g\langle\kappa^1\rangle]\Delta\theta^{(0,1)}(\mathbf{x}) + 2\langle\kappa^1\rangle\mathbf{G}\mathbf{G} : \nabla\nabla\theta^{(0,1)}(\mathbf{x}) + \nabla\cdot\{\kappa^{1'}(\mathbf{x})\mathbf{G}\} = 0; \tag{3.6b}$$

the colon means contraction with respect to two pairs of indexes.

We next introduce the new variable $\mathbf{z}$ instead of $\mathbf{x}$ as follows: $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mu\mathbf{G}\mathbf{G}\cdot\mathbf{x}$, with the scalar μ to be specified below. Obviously, $\nabla_x = (\mathbf{I} + \mu\mathbf{G}\mathbf{G})\cdot\nabla_z$, which allows, after simple manipulations, to reduce eqns (3.6) to the Poisson equations

$$\begin{aligned}\Delta\theta^{(1,0)}(\mathbf{z}) + \nabla_x\cdot\{\kappa^{0'}(\mathbf{x})\mathbf{G}\} = 0, \\ \Delta\theta^{(0,1)}(\mathbf{z}) + \nabla_x\cdot\{\kappa^{1'}(\mathbf{x})\mathbf{G}\} = 0.\end{aligned} \tag{3.7}$$

provided μ is chosen as one of the roots, μ_1 or μ_2, of the square equation

$$
(3.8) \qquad \begin{aligned} &A + 2B\mu + C\mu^2 = 0; \quad A = 2\langle\kappa^1\rangle, \\ &B = 3g\langle\kappa^1\rangle + \langle\kappa^0\rangle, \qquad C = 3g^2\langle\kappa^1\rangle + g\langle\kappa^0\rangle, \end{aligned}
$$

whose discriminant

$$
\Delta = [3g\langle\kappa^1\rangle + \langle\kappa^0\rangle][g\langle\kappa^1\rangle + \langle\kappa^0\rangle]
$$

is obviously positive so that both roots μ_1 and μ_2 are real. In (3.7), $\Delta_z = \nabla_z \cdot \nabla_z$ is the Laplace operator with respect to $\mathbf{z}$.

In virtue of (3.7), the bounded everywhere solutions of eqns (3.6) have the form

$$
(3.9) \qquad \begin{aligned} \theta^{(1,0)}(\mathbf{z}) &= \mathbf{G} \cdot \int \frac{1}{4\pi|\mathbf{z}-\mathbf{y}|} \nabla_y \kappa^{0'}(\mathbf{y}) d^3\mathbf{y}, \\ \theta^{(0,1)}(\mathbf{z}) &= \mathbf{G} \cdot \int \frac{1}{4\pi|\mathbf{z}-\mathbf{y}|} \nabla_y \kappa^{1'}(\mathbf{y}) d^3\mathbf{y}, \end{aligned}
$$

where $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mu\mathbf{G}\mathbf{G} \cdot \mathbf{x}$ with μ being one of the said roots, μ_1 or μ_2. Note that it does not matter which one of the roots, μ_1 or μ_2, will be chosen becouse the expressions, say, for $\theta^{(1,0)}(\mathbf{x})$ thus obtained will both satisfy the nonhomogeneous linear equation (3.6a); their difference will then solve the homogeneous equation (3.6a) and since we deal with bounded everywhere solutions this difference will vanish.

Following the general idea of Beran [13], we introduce, instead of (3.3), the class of trial fields

$$
(3.10) \qquad \theta(\mathbf{x}) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{x} + \lambda_1 \theta^{(1,0)}(\mathbf{x}) + \lambda_2 \theta^{(0,1)}(\mathbf{x}),
$$

where λ_1, λ_2 are two adjustable scalar parameters. For two-phase media we, however, have

$$
\kappa^{i'}(\mathbf{x}) = [\kappa^i] I'_f(\mathbf{x}), \qquad i = 0, 1,
$$

see (2.7), where $I'_f(\mathbf{x})$ is the fluctuating part of the indicator function $I_f(\mathbf{x})$ for the filler phase. That is why the two functions $\theta^{(1,0)}(\mathbf{x})$ and $\theta^{(0,1)}(\mathbf{x})$ in (3.9) are proportional, so that (3.10) can be replaced by the class

$$
(3.11) \qquad \theta(\mathbf{x}) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{x} + \lambda \theta^{(1,0)}(\mathbf{x}),
$$

with a single adjustable parameter $\lambda \in R$. On introducing (3.11) into the functional (2.6) we make the latter a scalar function of λ whose minimization brings forth a certain upper Ritz' type bound on the effective function $K^*(\cdot)$ defined in (1.3). This bound takes into account statistical information given by the l-point correlation functions for the medium up to $l = 5$. Unlike the bound which could be obtained through the solution of the equation of the type (3.4), i. e., when considering the class (3.3) of trial functions, the said Ritz' type bound will not be optimal in general.

4. THE LOWER AND UPPER BOUNDS FOR DILUTE DISPERSIONS

To illustrate the performance of the above considered scheme and to get certain tangible results at the same time, we shall deal hereafter with the case of a dilute dispersion for which $c \ll 1$. The needed moments of the random density field $\psi(\mathbf{x})$ in this case are very simple, namely,

$$\langle\psi(\mathbf{y}_1)\ldots\psi(\mathbf{y}_\rho)\rangle = n\delta(\mathbf{y}_\rho - \mathbf{y}_1)\ldots\delta(\mathbf{y}_\rho - \mathbf{y}_{\rho-1}) + o(n), \tag{4.1}$$

$\rho = 1, 2, \ldots$, where n, let us recall, is the number density of the spheres, $n = c/V_a$. Another simplification to be adopted consists in replacing the field $\theta^{(1,0)}(\mathbf{x})$ from (2.9) by the respective field from the linear case

$$\widetilde{\theta}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}\cdot\int\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\nabla_y\kappa^{0'}(\mathbf{y})d^3\mathbf{y}. \tag{4.2a}$$

Making use of (3.2), it is easily seen that

$$\widetilde{\theta}(\mathbf{x}) = \int\widetilde{T}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\psi'(\mathbf{y})d^3\mathbf{y}, \tag{4.2b}$$

where $\widetilde{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}\cdot\nabla\phi(\mathbf{x})$, with $\phi(\mathbf{x})$ denoting the harmonic (Newtonian) potential of a single sphere located at the origin. As is well-known the kernel $\widetilde{T}(\mathbf{x})$ is proportional to the disturbances to the temperature field in a linear unbounded matrix, introduced by a single spherical inhomogeneicities, when the temperature gradient at infinity equals $\mathbf{G}$.

We thus restrict the functional (2.6) over the class of trial fields

$$\theta(\mathbf{x}) = \mathbf{G}\cdot\mathbf{x} + \lambda\widetilde{\theta}(\mathbf{x}), \lambda \in R, \tag{4.3}$$

instead of the class (3.11), under the assumption (4.1).

Note that the choise of $\widetilde{\theta}(\mathbf{x})$ is reasonable because in what follows we shall be able to calculate explicitly the needed bounds only for small, in a certain sense to be explained below, magnitudes of the macrogradient $\mathbf{G}$ for which the difference between $\theta^{(1,0)}(\mathbf{x})$ and $\widetilde{\theta}(\mathbf{x})$ is negligible.

The functional W_A from (2.6), when restricted over the class (4.3), becomes a polynomial of fourth degree of λ:

$$W_A[\theta(\cdot)] = w_A(\lambda) = \frac{1}{2}\kappa_m^0 g\{A + B\lambda + C\lambda^2 + D\lambda^3 + E\lambda^4\}, \tag{4.4a}$$

and simple algebra gives the following expressions for the coefficients of this polynomial:

$$\begin{aligned} A &= 1 + (\alpha^0 - 1)c + \frac{1}{2}[1 + (\alpha^1 - 1)c]g_m, \\ B &= 2(\alpha^0 - 1)c + 2(\alpha^1 - 1)cg_m, \\ C &= (\alpha^0 + 2)c + (3\alpha^1 + 3.6)cg_m, \\ D &= 2(\alpha^1 - 0.4)cg_m, \quad E = \frac{1}{2}(\alpha^1 + 1.6)cg_m. \end{aligned} \tag{4.4b}$$

Here $\alpha^i = \kappa_f^i/\kappa_m^i$, $i = 0, 1$, and

$$g_m = g\kappa_m^1/\kappa_m^0, g_f = g\kappa_f^1/\kappa_f^0 \tag{4.5}$$

are nondimensional temperature gradients with respect to the matrix and filler constituent respectively, $g = \mathbf{G} \cdot \mathbf{G}$. The minimization of the function $w_A(\lambda)$, defined in (4.4a), with respect to λ leads to the cubic equation

$$B + 2C\lambda + 3D\lambda^2 + 4E\lambda^3 = 0. \tag{4.6}$$

This equation, under the assumption (2.8), has a unique real root

$$\lambda_0 = \lambda_0(\alpha^0, \alpha^1, g_m, c). \tag{4.7}$$

On inserting (4.7) into (4.4) and making use of the variational principle (2.1) and (2.2), we get an upper bound on the effective function $K^*(\cdot)$ for the dilute dispersion:

$$\begin{aligned} &K^*(g) \leq K^u, \\ &K^u = K^u(\alpha^0, \alpha^1, g_m) = \kappa_m^0\{A + B\lambda_0 + C\lambda_0^2 + D\lambda_0^3 + E\lambda_0^4\}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Obviously, only numerical results for the bound K^u can be obtained in general. It is important to note, however, that K^u, unlike the form (2.5), will not be already a quadratic function of $\mathbf{G}$ which indicates that in the constitutive law (1.3) for the dispersion all degrees of g will be present. The quadratic form (2.5) will hold for the dispersion only for small values of the gradient g_m, i.e., within the accuracy $o(g_m)$.

To get a lower bound for the effective function $K^*(\cdot)$, we shall employ the variational principle (2.13), dual to (2.1), and the class of trial fields

$$\Psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{Q} \times \mathbf{x} + \eta \int \widetilde{\Psi}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\psi'(\mathbf{y})d^3\mathbf{y}, \qquad \eta \in \mathbf{R}, \tag{4.9a}$$

where the kernel $\widetilde{\Psi}(\mathbf{x})$ is chosen, similarly to the kernel $\widetilde{T}(\mathbf{x})$ in (4.2b), as the vector potential of the heat flux disturbance, introdused in an unbounded linear matrix by a single spherical inhomogeneity, when the heat flux at infinity is kept constant, $\mathbf{Q}$, i.e.,

$$\widetilde{\Psi}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{Q} \times \mathbf{x}, & \text{if } |\mathbf{x}| \leqq a \\ -a^3\mathbf{Q} \times \nabla \dfrac{1}{|\mathbf{x}|}, & \text{if } |\mathbf{x}| > a. \end{cases} \tag{4.9b}$$

The functional W_B, defined in (2.13), when restricted over the class (4.9), becomes a polynomial of fourth degree of η

$$W_B[\Phi(\cdot)] = w_B(\eta). \tag{4.10}$$

whose minimization leads to a cubic equation, similar to (4.6). The real root of this equation,

$$\eta_0 = \eta_0(\alpha^0, \alpha^1, q, c), \tag{4.11}$$

is unique under the assumption (2.8). On introducing (4.11) into (4.10) we get an upper bound on the effective compliance $L^*(q)$ and thus, according to (2.16),a lower bound on $K^*(g)$ which corresponds to the upper bound of Ritz' type (4.8).

The evaluation of the above introduced bounds can be performed analytically to the order g_m, at $g_m \ll 1$: it shows that the upper and lower bounds coincide within this order of accuracy. In this way we find the following exact result for the effective conductivity function $K^*(\cdot)$ for the dilute dispersion of spheres:

$$K^*(g) = \kappa_0^* + \kappa_1^* g_m + \dots, \tag{4.12a}$$

$$\kappa_0^* = \kappa_m^0(1 + 3\beta^0 c), \qquad \beta^0 = [\kappa^0]/(\kappa_f^0 + 2\kappa_m^0), \tag{4.12b}$$

$$\kappa_1^* = \kappa_m^0(1 + 3B_1 c), \tag{4.12c}$$

$$B_1 = \frac{1}{3}[\alpha^1(1 - \beta^{04}) + 1.6\beta^{04} + 1.6\beta^{03} + 7.2\beta^{02} + 4\beta^0 - 1].$$

As it should have been expected, (4.12b) coincides with the well-known Maxwell formula for the effective conductivity of a dilute dispersion of spheres, cf. [15], which is exact in the case of a linear behaviour of the constituents.

Consider the other limiting case when $g_m \to \infty$ when we may neglect the first terms in the r. h. sides of (2.5) and think that both spheres and matrix obey the linear Fourier law with conductivities $\kappa_f g$ and $\kappa_m g$ respectively: the variance of g becomes negligible in this case. Making use of the above mentioned Maxwell formula for the dilute dispersion, see (4.12b), we get the following asymptotics for the function $K^*(\cdot)$:

$$\begin{aligned} K^*(g) &\underset{g_m \to \infty}{\longrightarrow} k^*_\infty g_m, \\ k^*_\infty &= \kappa_m^1(1 + 3\beta^1 c), \quad \beta^1 = [\kappa_m^1]/(2\kappa_f^1 + \kappa_m^1). \end{aligned} \tag{4.13}$$

The relations (4.12) and (4.13) can be combined within a certain Padé approximation of the type [2/1], cf. [16], for the effective function $K^*(\cdot)$ which may be employed for all values of g, namely:

$$K^*(g) = \frac{k_0^* + (k_0^* + k_1^*)g_m + k^*_\infty g_m^2}{1 + g_m}. \tag{4.14}$$

The formula (4.14) is the central result of the paper; it provides correct predictions for the function $K^*(\cdot)$ in both cases of small macrogradients, $g_m \ll 1$, to the order $o(g_m)$, and $g_m \to \infty$, so that it could be expected to yield a reasonable approximation for the intermediate values of g_m, $0 < g_m < \infty$ as well.

5. CONCLUDING REMARKS

To conclude the paper we shall show how the results of §4, valid for the particular case (2.5) of linear functions K_f and K_m, could be employed in order to give a certain approximation of Padé's type for the homogenization operator **K**, defined in (1.4), in general case of arbitrary analytical functions $K_f(\cdot)$ and $K_m(\cdot)$ which comply with the monotonicity condition (2.3).

Let us expand the functions K_f and K_m, analytical on $[0, \infty]$ by assumption, as the Taylor series

$$K_m(g) = \kappa_m^0 + \kappa_m^1 g + \dots, \qquad K_f(g) = \kappa_f^0 + \kappa_m^1 g + \dots, \tag{5.1}$$

where

$$\begin{aligned} \kappa_m^0 &= K_m(0), \quad \kappa_f^0 = K_f(0), \\ \kappa_m^1 &= K_m'(0), \quad \kappa_f^1 = K_f'(0) \end{aligned} \tag{5.2}$$

are known constants. For small values of the nondimensional gradient $g_m = g\kappa_m^1/\kappa_m^0, g_m \ll 1$, we can replace the functions $K_f(g)$ and $K_m(g)$ by their linear approximations (5.1): such a replacement yields result also valid to the same order $o(g_m)$. That is why the formulas (4.12) are valid to the same order $o(g_m)$,

$$K^*(g) = k_0^* + k_1^* g_m + \dots, \tag{5.3}$$

where the coefficients k_0^* and k_1^* are given in (4.12b, c), provided

$$\alpha^0 = K_f(0)/K_m(0), \qquad \alpha^1 = K_f'(0)/K_m'(0),$$

cf. (5.2).

The limiting case $g_m \longrightarrow \infty$ is considered similarly to §4, though there are two possibilities here which should be dealt with separately, namely, (i) The function $K_m(\cdot)$ is bounded on $[0, \infty)$ and (ii). This function is unbounded on $[0, \infty)$, so that $K_m(\infty) = \infty$.

In the first case (i), when $K_m(\infty) < \infty$, we can think both constituents linear at $g_m \longrightarrow \infty$, so that the Maxwell formula (4.12b) yields

$$\begin{aligned} K^*(\infty) &= K_m(\infty)(1 + 3\beta^\infty c), \\ \beta^\infty &= (\alpha^\infty - 1)/(\alpha^\infty + 2), \qquad \alpha^\infty = K_m(\infty)/K_f(\infty). \end{aligned} \tag{5.4}$$

We can combine the formulas (5.3) and (5.4) in the following [1/1] Padé approximation:

$$K^*(g) = \frac{k_0^*[K^*(\infty) - k_0^*] + K^*(\infty)k_1^* g_m}{K^*(\infty) - k_0^* + k_1^* g_m}. \tag{5.5}$$

In the case (ii) we suppose for definiteness that $K_m(g)$ has the asymptotics

$$K_m(g) \sim \kappa_m^\infty g_m^\gamma \text{ at } g_m \longrightarrow \infty, \gamma \geqq 1. \tag{5.6}$$

(The case $0 < \gamma < 1$ should be treated in a different manner.) Then the arguments, given in the end of §4, are applicable so that we may employ again the Maxwell formula (4.12b) which, together with (5.6), yields

$$K^*(g) \sim k^*_\infty g_m^\gamma \ at \ g_m \longrightarrow \infty, \quad k^*_\infty = \kappa_m^\infty(1 + 3\beta^\infty c),$$
$$\beta^\infty = (\alpha^\infty - 1)/(\alpha^\infty + 2), \qquad \alpha^\infty = \lim_{g\to\infty} \frac{K_f(g)}{K_m(g)}. \tag{5.7}$$

We then combine (5.3) and (5.7) into the Padé approximation, similar to (4.14):

$$K^*(g) = \frac{k_0^* + (k_0^* + k_1^*)g_m + k^*_\infty g_m^\gamma}{1 + g_m}. \tag{5.8}$$

The proposed formulas (4.14), (5.5) and (5.8), exact for both limiting cases of small and big magnitudes of the macrogradient $\mathbf{G}$ can be expected to predict reasonably enough the behaviour of the effective function $K^*(g)$ in the whole region $[0, \infty)$ for a dilute dispersion of spheres.

ACNOWLEDGEMENT. The support of this work by the Bulgarian Ministry of Culture, Science and Education under Grant No 8 is acknowledged.

REFERENCES

1. B e r a n, M. Statistical continuum theories. John Wiley, N. Y., 1968.
2. F r i s h, H. L. Statistics of random media. — Trans. Soc. Rheol., **9**, 1965, 293 — 312.
3. W i l l i s, J. R. Variational estimates for the overall response of an inhomogeneous nonlinear dielectric. — In: Proceedings of IMA workshop of homogenization and composites (October, 1984). Springer, Berlin — New York, 1986, 245–263.
4. T a l b o t, D. R. S., J. R. W i l l i s. A variational approach to the overall sink strength of a nonlinear lossy composite medium. — Proc. Roy. Soc., **A405**, 1986, 159–180.
5. M c C o y, J. J. Macroscopic response of continua with random microstructure. — In: Mechanics today (ed. by S. Nemat-Nasser), vol. **6**, Pergamon Press, N. Y., 1981, 1–40.
6. P a p a n i c o l a o u, G. C. Electromagnetic problems in composite materials in linear and nonlinear regimes. — In: Nonlinear electromagnetics (ed. by P. L. E. Uslenghi), Academic Press, N. Y., 1980, 253–261.
7. M i k s i s, M. I. Effective dielectric constant of a nonlinear composite material. — SIAM J. Appl. Math., **43**, 1983, 1140–1155.
8. M a r k o v, K. Z., K. D. Z v y a t k o v. On the nonlinear conductivity of a random suspension. — In: Proceedings 5th Bulg. Congress on Mechanics (Varna, 1985), Publ. House of the Bulg. Acad. Sci., vol. **2**, Sofia, 1985, 48–53.
9. E k e l a n d, I., R. T e m a m. Convex analysis and variational problems. North-Holland, Amsterdam, 1976.
10. W i l l i s, J. R. Variational and related methods for the overall properties of composites. — Adv. Appl. Mechanics, **21**, 1981, 1–78.

11. M a r k o v, K. Z. Application of Volterra-Wiener series for bounding the overall conductivity of heterogeneous media. I. General procedure, II. Suspensions of equi-sized spheres. — SIAM J. Appl. Math., **47**, 1987, 831–850, 851–870.
12. S t r a t o n o v i c h, R. L. Topics in theory of random noises, vol.1, Gordon and Breach, N. Y., 1967.
13. B e r a n, M. Use of a variational approach to determine bounds for the effective permittivity of a random medium. — Nuovo Cimento, **38**, 1965, 771–782.
14. M a r k o v, K. Z., K. D. Z v y a t k o v. On the bounds for the effective properties of random suspensions of spheres. — C. R. Acad. Bulg. Sci., **40**(3), 1987, 17–20.
15. M a x w e l l, J. C. A treatise on electricity and magnetism. Dover, N. Y., 1954. (Republication of 3rd ed. of 1891.)
16. B a k e r, G. A., P. G r a v e s-M o r i s. Padé approximants, Part I: Basic theory. Addison — Wesley, London, 1981.

Received 14. IV. 1989

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 2 — Механика
Том 82, 1988

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA "ST. KLIMENT OHRIDSKI"
FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 2 — Mécanique
Tome 82, 1988

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ НЕВЯЗКОГО ОТРЫВА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ОБТЕКАНИЯ КРЫЛЬЕВЫХ ПРОФИЛЕЙ

МИХАИЛ ТОДОРОВ, ХРИСТО И. ХРИСТОВ

Михаил Тодоров, Христо И. Христов. ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ НЕВЯЗКОГО ОТРЫВА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ОБТЕКАНИЯ КРЫЛЬЕВЫХ ПРОФИЛЕЙ

Численно решена задача отрывного обтекания крыльевых профилей в невязкой жидкости (задача Гельмгольца). В широком диапазоне углов атаки определена форма застойной зоны. Рассчитанные значения гидродинамических сил (лобовое сопротивление и подъемная сила) сравнены с известными экспериментальными результатами для трех профилей и на этом основании оценена применимость данной модели.

Michail Todorov, Christo I. Christov. AN APPLICATION OF INVISCID SEPARATION MODEL FOR INVESTIGATION OF FLOWS AROUND AIRFOILS

The inviscid separated flow around three airfoils is investigated numerically (Helmholtz problem). The shape of stagnation zone for a wide range of angles of attack is computed. The calculated values of hydrodynamical forces (resistance and lift) are compared with experimental data available and thus the validity of model is assessed.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование свойств течений вокруг несущих профилей (крыльев под углом атаки), кроме теоретического, имеет большое практическое значение, особенно в самолетостроении и судостроении. Как хорошо известно, отрыв и развитие застойной зоны и кавитации за такими телами оказывает существенное влияние на их гидродинамические характеристики и, в частности, сопровождается значительным нарастанием сопротивления. Это обуславливает необходимость создания подходящих моделей, адекватно учитывающих основные свойства этих течений, а также эффективных алгоритмов для решения возникающих на основе этих моделей задач.

Из литературы известно, что постулат Кута — Жуковского дает рецепт, позволяющий из бесконечного числа циркуляционных потенциальных течений выбрать то, которое обтекает безотрывно заднюю кромку. Подъемная сила определяется из теоремы Жуковского, а сопротивление равно нулю в соответствии с парадоксом Даламбера (см. например [1] и [2]). Разработанная в [3], [4] и [5] численная методика нахождения невязкого отрывного течения вокруг затупленных тел, основанная на предположении, что область течения составлена из потенциальной и застойной зон, разделенных неизвестной границей (задача Гельмгольца) [6], в настоящей работе применена для вычисления таких течений вокруг крыльевых профилей. Так как будем искать отрывные течения, то в задней кромке дополнительные условия о характере течения не будем ставить, а гидродинамические силы будем определять, интегрируя поверхностное давление при наличии отрыва.

I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим плоское стационарное потенциальное течение вокруг бесконечно длинного крыла под углом атаки, что позволяет ограничиться рассмотрением течения вокруг произвольного его поперечного сечения. Предположение о безвихренности позволяет ввести функцию тока ψ, являющуюся решением уравнения Лапласа $\Delta\psi = 0$. Задачу решаем в двух координатных системах. Цилиндрические координаты используются только на этапе начального развития застойной зоны, а конечный результат получается в параболических координатах, которые оказываются очень удобными для бесконечно длинных застойных зон.

В этих координатных системах уравнение Лапласа имеет вид

(1а) $$\psi_{rr} + \frac{1}{r}\psi_r + \frac{1}{r^2}\psi_{\theta\theta} = 0;$$ (1б) $$\frac{1}{\sigma^2+\tau^2}(\psi_{\sigma\sigma} + \psi_{\tau\tau}) = 0$$

с граничными условиями на бесконечности

(2а) $$\psi \underset{r\to\infty}{\sim} U_\infty r \sin\theta;$$ (2б) $$\psi \underset{\substack{\sigma\to\infty \\ \tau\to\pm\infty}}{\sim} U_\infty \sigma\tau$$

и с условиями непротекания на границе (твердой и свободной) (рис. 1)

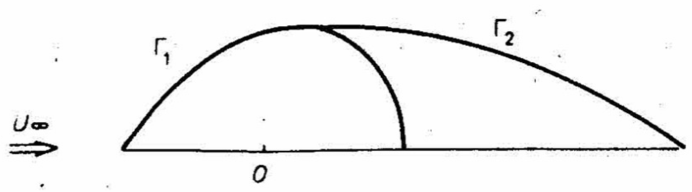

Рис.1

(3а) $\quad \psi = 0 \quad$ для $\quad r = R(\theta)$; $\qquad$ (3б) $\quad \psi = 0 \quad$ для $\quad \sigma = S(\tau), \quad \tau \in \Gamma$.

На известной свободной границе выполняется интеграл Бернулли:

$$(4а) \qquad \frac{1}{2}[\psi_r^2 + \frac{1}{r^2}\psi_\theta^2] + \frac{p_c}{\rho} = U_\infty + \frac{p_\infty}{\rho}, \qquad r = R(\theta), \quad \theta \in \Gamma_2;$$

$$(4б) \qquad \frac{1}{2(\sigma^2+\tau^2)}[\psi_\sigma^2 + \psi_\tau^2] + \frac{p_c}{\rho} = U_\infty + \frac{p_\infty}{\rho}, \qquad \sigma = S(\tau), \quad \tau \in \Gamma_2,$$

где p_∞ и U_∞ — давление и скорость на бесконечности, а p_c — давление в застойной зоне. Здесь a и b соответствуют цилиндрической и параболической координатной системам.

II. ЗАМЕНА КООРДИНАТ

Краевая задача (1)–(4) корректна, но ее решение связано с преодолением больших трудностей, так как границы области криволинейны, а свободная граница определяется неявным образом путем удовлетворения условия (4). После введения подходящих координатных трансформаций область течения преобразуется в область с фиксированными границами (о деталях см. [4] и [5]), которые уже являются координатными линиями, а условие (4) сводится к следующему явному уравнению для определения свободной границы:

$$(5а) \qquad \frac{1}{R^2}\left[1 + (R'/R)^2\right]\left[\left.\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right|_{\eta=1}\right] = 1 + \varkappa, \ \theta \in \Gamma_2,$$

$$(5б) \qquad \frac{1}{S^2+\tau^2}\left[1 + S'^2\right]\left[\left.\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right|_{\eta=0}\right] = 1 + \varkappa, \ \tau \in \Gamma_2,$$

где $\varkappa$ — число кавитации. Так как рассматриваем течения с застойными зонами, положим $\varkappa = 0$.

III. ВЫЧИСЛЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ

После разложения главного вектора давления $\mathbf{R} = -\oint\limits_{\Gamma} p\mathbf{n}ds$, по осям декартовой координатной системы, для безразмерных коэффициентов лобового сопротивления и подъемной силы в параболических координатах получаем следующие выражения:

$$(6) \qquad C_x = \int\limits_{-\tau_1}^{\tau_1} q[S(\tau) + S'(\tau)\tau]d\tau,$$

$$(7) \qquad C_y = -\int\limits_{-\tau_1}^{\tau_1} q[\tau - S'(\tau)S(\tau)]d\tau,$$

где p — давление на замкнутом контуре Г, а $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к нему, $q = \dfrac{p - p_c}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$ — безразмерное давление, p_c — давление в застойной зоне, а $S(\tau), -\tau_1 \leq \tau \leq \tau_1$, — функция, описывающая границы контура Г.

IV. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ КРЫЛЬЕВЫХ ПРОФИЛЕЙ

Объектом исследования являются три крыльевых профиля. Первый из них (трехпараметрический типа PAN) задаем аналитически в виде (рис. 2):

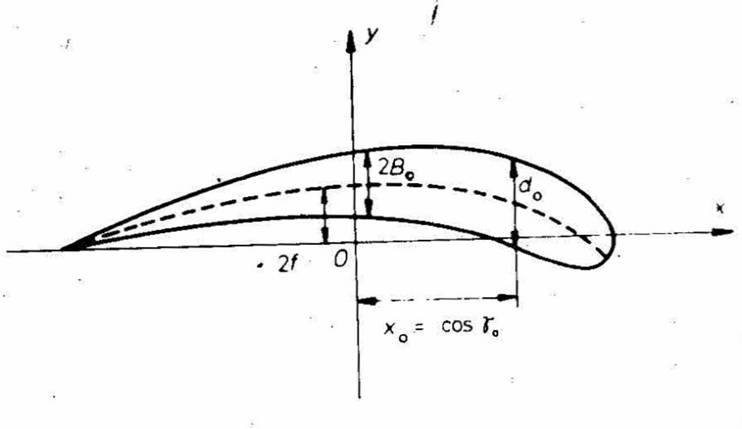

Рис. 2

$$(8) \qquad \left| \begin{array}{l} x = \cos\gamma \\ y = 2f\sin\gamma \pm Y(\gamma), \end{array} \right. \qquad 0 \leq \gamma \leq \pi,$$

где

$$Y(\gamma) = \left(B_0 + \frac{B_1}{2}\right)\gamma + B_0 \sin\gamma - B_1 \frac{\sin 2\gamma}{4} - \frac{\pi}{2}\left(B_0 + \frac{B_1}{2}\right)(1 - \cos\gamma),$$

$2f$ — кривизна, $2B_0$ — толщина в точке $x = 0$, а B_1 определяет положение максимальной толщины. Со своей стороны, B_0 и B_1 являются функциями независимых параметров — максимальной толщины профиля d_0 и угла γ_0, который задает положение d_0 (см. [7], [8])

$$
(9)\quad
\left|
\begin{array}{l}
B_1(\gamma_0, B_0) = -\dfrac{2B_0(1+\cos\gamma_0 - \dfrac{\pi}{2}\sin\gamma_0)}{1-\cos 2\gamma - \dfrac{\pi}{2}\sin\gamma} \\
B_0(d_0, \gamma_0) = \dfrac{d_0}{2C(\gamma_0)} \\
C(\gamma_0) = \left(\gamma_0 + \sin\gamma_0 - \dfrac{\pi}{2} + dfrac\pi 2\cos\gamma_0\right) \\
-2\left[\dfrac{\gamma_0}{2} - \dfrac{\sin 2\gamma_0}{4} - \dfrac{\pi}{4}(1-\cos\gamma_0)\right]\dfrac{\left[1+\cos\gamma_0 - \dfrac{\pi}{2}\sin\gamma_0\right]}{\left[1-\cos 2\gamma_0 - \dfrac{\pi}{2}\sin\gamma_0\right]}.
\end{array}
\right.
$$

Переход к полярным координатам задается формулами:

$$
(10)\qquad R(\theta) = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \theta = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}.
$$

В данном случае полагаем $f = 0$, $d_0 = 0.25$ и $\gamma_0 = \pi/2$ и получаем симметрический профиль.

Второй профиль — это $NACA\ 66_3$-018. Дискретизация в направлении θ-координаты основана на табличном задании геометрии профиля (табл. 1)[9]. Влияние задней кромки учтено добавлением 10 дополнительных узлов в соответствии с линейным законом

Таблица 1

x	y	x	y
0	0	0.4	0.08918
0. 005	0. 01323	0.45	0.08998
0. 0075	0. 01571	0.5	0.08942
0. 0125	0. 01952	0.55	0.08733
0. 025	0. 02646	0.6	0.08323
0. 05	0. 0369	0.65	0.0758
0. 075	0. 04513	0.7	0.06597
0. 1	0. 0521	0.75	0.05451
0. 15	0. 0633	0.8	0.04206
0. 2	0. 07188	0.85	0.02934
0. 25	0. 07848	0.9	0.01714
0. 3	0. 08346	0.95	0.00646
0. 35	0. 08701	1	0

$$
(11)\qquad y = \frac{0.00646}{0.05}(1-x)
$$

(по 5 в верхней и нижней половине профиля). Аналогичным образом при помощи параболической интерполяции

$$
(12)\qquad x = ay^2 + by,
$$

где

$$a = \frac{0.0075 \times 0.01323 - 0.01571 \times 0.005}{0.01571 \times 0.01323 \times (0.01571 - 0.01323)},$$

$$b = \frac{0.001571^2 \times 0.005 - 0.01323^2 \times 0.0075}{0.01571 \times 0.1323 \times (0.01571 - 0.01323)},$$

в окрестности передней кромки профиля добавлено 6 узлов (по 3 в верхней и нижней половине). Функция границы задается по формулам (10).

Третий крыльевой профиль, для которого решена задача о невязком отрывном обтекании под углом атаки, — $NACA$ 2418. Его геометрия задается следующим образом:

$$\begin{aligned} x_u &= x - y_t \sin\beta, \quad x_l = x - y_t \sin\beta, \\ y_u &= y_c + y_t \cos\beta, \quad y_l = y_c - y_t \cos\beta, \end{aligned} \tag{13}$$

где x — абсциссы точек хорды, y_c и $\mathrm{tg}\beta$ — ординаты и наклон точек скелетной линии, x_u, y_u — декартовые координаты точек верхней и нижней поверхности профиля, y_t — распределение толщины (рис. 3) [9]. Со своей

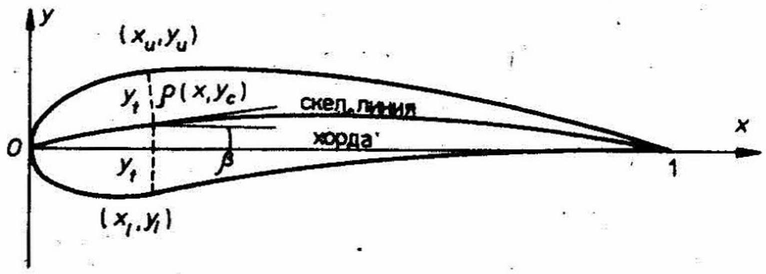

Рис. 3

стороны,

$$y_t = \frac{t}{0.2}(0.269\sqrt{x} - 0.126x - 0.3516x^2 + 0.2843x^3 - 0.1015x^4),$$

где t — максимальная толщина,

$$y_c = \left| \begin{array}{ll} \dfrac{m}{p^2}(2px - x^2), & 0 \le x \le p, m < 1, \\ \dfrac{m}{(1 - p^2)}[(1 - 2p) + 2px - x^2], & p < x < 1, \end{array} \right.$$

где m — ордината точки скелетной линии с максимальной кривизной, а p — абсцисса точки максимальной кривизны. В конкретном случае $t = 0.18$, $m = 0.02$, $p = 0.4$. Переход от декартовых к цилиндрическим координатам производится по формулам (10).

V. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

В терминах новых координат уравнение Лапласа решается эффективно по методу стабилизирующей поправки (детали см. в [4]). Здесь следует отметить, что в линейном случае эта схема абсолютно устойчива [10], но в данном случае нелинейный характер задачи, наличие косой производной, сложная геометрия крыла и наличие больших градиентов скорости в окрестности задней кромки являются факторами, которые могут привести к численной неустойчивости в ходе вычислений. Таким образом, является целесообразным автоматическое уменьшение шага по фиктивному времени Δt в схеме стабилизирующей поправки каждый раз, когда возникает немонотонность в сходимости итерационного цикла функции тока ψ. Точнее — если на n-ой итерации выполнено $\epsilon_r^n > \epsilon_r^{n-1}$, где ϵ_r^n и ϵ_r^{n-1} — относительные ошибки, будем полагать $\Delta t =: \dfrac{\Delta t}{2}$.

VI. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ

Важно отметить, что возможно получить два разных решения уравнения (5), которые для удобства назовем I и II и которые интерпретируем как кавитационные схемы соответственно типа Чаплыгина — Кольшера и Кирхгофа (о деталях см. [4] и [5]). Из-за нелинейности уравнения (5) решающее значение для нахождения устойчивого решения для формы свободной границы имеет подходящий выбор параметра релаксации τ_2. Результаты многочисленных экспериментов показали, что использование больших $\tau_2 \sim 0.1 \div 0.5$ может привести к "выходу" решения II на более высокую параболу, чем искомая, а это неминуемо связано с нарушением краевого условия (давление на свободной границе равно нулю $q = 0$). С другой стороны, использование малых $\tau_2 \sim 0.001$, приводит к увеличению числа итераций и последующим затратам машинных ресурсов. Поэтому в настоящих расчетах использованы параметры релаксации $\tau_2 \sim 0.01, 0.005$. Результаты проведенных численных экспериментов показывают, что при этих двух значениях параметра релаксации разница между расчитанными решениями не превосходит ошибки аппроксимации разностной схемы.

VII. ОБЩАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ АЛГОРИТМА

Для несимметрических тел (или, что то же самое, для симметрических под углом атаки) решение краевой задачи (1)–(4) связано с двумя вопросами принципиального характера. Первый из них относится к определению нулевой линии тока на бесконечности, т. е. линии $\theta = 0, \pi$, на которой застойная зона замыкается в полярных координатах. Эта линия может быть определена точкой пересечения свободных границ за телом и направлением невозмущенного течения. Для этой цели ось Ox, совпадающую с хордой крыльевого профиля, ориентируем в направлении основного течения следующим образом:

$$\theta_j =: \theta_j - \alpha, \qquad j = 1, \ldots, N, \tag{14}$$

где θ-сетка задана предварительно по формуле:

$$\theta_j = 4\pi \frac{(j-1)^2}{2}, \qquad \theta_{j+[\frac{N}{2}]+1} = 4\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{(j-1)^2}{N^2} \right). \tag{15}$$

Здесь $j = 1, \ldots, \left[\frac{N}{2}\right] + 1$, N — число θ-линий, а α — угол атаки,образованный пересечением хорды профиля и направления основного течения (рис. 4). Разработана процедура перехода от одной полярной координатной системы к другой, включающая трансляцию полярного центра по хорде крыльевого профиля и определение новой θ-сетки:

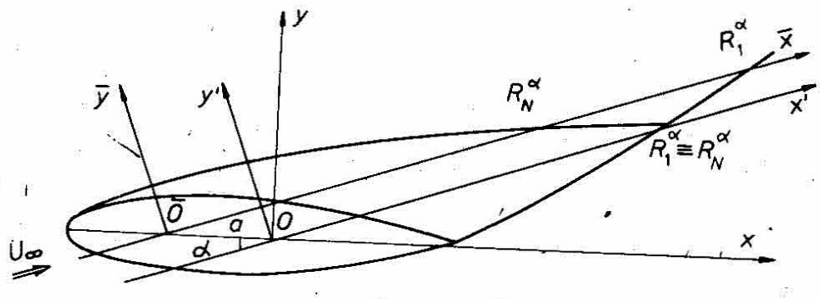

Рис. 4

$$\left| \begin{array}{ll} \theta_j = \operatorname{arctg} \dfrac{R_{j_1} \sin\theta_{j_1} - a \sin\alpha}{R_{j_1} \cos\theta_{j_1} + a \cos\alpha}, & \theta_1 = 0, \quad \theta_N = \theta_1, \\ R_1 = \dfrac{-R_{j_n}\theta_{j_{n-1}} + R_{j_{n-1}}\theta_{j_n}}{\theta_{j_n} - \theta_{j_{n-1}}}, & R_N = R_1, \\ R_j = \sqrt{R_{j_1}^2 + a^2 + 2aR_{j_1}\cos(\theta_{j_1} + \alpha)} & \text{за } j = 2, \ldots, N-1, \end{array} \right. \tag{16}$$

где $j_1 = j_n + j - 2$, j_n — узел, в котором полярный угол θ_j (см. (14)) меняет свой знак (становится положительным), а a — параметр трансляции. В расчетах использовалось $a = \pm 0.1$. Итак, решается соответствующий разностный аналог краевой задачи (1)-(4) (см. [4]) в полярных координатах. На каждой общей итерации с порядковым номером α делаем следующие проверки:

Если $R_1^\alpha > R_N^\alpha$ и $\left| \dfrac{R_N^\alpha - R_1^\alpha}{R_N^\alpha} \right| > 0.1$, то $a = 0.1$ и совершаем трансляцию по формулам (16).

Если $R_1^\alpha < R_N^\alpha$ и $\left| \dfrac{R_N^\alpha - R_1^\alpha}{R_N^\alpha} \right| > 0.1$,то $a = -0.1$ и совершаем трансляцию по формулам (16).

Если выполнено $\left|\dfrac{R_N^\alpha - R_1^\alpha}{R_N^\alpha}\right| \leqq 0.1$, то считаем,что найдена нулевая линия тока. Однако поиск нулевой линии тока по этой процедуре не всегда возможен. Из-за нелинейности рассматриваемой задачи и сложной геометрии после известного числа итераций вычисленный центр транслируемой координатной системы может оказаться вне контура крыла. Вот почему переход к параболическим координатам следует осуществлять прежде чем застойная зона развилась достаточно в полярных координатах, одновременно дополняя ее до "актуальной" τ-бесконечности, полагая $S = 0$. Вопрос о нахождении нулевой линии тока не оказывает влияния на дальнейший ход расчетов вследствие открытого характера застойной зоны. В случае профиля PAN координатное начало расположено на хорде в точке $x = 0.21$. Определенная таким образом линия $\theta = 0, \pi$ оказывается самой подходящей. В двух других случаях ($NACA$ 66_3-18 и $NACA$ 2418) координатное начало расположено на хорде соответственно в точке $x = 0.45$.

Второй вопрос принципиального характера относится к адекватному заданию задней кромки. Проведенные расчеты ясно и недвусмысленно показали, что использовать θ-сетку, не учитывающую наличия критической точки, нельзя, так как само по себе это ведет к бесконечным градиентам давления в ее окрестности, к вырождению поля скорости вокруг профиля и, в конечном счете, к возникновению неустойчивости итерационного процесса. Поэтому приходится сильно сгущать θ-сетку в окрестности критической точки и задавать односторонние производные функции границы в этой точке:

$$
(17)\qquad \left|\begin{aligned}
R'_r\,|_{j=jt} = {} & R_j \frac{2g_{j+1} + g_{j+2}}{g_{j+1}(g_{j+1} + g_{j+2})} + R_{j+1} \frac{g_{j+1} + g_{j+2}}{g_{j+1}g_{j+2}} \\
& - R_{j+2} \frac{g_{j+1}}{g_{j+2}(g_{j+1} + g_{j+2})} + O(g_{j+1}g_{j+2}), \\
R'_l\,|_{j=jt} = {} & R_{j-2} \frac{g_j}{g_{j-1}(g_{j-1} + g_j)} - R_{j-1} \frac{g_{j-1} + g_j}{g_{j-1}g_j} \\
& + R_j \frac{g_j + 2g_{j-1}}{g_j(g_{j-1} + g_j)} + O(g_{j-1}g_j), \\
R''_r\,|_{j=jt} = {} & 2\left(R_j \frac{1}{g_{j+1}(g_{j+1} + g_{j+2})} - R_{j+1} \frac{1}{g_{j+1}g_{j+2}}\right. \\
& \left. + R_{j+2} \frac{1}{g_{j+1}(g_{j+1} + g_{j+2})}\right) + O(g_{j+1}g_{j+2}), \\
R''_l\,|_{j=jt} = {} & 2\left(R_j \frac{1}{g_j(g_{j-1} + g_j)} - R_{j-1} \frac{1}{g_{j-1}g_j}\right. \\
& \left. + R_{j-2} \frac{1}{g_{j-1}(g_{j-1} + g_j)}\right) + O(g_{j-1}g_j),
\end{aligned}\right.
$$

где $R'_l|_{jt}$, $R'_r|_{jt}$ и $R''_l|_{jt}$, $R''_r|_{jt}$, — первая левая и правая и вторая левая и правая производные в задней кромке. Это делаем только на первой итерации в полярных координатах, так как на следующих шагах особая точка остается в застойной зоне (рис. 5). Более того, дальнейшее ре-

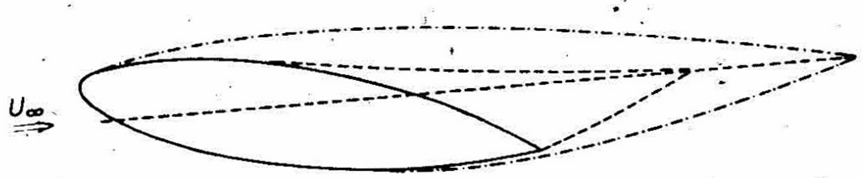

Рис. 5

шение разностной задачи с введенной таким образом θ-сеткой невозможно. Численным экспериментом установлено, что краевое условие на теле (3), соответствующее разностной линии θ_{jt} (где находится особая точка), "проектируется" на бесконечности, т. е. краевые условия рассматриваемой разностной задачи нарушаются. Этот недостаток успешно преодолевается увеличением шага сетки в окрестности особой точки еще до второй общей итерации. Подобный численный эффект красноречиво говорит в пользу выбора сильно сгущенной сетки только в окрестности особой точки (кромки).

Для трех рассматриваемых крыльевых профилей после первой общей итерации в полярных координатах "удаляются" 10 узлов в окрестности задней кромки и потом, после перехода к параболическим координатам, добавляются 10 узлов до τ_∞. Одновременно с этим τ-сетка снова нумеруется.

VIII. РЕЗУЛЬТАТЫ И ДИСКУССИЯ

Численные расчеты в случае профиля PAN проведены на неравномерной сетке 61×45 (о дефиниции сетки см. выше, а также [4]), а использованный шаг по фиктивному времени $\Delta t = \dfrac{1}{4}$. Получены результаты о форме решения II, когда угол атаки $\alpha \in [0°, 14°]$ и до $\alpha = 20°$ в случае решения I. В интервале $\alpha \in [0°, 10°]$ схема стабилизирующей поправки остается устойчивой при заданном значении параметра Δt. При $\alpha = 12°$ она устойчива в случае решения I, если $\Delta t = \dfrac{1}{32}$, и в случае решения II — если $\Delta t = \dfrac{1}{8}$, а при $\alpha = 14°$ она устойчива, если соответственно $\Delta t = \dfrac{1}{128}$ и $\Delta t = \dfrac{1}{16}$. При углах атаки $\alpha \geq 16°$ необходимый шаг по фиктивному времени в случае решения I становится очень малым — $\dfrac{1}{4028}$. При углах атаки $\alpha \geq 14°$ решение II невозможно получить из-за возникновения неустойчивости (возможные причины были рассмотрены выше). Относительным нормам функции тока, свободной границы и общей итерации заданы значения $10^{-2}, 10^{-3}$ и 10^{-3} соответственно. Число общих итераций

при фиксированном угле атаки варьирует в интервале 27–39 в случае решения I и 150–245 в случае решения II. Необходимое время программной реализации на ЭВМ ЕС 1061 не превосходит 2 и 9 минут соответственно.

В случае профиля $NACA$ 66_3-018, вследствие добавления дополнительного числа узлов в окрестностях задней угловой точки и передней кромки, задача решена на разностной сетке 61×65. Результаты численных экспериментов показывают, что в этом случае шема стабилизирующей поправки устойчива, если шаги по фиктивному времени меньше шага, соответствующего профилю PAN (табл. 2). Число общих итераций в различных вариантах варьирует в интервале 34–42 для решения I и 58–221 для решения II. Соответственно необходимое машинное время для расчета данного варианта на ЭВМ ЕС 1061 составляет 2–3 минуты и 3–10 минут. Рассчитана форма свободной границы в диапазоне $\alpha \in [0°, 18°]$ для решения I и $\alpha \in [0°, 12°]$ для решения II, но при $\alpha > 10°$ последнее теряет устойчивость и приходится сильно уменьшать значение параметра релаксации ($\tau_2 < 0.001$).

Таблица 2

Угол атаки α (в градусах)	Шаг по фиктивному времени Δt	
	решение I	решение II
0	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{128}$
2	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{128}$
4	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{512}$
6	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$
8	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{512}$
10	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{512}$
12	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1024}$
14	$\frac{1}{1024}$	
16	$\frac{1}{1024}$	
18	$\frac{1}{2048}$	

Численные расчеты для профиля $NACA$ 2418 (аналогично профилю PAN) выполнены на разностной сетке 61×45. Решение I получено при углах атаки $\alpha \in [0°, 16°]$, а решение II — при $\alpha \in [0°, 14°]$. Начальное значение шага по фиктивному времени $\Delta t = \dfrac{1}{4}$. В зависимости от угла атаки шема стабилизирующей поправки устойчива в интервале $\Delta t \sim \dfrac{1}{16} \div \dfrac{1}{512}$ (табл. 3). В случае решения I необходимое машинное время остается в интервале 2–4 минуты, а для решения II — 7–9 минут. Соответствующее число общих итераций 31–50 для решения I и 144–207 — для решения II.

Во всех трех случаях, когда углы атаки велики, отрыв происходит собственно на задней кромке. Тогда, чтобы не допустить возникновения больших градиентов давления, приходится производить дополнительное

Таблица 3

Угол атаки α (в градусах)	Шаг по фиктивному времени Δt	
	решение I	решение II
0	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$
2	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$
4	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$
6	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$
8	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{64}$
10	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{512}$
12	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$
14	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{32}$
16	$\frac{1}{256}$	

сгущение разностной сетки в окрестности точки отрыва. Поэтому исполь зована разностная сетка 61×90.

Независимо от того, что решение, соответствующее профилю *PAN* имеет характер теста, полученные результаты находятся в хорошем ка

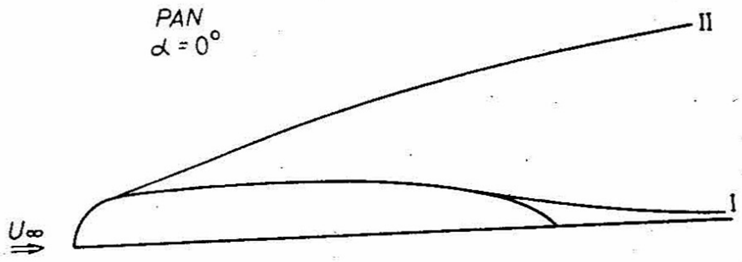

Рис. 6

чественном согласии с известными экспериментальными данными о те чениях вокруг крыла с образованием застойных зон. На рис. 6, 7, 8 представлены границы застойных зон, соответствующих углам атаки $\alpha =$ $0°, 6°, 14°$. Общей закономерностью является то, что решение I замыка ется в бесконечной точке, а решение II расширяется параболически на бесконечности. В случаях $\alpha = 6°, 14°$ хорошо видно, что выбор подходя щего параметра релаксации влияет существенным образом на поведени решения II. Очевидно, что при $\alpha = 6°$ значение параметра $\tau_2 = 10^{-1}$ н является достаточно малым, в то время как при $\tau_2 = 5 \times 10^{-2}$ и $\tau_2 = 10^{-2}$ разница между рассчитанными решениями II составляет уже всего 2–3% Это дает нам основания утверждать, что уменьшение параметра релакса ции до $\tau_2 = 5 \times 10^{-2}$ вполне достаточно для нахождения искомого решени с достаточной точностью. Из рис. 8 ясно видно, что с увеличением угл атаки следует надлежащим образом уменьшать τ_2, т. е. усилить ограни чивающее действие релаксации. На рис. 9, 10, 11 даны поверхностны распределения давления при тех же углах атаки, соответствующих реше

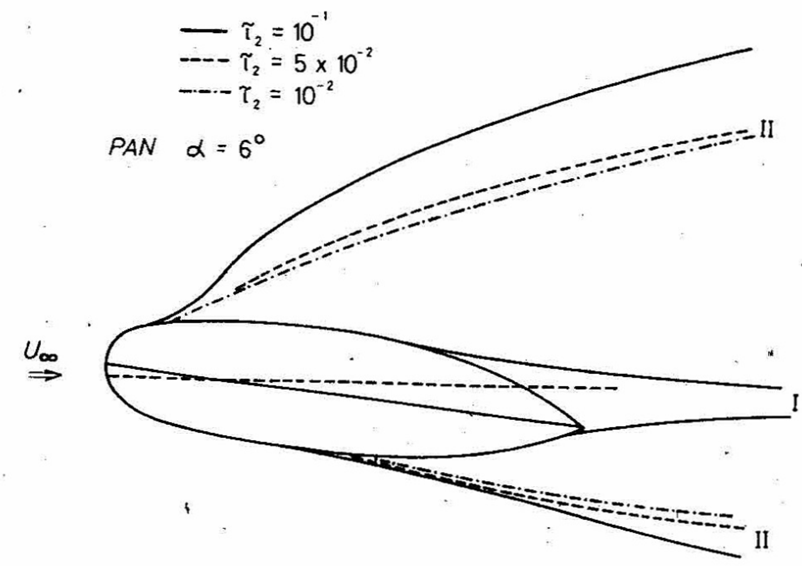

Рис. 7

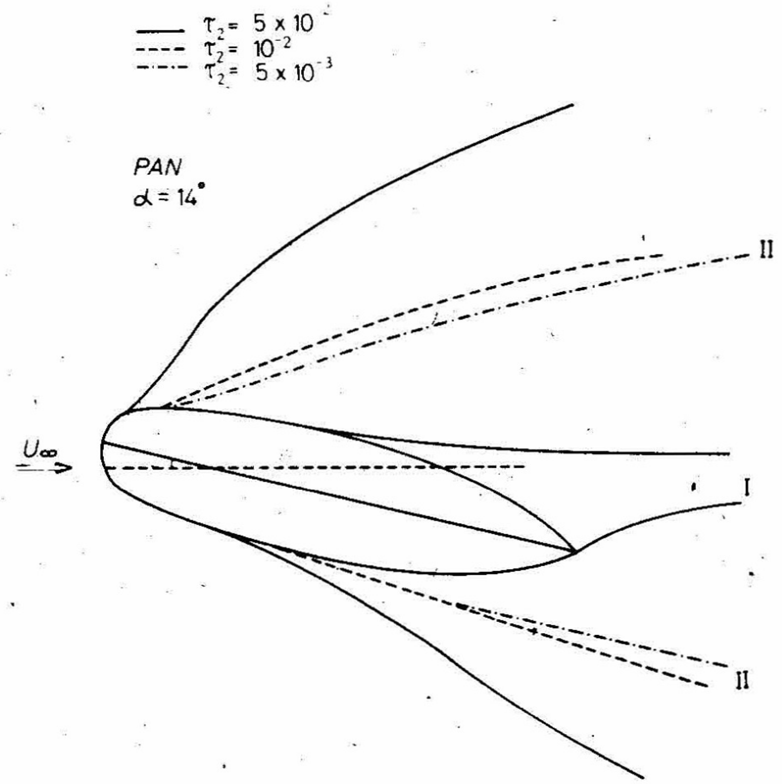

Рис. 8

нию I, а на рис. 12 — решению II при $\alpha = 12^{\circ}$. На свободных границах значения давления имеют порядок 10^{-3}–10^{-5}, т. е. в рамках ошибки аппроксимации схемы давление постоянно и равно нулю. На рис. 13, 14 графически представлены результаты о коэффициентах сопротивления и подъемной силе. Как хорошо видно, в случае решения II подъемная сила и сопротивление являются величинами одного порядка, т. е. подъем-

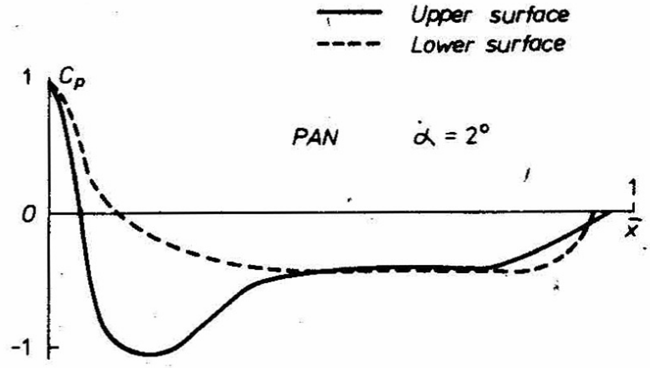

Рис. 9

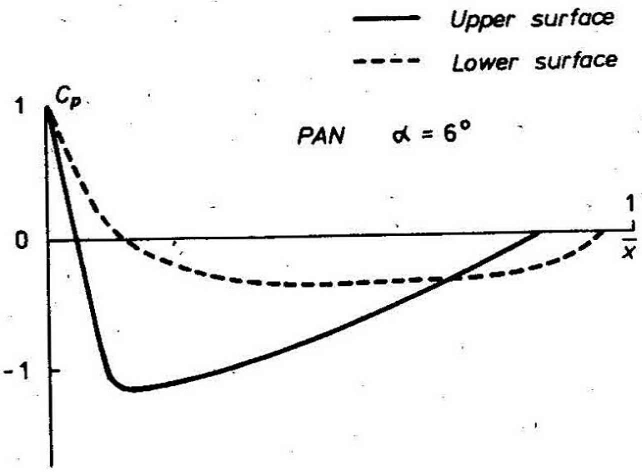

Рис.10

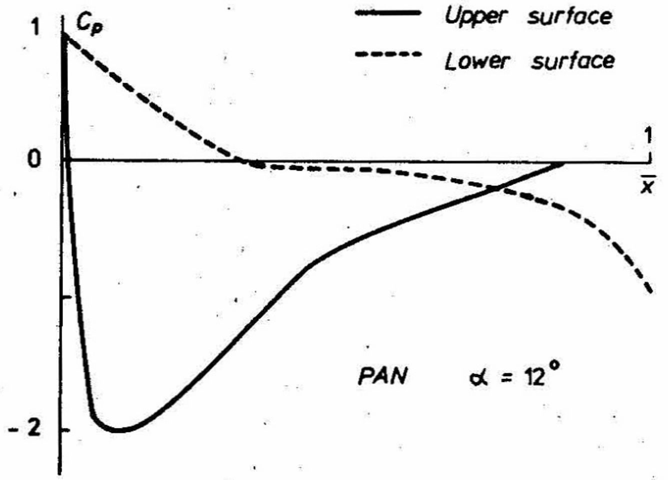

Рис.11

ная сила, соответствующая отрыву у передней кромки, мала. Наоборот, в случае решения I сопротивление приблизительно в 1,5–2 раза меньше, чем в случае решения II, а подъемная сила примерно в 10 раз больше, чем та, которая соответствует отрыву у передней кромки (решение II). Нарастание угла атаки до 8° сопровождается постепенным сдвигом точки отрыва решения I на нижней половине от 85% относительно длины хорды (при $\alpha = 0°$) к задней кромке (табл.4). При больших значениях угла

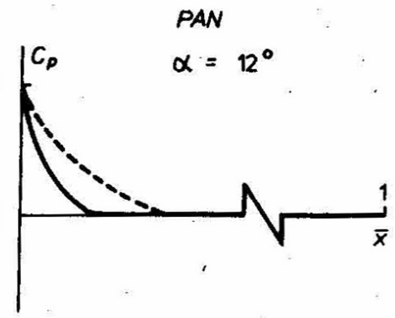

Рис.12

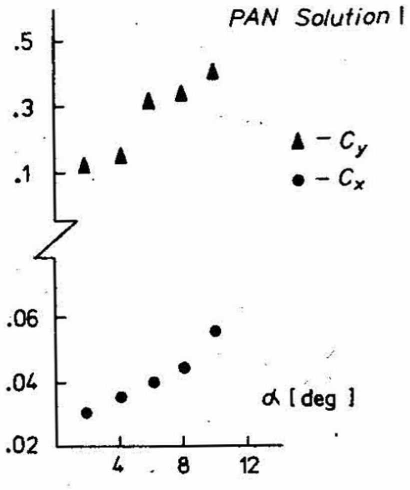

Рис.13

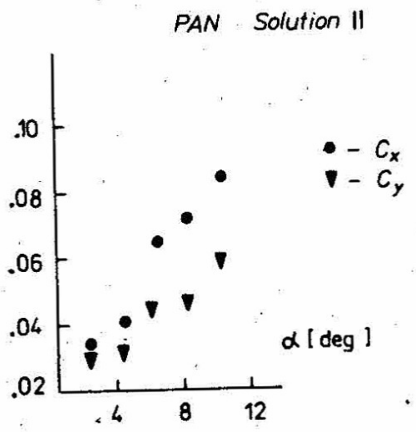

Рис.14

атаки течение отрывается на самой кромке. На верхней половине точка отрыва сдвигается в обратном направлении: от 85% при $\alpha = 0°$ до 14% при $\alpha = 20°$. Аналогично, точки отрыва решения II сдвигаются от 15% относительно длины хорды при $\alpha = 0°$ до 8% в верхней и 50% в нижней половине при $\alpha = 14°$.

Решение II похоже на ламинарный отрыв пограничного слоя у передней кромки, наблюдаемый в эксперименте. Решение I похоже на течение, возникающее в результате отрыва повторно присоединенного после лами-

Таблица 4

Угол атаки α (в градусах)	Точки отрыва решения I относительно средней линии (в %)		Точки отрыва решения II относительно средней линии (в %)	
	верхняя половина	нижняя половина	верхняя половина	нижняя половина
0	85	85	15	15
2	65	88	10	20
4	65	87	10	25
6	60	90	10	25
8	52	100	9	45
10	50	100	7	45
12	45	100	8	45
14	40	100	8	50
16	26	100		
18	22	100		
20	14	100		

нарного отрыва пограничного слоя. Повторное присоединение в эксперименте сопровождается резким повышением значения подъемной силы, в то время как полный отрыв от верхней половины профиля сопровождается уменьшением подъемной силы. Сказанное дает основание предположить, что при малых углах атаки (и докритических числах Рейнольдса) реализуется решение I.

При дальнейшем нарастании угла атаки течение перестраивается к решению II. Когда число Рейнольдса становится достаточно большим, пограничный слой турбулизуется и в результате наступает отрыв вблизи задней точки (решение I).

Общий характер решения соблюдается и для профиля $NACA$ 66_3-018. На рис. 15, 16, 17 представлены границы застойных зон, соответствующих углам атаки $\alpha = 2°, 4°, 10°$, а на рис. 18, 19, 20 — соответствующие поверхностные распределения давления в случае решения I. Что касается решения II, то качественный характер кривых давления ничем не отличается от соответствующего профилю PAN при $\alpha = 12°$. Рассчитанные формы застойных зон сравнены с экспериментальными фотографиями [11] ламинарного отрыва и турбулентного отрыва повторно присоединенного пограничного слоя. Из этого сравнения видно, что решение I и экспериментально наблюдаемое течение при числах Рейнольдса $Re = 4 \times 10^4$, когда пограничный слой становится турбулентным и точка отрыва сдвигается вблизи задней кромки профиля, находятся в хорошем согласии между собой. Экспериментально скачок к отрыву у передней кромки происходит при $\alpha = 8°$. На рис. 21 сделано еще одно сравнение с экспериментально наблюдаемыми точками ламинарного и турбулентного

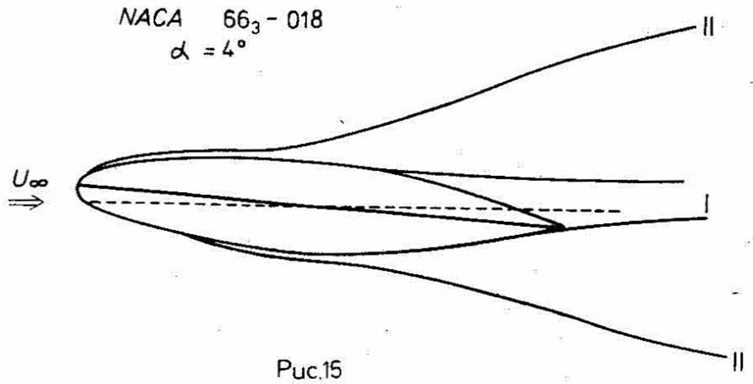

Рис.15

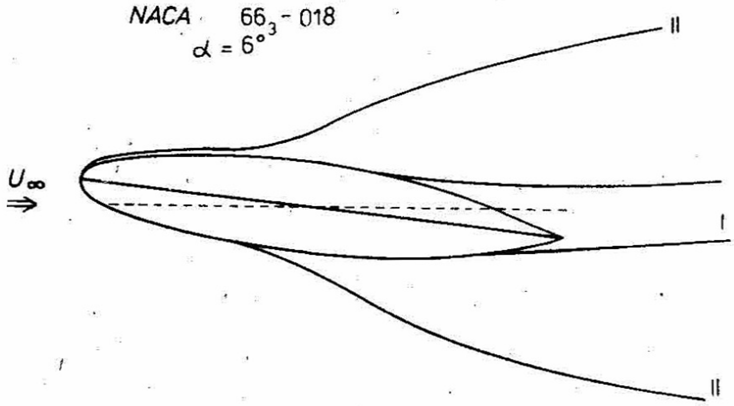

Рис.16

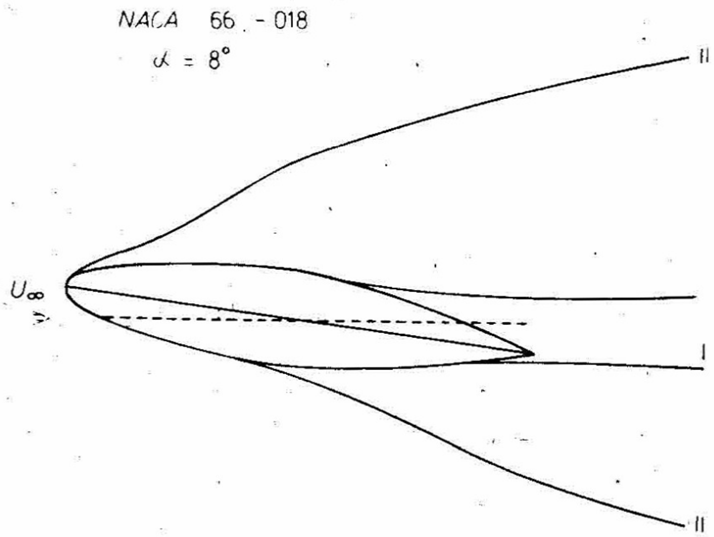

Рис.17

отрыва при числах Рейнольдса $Re = 8 \times 10^4$ и угле атаки $\alpha = 12°$ [12]. Оно еще раз демонстрирует удовлетворительное согласие между положениями точек ламинарного и турбулентного отрыва и точек отрыва решений II и I соответственно. На рис. 22, 23 приведены рассчитанные значения коэффициентов сопротивления и подъемной силы, соответствующие решению I. Как видно, при числах Рейнольдса $Re = 4 \times 10^4$ согласие с

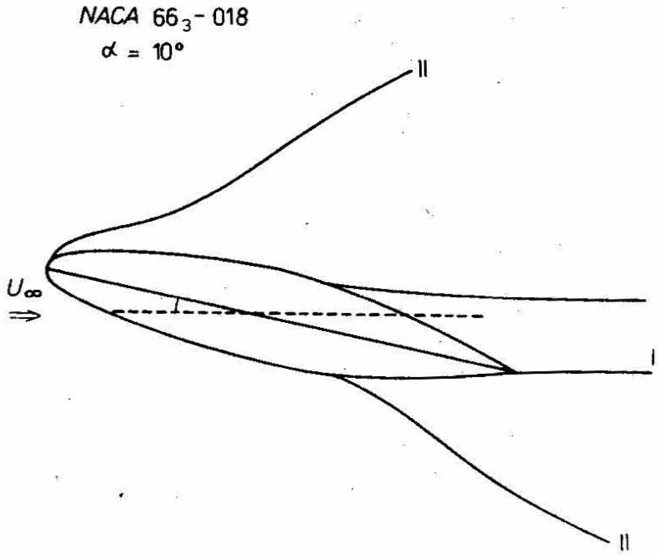

Рис.18

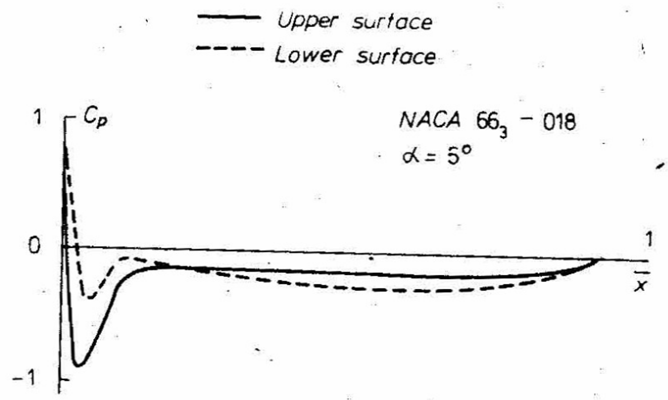

Рис.19

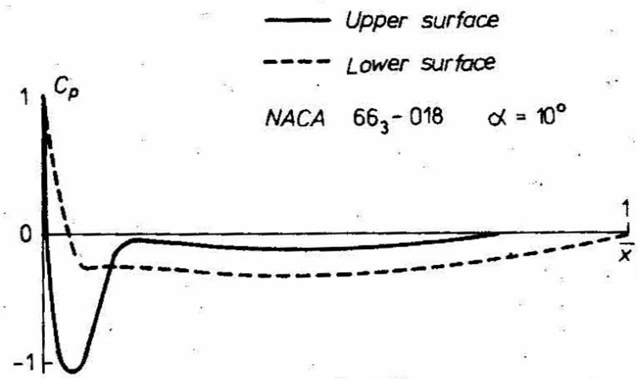

Рис. 20

экспериментально полученными значениями в [10] в интервале $\alpha \in [0°,$ вполне удовлетворительно.

Точки отрыва решения I на нижней половине профиля с ростом ла атаки сдвигаются от 63% относительно длины хорды при $\alpha = 0°$ 97% при $\alpha = 8°$ (табл. 5). Дальнейший рост угла атаки сопровожда ся отрывом на задней кромке профиля. Наоборот, сдвиг точек отрı на верхней половине направлен обратно: от 63% при $\alpha = 0°$ до 50% ı

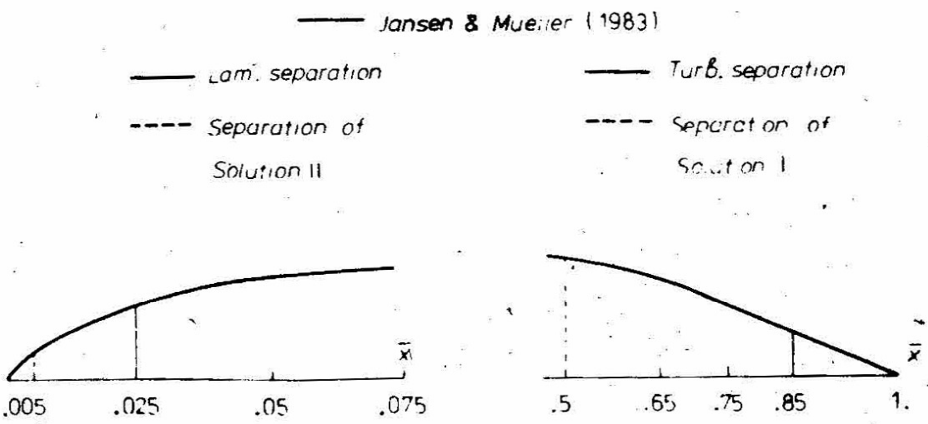

Рис. 21

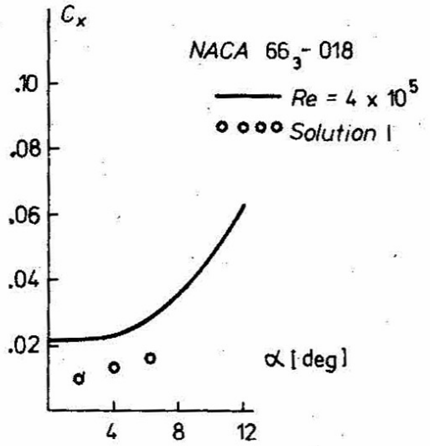

Рис. 22

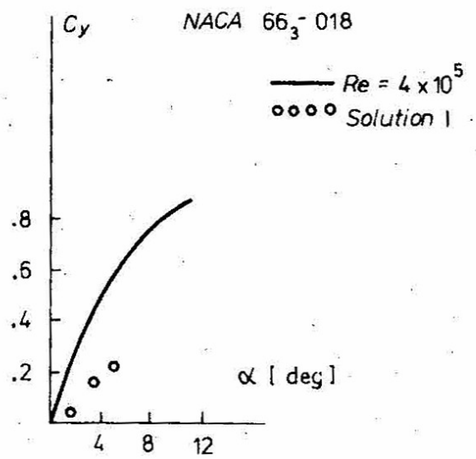

Рис. 23

$\alpha = 18°$. Точки отрыва решения II на нижней половине достигают 55% при $\alpha = 12°$, а точка отрыва на верхней половине находится очень близко к передней кромке профиля — 0,5% — 2%.

На рис. 24–26 представлены рассчитанные формы застойной зоны (решение I), соответствующие профилю $NACA$ 2418 при углах атаки $\alpha = 2°, 6°, 10°$, а на рис. 27–29 — соответствующие кривые поверхностного давления. На рис. 28 дополнительно пунктиром показано экспериментально измеренное давление при угле атаки $\alpha = 6°$ и числе Рейнольдса $Re = 2.7 \times 10^6$ [13]. На рис. 30 приведены значения поверхностного давления, соответствующие решению II при $\alpha = 6°$. Кроме того, при $\alpha = 6°$ проведено исследование поведения решения II как функциии параметра релаксации τ_2. Хорошо видно, что при $\tau_2 = 5 \times 10^{-3}$ и $\tau_2 = 10^{-3}$ ошибка в расчете свободной границы варьирует в рамках ошибки аппроксимации и, следовательно, использование бо́льшего значения параметра вполне при-

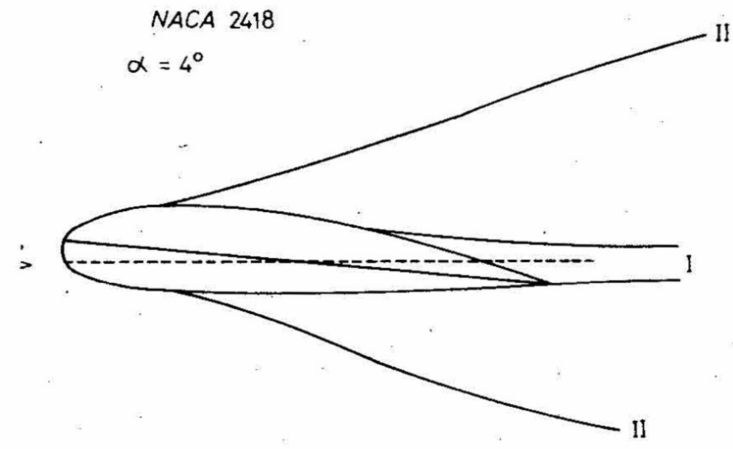

Рис. 24

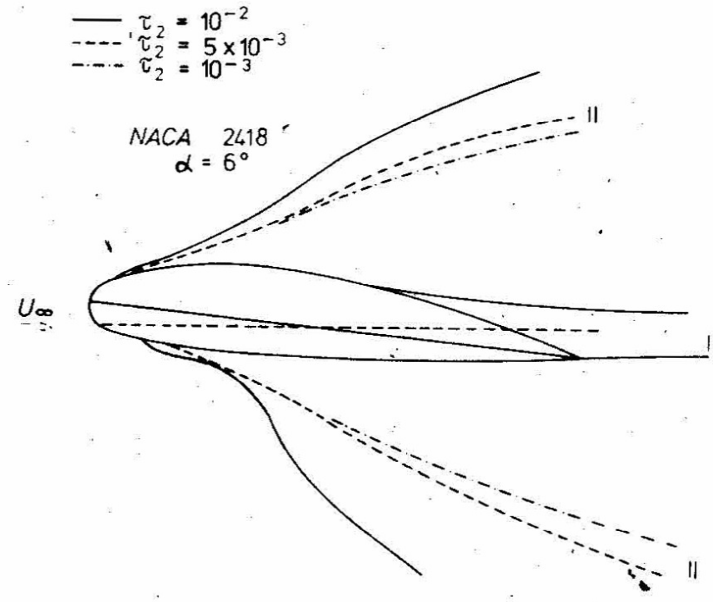

Рис. 25

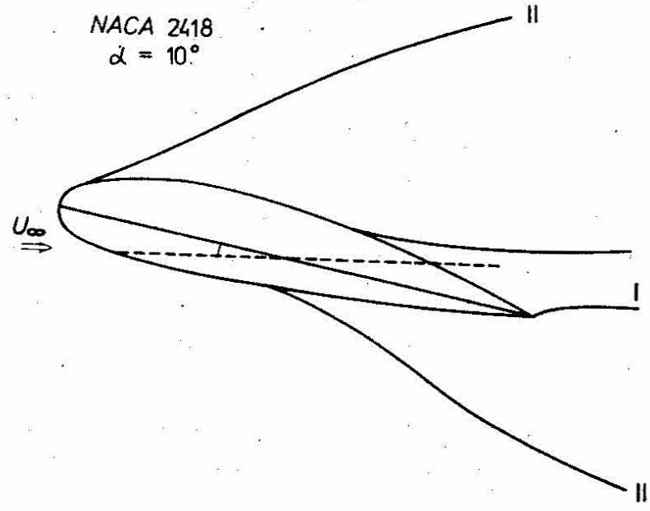

Рис. 26

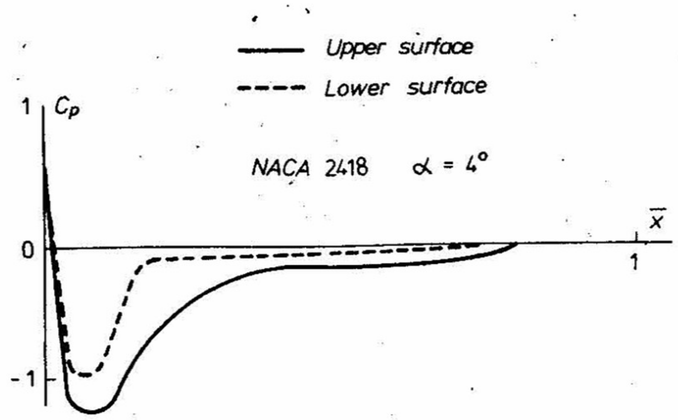

Рис. 27

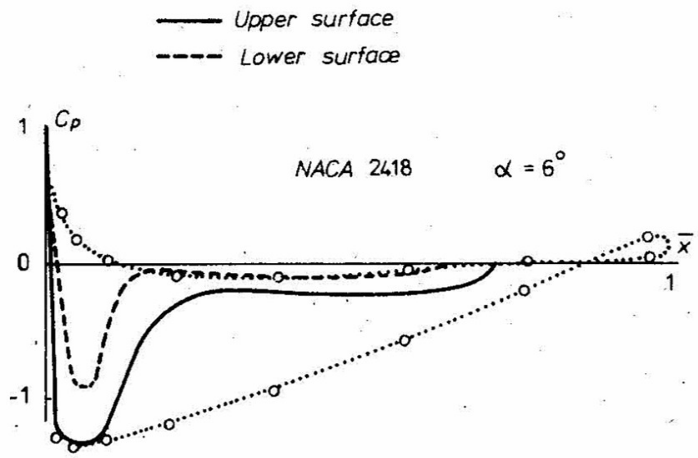

Рис. 28

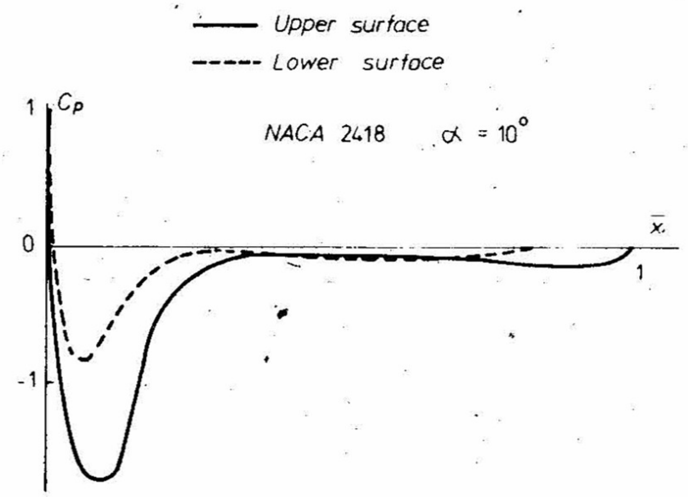

Рис. 29

Таблица 9

Угол атаки α (в градусах)	Точки отрыва решения I относительно средней линии (в %)		Точки отрыва решения II относительно средней линии (в %)	
	верхняя половина	нижняя половина	верхняя половина	нижняя половина
0	63	63	15	15
2	65	75	2	20
4	60	75	1.5	23
6	60	85	1	30
8	60	97	1	45
10	60	100	2	55
12	55	100	0.5	55
14	52	100		
16	55	100		
18	50	100		

емлемо. С другой стороны, значение $\tau_2 = 10^{-2}$ в этом случае очевидно не является достаточно малым. Производит впечатление то, что в сравнении с профилем PAN здесь надо пользоваться более сильной релаксацией, что можно объяснить геометрическими особенностями данного профиля. Сравнение значений коэффициентов подъемной силы и сопротив-

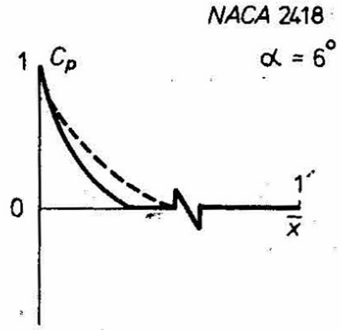

Рис. 30

ления, соответствующих решению I, с экспериментальными результатами [13] (рис. 31, 32) при числе Рейнольдса $Re = 2.7 \times 10^6$ показывает, что настоящая модель дает значения для подъемной силы меньшие, чем экспериментальные, но зато аппроксимирует очень хорошо экспериментально измеренное сопротивление в диапазоне $\alpha \in [0°, 10°]$. Представленные на рис. 33 значения гидродинамических сил (сопротивление и подъемная сила) ясно указывают в пользу того, что когда отрыв происходит вблизи передней кромки (решение II), наблюдается резкое уменьшение подъемной силы. Этот факт наблюдается и в эксперименте. В то же время сопротивление, как и следовало ожидать, приблизительно в 3 раза больше, чем сопротивление, соответствующее решению I.

При угле атаки $\alpha = 0°$ точки отрыва на нижней половине расположены соответственно на 65% относительно длины хорды в случае решения I и

NACA 2418

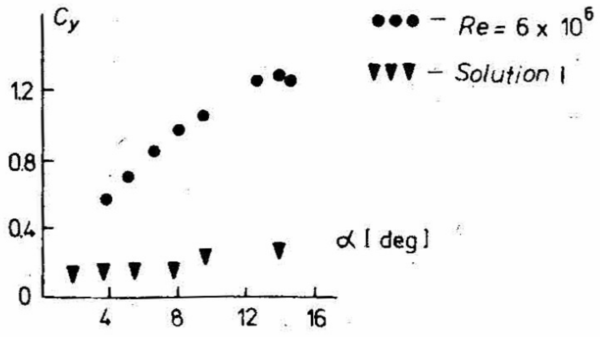

Рис. 31

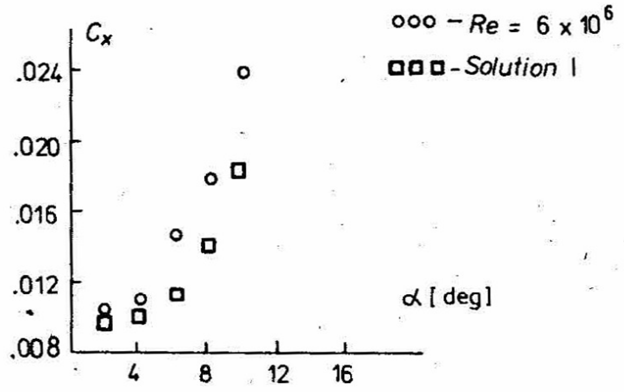

Рис. 32

NACA 2418 Solution II

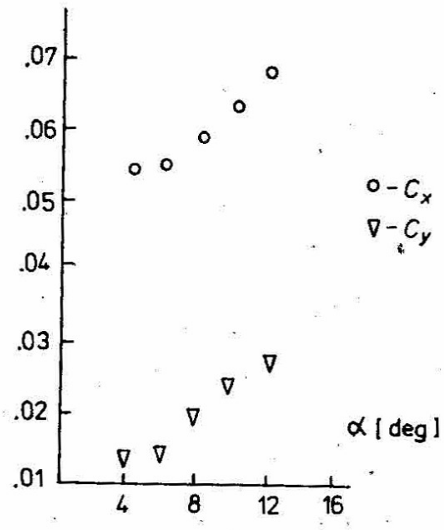

Рис. 33

на 15% — в случае решения II (табл. 6). С нарастанием угла α точки отрыва сдвигаются к задней угловой точке профиля и при $\alpha \geq 6°$ решение I отрывается уже от угловой точки, а решение II достигает 42% при $\alpha = 10°$. На верхней половине диапазон сдвига точек отрыва, соответствующих решениям I и II, от 60% и 23% при $\alpha = 0°$ до 47% при $\alpha = 16°$ в случае решения I и до 5% при $\alpha = 10°$ в случае решения II.

Полученные результаты показывают, что при углах атаки $\alpha = 0° \div 6°$ (а в случае NACA 2418 и до 10°) настоящая модель количественно

Таблица 6

Угол атаки α (в градусах)	Точки отрыва решения I относительно хорды (в %)		Точки отрыва решения II относительно хорды (в %)	
	верхняя половина	нижняя половина	верхняя половина	нижняя половина
0	60	65	23	15
2	62	70	20	15
4	65	80	20	18
6	55	100	10	18
8	55	100	8	30
10	55	100	5	42
12	55	100		
14	47	100		
16	47	100		

очень хорошо согласуется с экспериментом по крайней мере с точки зрения оценки лобового сопротивления. Поскольку модель невязкая, то этот факт сам по себе приводит к значительной экономии машинного времени. Это дает нам основание утверждать, что подобный подход можно эффективным образом использовать для расчета характеристик отрывных течений вокруг двумерных профилей с угловой точкой (крыльевые профили) при этом с приемлимыми затратами машинных ресурсов.

Авторы выражают благодарность Министерству культуры, науки и просвещения Болгарской Народной Республики за поддержку настоящей работы (Договор 1052/1988 г.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Аржаников, Н. С., В. Н. Мальцев. Аэродинамика. Оборонгиз, М., 1956.
2. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа. М., Наука, 1987.
3. Christov, C., M. Todorov. Numerical investigation of separated or cavitating inviscid flows. — In: Intern. Confer. on Numer. Methods and Appl., Sofia, 27.8–2.9. 1984, 216–223.
4. Christov, C., M. Todorov. On the determination of the shape of stagnation zone in separated inviscid flows around blunt bodies. — In: Proc. XVth Jubilee Session on Ship Hydrodynamics, Varna, 6–11.10. 1986, **2a**, paper No 10.
5. Christov, C., M. Todorov. An inviscid model of flow separation around blunt bodies. — Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci., **7**, 1987, 43–46.
6. Биркгоф, Г. Гидродинамика. М., Иностр. лит., 1963.
7. Варсамов, К., И. Недялков, П. Петрова, В. Хаджимихалев. Върху една екстремална задача за профил с минимално съпротивление и зададена подемна сила. — Год. ВТУЗ, **XVIII**, кн. 2 — техническа физика, 1981, 209–222.

8. П о п о в, М., Л. П а н о в. Хидро- и газодинамика. С., Техника, 1980.
9. A b o t t, I. E., A. E. D o e n h o f f. Theory of wing sections. Dover Publications, inc, N. Y., 1959.
10. Я н е н к о, Н. Н. Метод дробных шагов. Новосибирск, Наука, 1967.
11. M u e l l e r, T.J., S. M. B a t i l l. Experimental studies of separation on two-dimensional airfoils of low Reynolds numbers. — AIAA Journal, **20**, 1982, No 4, 457–463.
12. J a n s e n, B. J., T. J. M u e l l e r. Experimental studies of the boundary layer on an airfoils at low Reynolds numbers. — In: AIAA Fl. and Plasma Dyn. Conf., Danver, Massachusetts, July 12–14, 1983.
13. R i e g e l s, F. Aerodynamische Profile. R. Oldenbourg, München, 1958.

Поступила 14. IV. 1989 г.

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Книга 2 — Механика

Том 82, 1988

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA "ST. KLIMENT OHRIDSKI"

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Livre 2 — Mécanique

Tome 82, 1988

ОБ ОДНОМ ПРИЛОЖЕНИИ ОПЕРАТОРОВ КРАММА-КРЕЙНА К РАЗЛОЖЕНИЯМ ПО ПРОИЗВЕДЕНИЯМ РЕШЕНИЙ ДВУХ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА С ОДИНАКОВЫМИ СПЕКТРАМИ

ЙОРДАН МИШЕВ, ЕВГЕНИ ХРИСТОВ

Йордан Мишев, Евгени Христов. ОБ ОДНОМ ПРИЛОЖЕНИИ ОПЕРАТОРОВ КРАММА-КРЕЙНА К РАЗЛОЖЕНИЯМ ПО ПРОИЗВЕДЕНИЯМ РЕШЕНИЙ ДВУХ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА С ОДИНАКОВЫМИ СПЕКТРАМИ

Рассмотрены формулы разложения по произведениям решений двух уравнений Шредингера на полуоси с нулевым граничным решением, когда дискретные спектры совпадают. Показано, как с помощью пробразований Крамма-Крейна можно построить подобные формулы разложения, когда число собственных значений на единицу больше или меньше.

Jordan Mishew, Evgeni Khristov. ON AN APPLICATION OF THE OPERATORS OF CRUMM-KREIN TO THE DECOMPOSITION IN PRODUCTS OF THE SOLUTIONS OF TWO EQUATIONS OF SHRÖDINGER WITH EQUAL SPECTRA

There are considered expansions over products of solutions of two Schödinger equations on semi-axis with Dirichlet boundary conditions when discrete spectra coincide. We constructed by the Crumm-Krein transformations the analogous formulae for the expansions when there are one more or less eigenvalues.

ВВЕДЕНИЕ

А. Хорошо известна следующая

Т е о р е м а 0.1 [1, 2]. Пусть задано уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2}y + (\lambda - v(x))y = 0; \qquad a \leqq x \leqq b \tag{1}$$

и $z(x)$ — решение при $\lambda = \lambda_0$, $z(x) \neq 0$, $a < x < b$. Тогда функция

$$y_1(x,\lambda) = \frac{W(z(x), y(x,\lambda))}{(\lambda_0 - \lambda)z(x)} \qquad (W(f,g) = fg' - f'g) \tag{2}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2}y_1 + (\lambda - v_1(x))y_1 = 0, \tag{3}$$

где новый потенциал $v_1(x) = v(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln z(x)$. Обратное к (2) преобраз вание дается формулой

$$y(x,\lambda) = \frac{W(z_1(x), y_1(x,\lambda))}{z_1(x)}, \qquad z_1(x) = z^{-1}(x). \tag{4}$$

Преобразования (2), (4), обычно называемые пробразованиями Кра ма-Крейна, играют важную роль при исследовании прямых и обратнь задач спектрального анализа для оператора Штурма-Лиувилля (1) (с например [3, 4, 5]). Интерес к ним возрос особо в последнее время связи с их приложением к уравнению Кортевега де Фриза (см. наприм [5]). Основной целью настоящей работы является построение оператор преобразования для произведений решений двух операторов Шредингеј на полуоси с одинаковым дискретным спектром, и на этой основе пок зать как трансформируются полученные в работе [6] формулы разлож ния. Основным результатом здесь являются доказанные в §3 теорем 3.1–3.4, где показано как исходя из формулы разложения, соответств ющей N собственным числам, можно просто поличить сооветствующу формулу для случаев $N \pm 1$ собственных чисел. Отметим, что эти р зультаты, вместе с полученными в [7], позволяют построить простой а горифм построения формул разложения по произведениям решений дв радиальных уравнений Шредингера в случае высших орбитальных моме тов $l = 1, 2, 3, \ldots$, который проще изложенного в [8] директного обобщен [6]. Сходные этой работе построения применялись на конечном интерва в [9]. Основное отличие случая полуоси от случаев конечного интерва или всей оси состоит, как известно [5], в том, что здесь следует применя дважды преобразования Крамма—Крейна для того, чтобы добавить и уничтожить собственное число, сохраняя обычный для задач рассеян класс суммируемых вместе с первым моментом потенциалов. Это приводить к некоторым усложнениям по сравнению с [6,9] при построении соответствующих трансформирующих формул, которые изложены в §§1, 2. В введении приведены необходимые для этой работы свойства операторов преобразования Крама — Крейна на полуоси, а также основные формулы разложения и связанные с ними соотношения биортогональности, полученные в [6], в удобной для наших целей форме.

Из теоремы 0.1 вытекает

Т е о р е м а 0.2 [6]. Рассмотрим две уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2}y^{(n)} + (\lambda - v^n(x))y^n = 0, \qquad a \leqq x \leqq b, \qquad n = 1, 2,$$

по которым построены уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2}y_1^{(n)} + (\lambda - v_1^{(n)}(x))y_1^{(n)} = 0, \qquad v_1^{(n)} = v^{(n)} - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln z^{(n)}, \tag{5}$$

где решения $z^{(n)}(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 0.1. Тогда справедливы тождества

$$W(Z(x), Y(x,\lambda)) = (\lambda_0 - \lambda)\frac{d}{dx}(Z(x)Y_1(x,\lambda)), \tag{6}$$

$$W(Z_1(x), Y_1(x,\lambda)) = (\lambda_0 - \lambda)^{-1}\frac{d}{dx}(Z_1(x)Y(x,\lambda)), \tag{7}$$

где обозначили

$$Y(x,\lambda) = y^{(1)}(x,\lambda)y^{(2)}(x,\lambda), \quad Z(x) = z^{(1)}(x)z^{(2)}(x),$$
$$Y_1(x,\lambda) = y_1^{(1)}(x,\lambda)y_1^{(2)}(x,\lambda), \quad Z_1(x) = z_1^{(1)}(x)z_1^{(2)}(x).$$

Доказательство. Имеем тождество [10]

$$W(Y(x,\lambda), Z(x,\mu)) = \frac{1}{\lambda - \mu}\frac{d}{dx}\prod_{n=1,2} W(y^{(n)}(x,\lambda), z^{(n)}(x,\mu)). \tag{8}$$

Из (2) и (4) следует, что

$$Z(x)Y_1(x,\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^{-2}\prod_{n=1,2} W(z^{(n)}(x), y^{(n)}(x,\lambda)),$$

$$Z_1(x)Y(x,\lambda) = \prod_{n=1,2} W(z_1^{(n)}(x), y_1^{(n)}(x,\lambda)).$$

Подставляя эти равенства в правую часть (8), при $\mu = \lambda_0$ получаем искомые формулы (6) и (7).

Б. Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{d^2}{dx^2}y + (k^2 - v(x))y = 0, \qquad 0 < x < \infty, \tag{9}$$

$$y(0,k) = 0, \tag{10}$$

где вещественный потенциал $v(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\|v\|_{X_1} \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^\infty (1+x)|v(x)|dx \; < \; \infty.$$

Необходимые для работы свойства решений краевой задачи (9), (10), которыми пользуемся в дальнейшем без ссылок, имеются, например, в [3, 4].

Обозначим через $\varphi(x,k)$ и $f(x,k)$ решения уравнения (9), для которых

$$\varphi(0,k) = 0, \qquad \varphi'(0,k) = 1, \tag{11}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x,k)\exp(-ikx) = 1, \qquad \operatorname{Im} k \geqq 0, \tag{12}$$

где штрихом обозначаем дифференцирование по x. Пусть

$$f(v;k) = f(0,k) = W(f(x,k),\varphi(x,k)) \tag{13}$$

функция Йоста краевой задачи (9), (10), а

$$\sigma(v) = \{k_j : \; f(v;k_j) = 0; \qquad k_j = i\tau_j, \qquad \tau_j > 0, \qquad j = 1,\dots,N\}$$

множество нулей функции $f(v;k)$ при $\operatorname{Im} k > 0$, квадраты которых $\lambda_j = (k_j)^2$, $j = 1,2,\dots,N$, определяют собственные числа. Будем предполагать, для краткости изложения, что $f(v;0) \neq 0$.

Пусть $\tau_0 > \max \tau_j$ и обозначим $\varphi(x) \doteq \varphi(x,k_0)$, $k_0 = i\tau_0$. Напомним, что $\varphi(x) \neq 0$, $0 < x < \infty$, и справедливы асимптотики

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x(1+o(1)), \qquad x \to 0, \\ \varphi(x) &= Ce^{\tau_0 x}(1+o(1)), \qquad x \to \infty, \end{aligned} \tag{14}$$

допускающие дифференцирование по x.

Здесь и всюду в дальнейшем через C и C_1 и т.д. будем обозначать различные постоянные, не зависящие от x и k.

Сделаем, следуя [3], преобразования

$$y_1(x,k) = \frac{W(\varphi(x),y(x,k))}{(k_0^2-k^2)\varphi(x)}, \qquad y_2(x,k) = \frac{W(h_1(x),y_1(x,k))}{h_1(x)}, \tag{15}$$

где

$$h_1(x) = \frac{I(\alpha;x)}{\varphi(x)}, \qquad I(\alpha;x) = 1 + \alpha\int\limits_0^x \varphi^2(s)ds, \qquad \alpha > 0. \tag{16}$$

Справедлива следующая

Т е о р е м а 0.3 [3]. **Функция**

$$y_2(x,k) = y(x,k) - \frac{\alpha\varphi(x)W(\varphi(x), y(x,k))}{(k_0^2 - k^2)I(\alpha;x)}, \tag{17}$$

которая получается суперпозицией преобразований (15), удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2}y_2 + (k^2 - v_2(x))y_2 = 0, \qquad 0 < x < \infty, \tag{18}$$

где потенциал

$$v_2(x) = v(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln I(\alpha;x) \ \in X_1.$$

При этом функция $\varphi_2(x) = h_1^{-1}(x)$ является собственной функцией граничной задачи (9),(10) и $\int\limits_2^\infty \varphi_2^2(x)dx = \alpha^{-1}$. Обратное к преобразованию (17) дается формулой

$$y(x,k) = y_2(x,k) + \frac{\alpha\varphi_2(x)W(\varphi_2(x), y_2(x,k))}{(k_0^2 - k^2)I_2(\alpha;k)}.$$

где

$$I_2(\alpha;x) = \alpha\int\limits_x^\infty \varphi(s)ds = I^{-1}(\alpha;x).$$

Тогда $y(x,k)$ удовлетворяет уравнению (9) с потенциалом

$$v(x) = v_2(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln I_2(\alpha;x)$$

и имеем

$$\varphi(x) = \varphi_2(x)I_2^{-1}(\alpha;x).$$

З а м е ч а н и е 1. Решения $\varphi(x,k)$ и $f(x,k)$ связаны с решениями $\varphi_2(x,k)$ и $f_2(x,k)$ формулами

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x,k) &= \varphi(x,k) - \frac{\alpha\varphi(x)W(\varphi(x), \varphi(x,k))}{(k_0^2 - k^2)I(\alpha;x)},\\
f_2(x,k) &= \frac{k-k_0}{k+k_0}\left\{f(x,k) - \frac{\alpha\varphi(x)W(\varphi(x), f(x,k))}{(k_0^2 - k^2)I(\alpha;x)}\right\}.
\end{aligned}$$

и, следовательно, функция Йоста

$$f_2(k) = \left(\frac{k-k_0}{k+k_0}\right)f(k).$$

З а м е ч а н и е 2. Функция $y_1(x,k)$ (см. (15)) удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2}y_1 + (k^2 - v_1(x))y_1 = 0, \qquad v_1 = v - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln\varphi(x),$$

где при $a > 0$

$$\int_0^a |v_1(x) - \frac{2}{x^2}|dx + \int_a^\infty x|v_1(x)|dx < \infty.$$

B. Рассмотрим две краевые задачи вида (9), (10)

$$(19) \qquad \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}y^{(n)} + (k^2 - v^{(n)}(x))y^{(n)} &= 0, \ 0 < x < \infty, \\ y^{(n)}(0,k) &= 0, \qquad n = 1,2; \end{aligned}$$

для которых дискретные спектры совпадают, т. е.

$$v^{(n)} \in \Omega(N) \stackrel{\text{def}}{=} \{v^{(n)} \in X_1, \qquad n = 1,2 :$$

$$\sigma(v^{(1)}) = \sigma(v^{(2)})\}, \qquad \sigma(v^{(n)}) = \{k_j, \ j = 1,2,\dots,N\}, \ n = 1,2.$$

Положим

$$\Phi(x,k) = \varphi^{(1)}(x,k)\varphi^{(2)}(x,k), \ F(x,k) = f^{(1)}(x,k)f^{(2)}(x,k),$$

где $\varphi^{(n)}(x,k)$ и $f^{(n)}(x,k)$ — решения уравнений (19), удовлетворяющих условиям (11), (12), и пусть

$$F(k) = f^{(1)}(k)f^{(2)}(k)$$

произведение функций Йоста. Введем, следуя [6], системы функций

$$(20) \quad \{\Phi\} \ : \ \Phi(x,k), \ k \in (0,\infty) \cup \sigma; \ \dot\Phi(x,k_j) = \frac{\partial}{\partial k}\Phi(x,k)|_{k=k_j}, \ k_j \in \sigma,$$

$$\{F\} \ : \ F(x,k), \ k \in (0,\infty) \cup \sigma; \ \dot F(x,k) = \frac{\partial}{\partial k}F(x,k)|_{k=k_j}, \ k_j \in \sigma,$$

где точкой обозначаем дифференцирование по k, а $\sigma = \sigma(v^{(1)}) = \sigma(v^{(2)})$.

Построим систему функций $\{\tilde F\}$ следующим образом:

$$(21) \qquad \tilde F(x,k) = -\frac{4}{\pi}k \ \mathrm{Im}\left\{\frac{F(x,k)}{F(k)}\right\}, \ k \in (0,\infty),$$

а каждому $k_j \in \sigma$ сопоставим пару функций

$$(22) \qquad \tilde F_{j,1}(x) = b_j(\dot F(x,k_j) + d_jF(x,k_j)); \ \tilde F_{j,2}(x) = b_jF(x,k_j),$$

где

$$b_j = 8k_j\ddot F^{-1}(k_j), \qquad d_j = \frac{1}{k_j} - \frac{\dddot F(k_j)}{3\ddot F(k_j)}.$$

Отметим, что

$$\tilde{F}(x,k) = -\frac{2}{\pi}\frac{k^2}{|F(k)|^2}\sum_{n=1,2}\varphi^{(n)}(x,k)\theta^{(3-n)}(x,k),$$

где

$$\theta^{(n)}(x,k) = f^{(n)}(x,k)f^{(n)}(-k) + f^{(n)}(x,-k)f^{(n)}(k)$$

и следовательно

$$\tilde{F}(0,k) = 0,\ \tilde{F}'(0,k) = -\frac{4}{\pi}\left\{\frac{k^2}{|f^{(1)}(k)|^2} + \frac{k^2}{|f^{(2)}(k)|^2}\right\}.$$

Справедлива следующая

Теорема 0.4 [6]. Пусть заданы две краевые задачи (19), где $v^{(n)} \in \Omega(N)$, $n = 1,2$, и по ним построены указанным выше способом системы $\{\Phi\}$ и $\{\tilde{F}\}$. Тогда для любой абсолютно непрерывной функции $h(x) \in X_1$ справедливы формулы разложения

$$\begin{aligned}(23)\qquad h(x) &= -\int_0^\infty \tilde{F}(x,k)(h,\Phi'(k))dk \\ &\quad -\sum_{j=1}^{N}\{\tilde{F}_{j,1}(x)(h,\Phi'(k_j)) + \tilde{F}_{j,2}(x)(h,\dot{\Phi}'(k_j))\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(24)\qquad h(x) &= -\int_0^\infty \Phi'(x,k)(h,\tilde{F}(k))dk \\ &\quad -\sum_{j=1}^{N}\{\Phi'(x,k_j)(h,\tilde{F}_{j,2}) + \dot{\Phi}'(x,k_j)(h,\tilde{F}_{j,1})\},\end{aligned}$$

где коэффициенты разложения

$$\begin{aligned}(h,\Phi'(k)) &= \int_0^\infty h(x)\Phi'(x,k)dx, \qquad k \in (0,\infty)\cup\sigma, \\ (h,\tilde{F}(k)) &= \int_0^\infty h(x)\tilde{F}(x,k)dx, \qquad k \in (0,\infty), \\ (h,\dot{\Phi}'(k_j)) &= \int_0^\infty h(x)\dot{\Phi}'(x,k_j)dx, \qquad k_j \in \sigma,\end{aligned}$$

$$(h,\tilde F_{j,1}) = \int\limits_0^\infty h(x)\tilde F_{j,1}(x)dx, \qquad j=1,\dots,N,$$

$$(h,\tilde F_{j,2}) = \int\limits_0^\infty h(x)\tilde F_{j,2}(x)dx, \qquad j=1,\dots,N,$$

являются абсолютно сходящимися интегралами.

Важное место в наших построениях играет

Т е о р е м а 0.5 [6]. Система $\{\Phi\}$ биортогональна системе $\{\tilde F\}$ относительно кососкалярного произведения

$$[f,g]=(f,g')=\int\limits_0^\infty f(x)\frac{d}{dx}g(x)dx;$$

точнее, справедливы соотношения

$$[\tilde F(k),\Phi(k_j)]=[\tilde F(k),\dot\Phi(k_j)]=0, \qquad k\in(0,\infty), \quad k_j\in\sigma,$$

$$[F(k_j),\Phi(k)]=[\dot F(k_j),\Phi(k)]=0, \qquad k\in(0,\infty), \quad k_j\in\sigma,$$

$$[\tilde F_{j,1},\Phi(k_l)]=-[\Phi(k_l),\tilde F_{j,1}]=-\delta_{j,l}, \quad j,l=1,\dots,N,$$

$$[\tilde F_{j,2},\dot\Phi(k_l)]=-[\dot\Phi(k_l),\tilde F_{j,2}]=-\delta_{j,l}, \quad j,l=1,\dots,N,$$

$$[\tilde F_{j,1},\dot\Phi(k_l)]=[\dot\Phi(k_l),\tilde F_{j,1}]=0, \qquad j,l=1,\dots,N,$$

$$[\tilde F_{j,2},\dot\Phi(k_l)]=[\dot\Phi(k_l),\tilde F_{j,2}]=0, \qquad j,l=1,\dots,N,$$

Для краткости изложения мы всюду предполагаем, что функции f, h и т.д. являются достаточно гладкими для того, чтобы соответствующие интегралы являлись абсолютно сходящимися, и везде, где нужно, можно поменять порядок интегрирования, что будем подразумевать всюду в дальнейшем.

§1. ОПЕРАТОРЫ A, $\tilde A$.

Рассмотрим, наряду с (19), краевые задачи

$$\frac{d^2}{dx^2}y_2^{(n)}+(k^2-v_2^{(n)}(x))y_2^{(n)}=0,\ 0<x<\infty, \tag{25}$$

$$y_2^{(n)}(0,k)=0, \qquad n=1,2,$$

которые, как в теореме 0.3, получаются из (19) после двойного преобразования Крама—Крайна и для которых

$$v_2^{(n)}(x) = v^{(n)}(x)-2\frac{d^2}{dx^2}\ln I^{(n)}(\alpha_n;x)\in\Omega(N+1), \tag{26}$$

$$I^{(n)}(\alpha_n;x) = 1+\alpha_n\int\limits_0^x\varphi^{(n)}(s)ds, \varphi^{(n)}(x)=\varphi^{(n)}(x,k_0).$$

Отметим, что

$$\sigma(v_2^{(n)}) = \sigma(v^{(n)}) \cup \{k_0\}; \qquad \int_0^\infty (\varphi_2^{(n)}(x))^2 dx = \alpha_n^{-1}.$$

Обозначим

$$(27) \quad Z_1(x) = \Phi^{-1}(x, k_0),$$

$$(28) \quad Z_2(x) = (h_1^{(1)}(x) h_1^{(2)}(x))^{-1} = \Phi(x, k_0)(I^{(1)}(\alpha_1; x)(I^{(2)}(\alpha_2; x))^{-1}.$$

Справедливы асимптотики

$$(29) \quad Z_1(x) = x^{-2}(1 + o(1)),\ x \to 0;\ Z_1(x) = C_1 e^{-2\tau_0 x}(1 + o(1)),\ x \to \infty,$$

$$(30) \quad Z_2(x) = x^2(1 + o(1)),\ x \to 0;\ Z_2(x) = C_2 e^{-2\tau_0 x}(1 + o(1)),\ x \to \infty,$$

которые допускают дифференцирование по x.

Рассмотрим в пространствах $L_1 = L_1(0, \infty)$, $L_\infty = L_\infty(0, \infty)$ операторы

$$A_1 f = f(x) + 2Z_1^{-1}(x) \int_x^\infty Z_1'(s) f(s) ds,$$

$$A_2^{(\infty)} f = f(x) + 2Z_2^{-1}(x) \int_x^\infty Z_2'(s) f(s) ds,$$

$$A_2^{(0)} f = f(x) - 2Z_2^{-1}(x) \int_0^x Z_2'(s) f(s) ds.$$

Очевидна следующая

Л е м м а 1.1. Условие

$$(31) \qquad (f, Z_2') = 0$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы

$$(32) \qquad A_2^{(\infty)} = A_2^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} A_2.$$

Обозначим через

$$L_{1(\infty)}(Z_2') = \{f \in L_1(L_\infty) : (f, Z_2') = 0\}$$

подпространство функций $f \in L_{1(\infty)}$, удовлетворяющих условию (31). С помощью оценок (29), (30) устанавливается следующая

Л е м м а 1.2. Операторы

$$A_1 \in \mathcal{L}(L_1, L_1), (\mathcal{L}(L_\infty, L_\infty)),$$

$$A_2 \in \mathcal{L}(L_1(Z_2'), L_1), (\mathcal{L}(L_\infty(Z_2'), L_\infty))$$

и, следовательно, оператор

$$A = A_1 A_2 \in \mathcal{L}(L_1(Z_2'), L_1), (\mathcal{L}(L_\infty Z_2'), L_\infty)),$$

где, как обычно, $\mathcal{L}(X, Y)$ — пространство ограниченных операторов, оп ределенных в X со значениями в Y. Далее введем операторы

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_1 f &= f(x) - 2(Z_1^{-1}(x))' \int_x^\infty Z_1(s) f(s) ds \\
\tilde{A}_2^{(\infty)} f &= f(x) - 2(Z_2^{-1}(x))' \int_x^\infty Z_2(s) f(s) ds \\
\tilde{A}_2^0 f &= f(x) + 2(Z_2^{-1}(x))' \int_0^x Z_2(s) f(s) ds
\end{aligned}$$

Отметим, что если $f'(x) \in L_1(L_\infty)$, то

$$DA_1 f = \tilde{A}_1 Df, \; DA_2^{(0)(\infty)} f = \tilde{A}_2^{(0)(\infty)} Df, \; D = \frac{d}{dx}. \tag{33}$$

Для операторов $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2^{(\infty)}$ и $\tilde{A}_2^{(0)}$ справедлива

Л е м м а 1.3. Пусть

$$L_{1(\infty)}(Z_2) = \{f \in L_{1(\infty)}: \quad (f, Z_2) = 0\}.$$

Тогда условие $f \in L_{1(\infty)}(Z_2)$ является ноебходимым и достаточным дл того, чтобы

$$\tilde{A}_2^{(0)} = \tilde{A}_2^{(\infty)} = \tilde{A}_2 \in \mathcal{L}(L_1(Z_2), L_1), (\mathcal{L}(L_\infty(Z_2), L_\infty)). \tag{34}$$

При этом оператор

$$\tilde{A} = \tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \in \mathcal{L}(L_1(Z_2), L_1), (\mathcal{L}(L_\infty(Z_2), L_\infty)),$$

где

$$\tilde{A}_1 \in \mathcal{L}(L_1, L_2), (\mathcal{L}(L_\infty, L_\infty)).$$

З а м е ч а н и е 1. Очевидно,

$$A_2 Z_2 = \tilde{A}_2 Z_2' = 0, \tag{35}$$

$$AZ_2(x) = 0, \qquad \tilde{A} Z_2'(x) = 0,$$

т.е. $Z_2(x)$ и $Z_2'(x)$ являются функциями из ядер операторов A и $\tilde{A}$ соотве ственно. Лемма 1.1 показывает, что требование ортогональности функц

$f(x)$ функцией $Z_2'(x)$ из ядра операторов $\tilde{A}$, т.е. $f \in L_{1(\infty)}(Z_2')$, обеспечивает ограниченность оператора A в $L_{1(\infty)}(Z_2')$, а лемма 1.2 показывает, что условие $f \in L_{1(\infty)}(Z_2)$ дает ограниченность оператора $\tilde{A}$ в $L_{1(\infty)}(Z_2)$.

Замечание 2. Обозначим через $P(Z_2')$ оператор проектирования из $L_{1(\infty)}$ в $L_{1(\infty)}(Z_2')$:

$$P(Z_2')f = g, \qquad f \in L_{1(\infty)}, \qquad g \in L_{1(\infty)}(Z_2').$$

Из соотношения биортогональности (см. теорему 0.5) следует

$$f(x) = g(x) - \tilde{F}_{1,1}^{(2)}(x)(f, Z_2'), \qquad \forall f \in L_{1(\infty)},\ g \in L_{1(\infty)}(Z_2'),$$

$$f(x) = g(x) + \dot{\Phi}_2(x, k_0)(f, \tilde{F}_{1,2}^{(2)}), \qquad \forall f \in L_{1(\infty)},\ g \in L_{1(\infty)}(Z_2'). \tag{36}$$

Аналогично, если $P(Z_2)$ — проектирование в $L_{1(\infty)}(Z_2)$:

$$P(Z_2)f = g, \qquad \forall f \in L_{1(\infty)}, \qquad g \in L_{1(\infty)}(Z_2),$$

то имеем

$$f(x) = g(x) + \tilde{F}_{1,1}^{(2)}(x)(f, Z_2), \qquad \forall f \in L_{1(\infty)},\ g \in L_{1(\infty)}(Z_2),$$

$$f(x) = g(x) - \dot{\Phi}_2'(x, k_0)(f, \tilde{F}_{1,2}^{(2)}), \qquad \forall f \in L_\infty,\ g \in L_\infty(Z_2). \tag{37}$$

Здесь функции $\dot{\Phi}_2(x, k_0)$, $\tilde{F}_{1,1}^{(2)}(x)$, $\tilde{F}_{1,2}^{(2)}(x)$ связаны с граничными задачами (25) и определяются как в (20), (22). Операторы $P(Z_2)$ и $P(Z_2')$ являются операторами косоортогонального проектирования и могут быть неограниченными. Отметим, что так как $\dot{\Phi}_2(x, k_0) \in L_\infty$, а $\dot{\Phi}_2'(x, k_0) \in L_\infty \cap L_1$, то формула (36) иммет место лишь для $f \in L_\infty$, а формула (37) остается справедливой и для $f \in L_1$.

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 1.1. Пусть функции $\Phi(x, k)$, $\dot{\Phi}(x, k_j)$, $\tilde{F}(x, k)$ и $\tilde{F}_{j,m}(x)$ построены по формулам (20), (21) и (22), а функции $\Phi_2(x, k)$, $\dot{\Phi}_2(x, k_j)$, $\tilde{F}_2(x, k)$ и $\tilde{F}_{j,m}^{(2)}(x)$ по тем же формулам для уравнений (25), где $v_2^{(n)}(x)$ определяются из (26). Тогда

$$\Phi(x, k) = A\Phi_2(x, k), \qquad \Phi'(x, k) = \tilde{A}\Phi_2'(x, k),\ k \in (0, \infty) \cup \sigma, \tag{38}$$

$$\tilde{F}(x, k) = A\tilde{F}_2(x, k), \tilde{F}'(x, k) = \tilde{A}F_2'(x, k),\ k \in (0, \infty) \cup \sigma, \tag{39}$$

$$F(x, k) = \left(\frac{k_0 + k}{k_0 - k}\right)^2 A_1 A_2^{(\infty)} F_2(x, k), \tag{40}$$

$$F'(x, k) = \left(\frac{k_0 + k}{k_0 - k}\right)^2 \tilde{A}_1 \tilde{A}_2^{(\infty)} F_2'(x, k). \tag{41}$$

При этом для $k_j \in \sigma$

$$\tilde{F}_{j,2}(x) = A\tilde{F}^{(2)}_{j,2}(x), \tag{42}$$

$$\tilde{F}'_{j,2}(x) = \tilde{A}\tilde{F}^{(2)'}_{j,2}(x), \tag{43}$$

$$\tilde{F}_{j,1}(x) = A\tilde{F}^{(2)}_{j,1}(x), \tag{44}$$

$$\tilde{F}'_{j,1}(x) = \tilde{A}\tilde{F}^{(2)'}_{j,1}(x), \tag{45}$$

$$\dot{\Phi}(x,k_j) = A\dot{\Phi}_2(x,k_j), \ \dot{\Phi}'(x,k_j) = \tilde{A}\dot{\Phi}'_2(x,k_j), \tag{46}$$

где функции $\tilde{F}_{j,1}(x)$, $\tilde{F}_{j,2}(x)$, $\tilde{F}^{(2)}_{j,1}(x)$, $\tilde{F}^{(2)}_{j,2}(x)$ даются формулами (22) соответственно для краевых задач (19) и (25).

Доказательство. В силу теоремы 0.1 обратные преобразованиям (15) являются преобразования

$$\varphi^{(n)}(x,k) = \frac{W(z_1^{(n)}(x), \varphi_1^{(n)}(x,k))}{z_1^{(n)}(x)}, \qquad z_1^{(n)}(x) = (\varphi^{(n)}(x))^{-1}, \tag{47}$$

$$\varphi_1^{(n)}(x,k) = \frac{W(z_2^{(n)}(x), \varphi_2^{(n)}(x,k))}{(k_0^2-k^2)z_2^{(n)}(x)}, \qquad z_2^{(n)}(x) = (h_1^{(n)}(x))^{-1}. \tag{48}$$

Отсюда, в силу теоремы 0.2, получаем тождества

$$W(Z_1(x), \Phi_1(x,k)) = (k_0^2-k^2)^{-1}\frac{d}{dx}(Z_1(x)\Phi(x,k)), \tag{49}$$

$$W(Z_2(x), \Phi_2(x,k)) = (k_0^2-k^2)\frac{d}{dx}(Z_2(x)\Phi_1(x,k)), \tag{50}$$

где функции $Z_1(x), Z_2(x)$ определяются формулами (27), (28), а

$$\Phi_1(x,k) = \varphi_1^{(1)}(x,k)\varphi_1^{(2)}(x,k),$$

где $\varphi_1^{(n)}(x,k)$ — решение уравнения (5). Интегрируя (49) и (50) от x до ∞ с учетом асимптотик (29), (30), получаем

$$\Phi(x,k) = (k_0^2-k^2)A_1\Phi_1(x,k), \qquad k \in (0,\infty)\cup\sigma,$$

$$\Phi_1(x,k) = (k_0^2-k^2)^{-1}A_2^{(\infty)}\Phi_2(x,k), \qquad k \in (0,\infty)\cup\sigma.$$

Следовательно,

$$\Phi(x,k) = A_1A_2^{(\infty)}\Phi_2(x,k), \qquad k \in (0,\infty)\cup\sigma, \tag{51}$$

что, с учетом равенств $(Z'_2, \Phi_2(k)) = 0$ и $(Z'_2, \Phi_2(k_j)) = 0$, дает первую из формул в (38). Вторая вытекает отсюда вследствии равенств (33). Равенства (44) получаются из (51) дифференцированием по k, принимая во внимание, что это равенство имеет место при $\operatorname{Im} k < \tau_0$ и далее, учитывая соотношения $(Z_2, \dot\Phi_2(k_j)) = 0$. Заметим, что из (14) следует, что аналоги формул (47),(48) для решений Йоста являются преобразования

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x,k) &= \frac{i\, W(z_1^{(n)}(x), f_1^{(n)}(x,k))}{W(k_0-k) z_1^{(n)}(x)},\\
f_1^{(n)}(x,k) &= \frac{i\, W(z_2^{(n)}(x), f_2^{(n)}(x,k))}{W(k_0-k) z_2^{(n)}(x)},
\end{aligned}
$$

и, следовательно,

$$
\begin{aligned}
W(Z_1(x), F_1(x,k)) &= \left(\frac{k-k_0}{k+k_0}\right) \frac{d}{dx}(Z_1(x)F(x,k)),\\
W(Z_2(x), F_2(x,k)) &= \left(\frac{k-k_0}{k+k_0}\right) \frac{d}{dx}(Z_1(x)F_1(x,k)),
\end{aligned}
$$

где $F_1(x,k) = f_1^{(1)}(x,k) f_1^{(2)}(x,k)$. Отсюда формула (40) выводится по изложенной выше схеме доказательства формулы (51). Формула (41) следует непосредственно из равенств (33). Представления (39) следуют из (40), (41) в силу равенства

$$
F_2(k) = \left(\frac{k-k_0}{k+k_0}\right)^2 F(k) \tag{52}
$$

и соотношения биортогональности $((Z_2', \tilde F_2(k)) = (Z_2, \tilde F_2'(k)) = 0)$. Равенства (45) и (46) получаются дифференцированием по k равенства (40), (41) и учитывая, что при $k_j \in \sigma$ справедливы соотношения биортогональности $(Z_2, F_2'(k_j) = (Z_2, \dot F_2'(k_j)) = 0$. Из (52) следует, что

$$
b_j^{(2)} = \left(\frac{k_j+k_0}{k_j-k_0}\right)^2 b_j, \qquad d_j^{(2)} = d_j + \frac{4k_0}{k_0^2 - k_j^2}.
$$

Отсюда, в силу

$$
\begin{aligned}
F(x,k_j) &= \left(\frac{k_0+k_j}{k_0-k_j}\right)^2 AF_2(x,k_j), &(53)\\
\dot F(x,k_j) &= 4k_0 \frac{k_0+k_j}{(k_0-k_j)^3} AF_2(x,k_j) + \left(\frac{k_0+k_j}{k_0-k_j}\right)^2 A\dot F_2(x,k_j), &(54)
\end{aligned}
$$

получаем (42)–(45). Теорема доказана.

§2 . ОПЕРАТОРИ $B^{(a)}$, $\tilde{B}^{(a)}$.

В этом параграфе мы построим операторы, обратные преобразованиям из теоремы 1.1. В основе наших построений важную роль играет следующая

Л е м м а 2.1. Эсли функция $Z(x) \neq 0$, то общее решение уравнения

$$h(x) - 2Z^{-1}(x)\int_a^x Z'(s)h(s)ds = f(x) \tag{55}$$

дается формулой

$$h(x) = CZ(x) + f(x) - 2Z(x)\int_b^x (Z^{-1}(s))'f(s)ds, \tag{56}$$

а общее решение уравнения

$$h(x) + 2Z'(x)\int_a^x (Z^{-1}(s))h(s)ds = f(x) \tag{57}$$

дается формулой

$$h(x) = C(Z^{-1}(x))' + f(x) + 2(Z^{-1}(x))'\int_b^x Z(s)f(s)ds, \tag{58}$$

где C, a, b — произвольные постоянные.

Доказательство. Напомним, что для общего решения уравнения

$$y' + f(x)y = g(x).$$

имеем формулу

$$y(x) = \exp(-F(x))\left[\eta + \int_\xi^x g(s)\exp(F(s))ds\right], \tag{59}$$

где $F(x) = \int_\xi^x f(s)ds$; η, ξ — произвольные постоянные. Положим $y(x) = \int_a^x Z'(s)h(s)ds$. Уравнение (55) принимает вид

$$y' + (-2Z'(x)Z^{-1}(x))y = Z'(x)f(x). \tag{60}$$

Отсюда, в силу (59), получаем

$$y(x) = CZ^2(x) - Z^2(x)\int\limits_b^x (Z^{-1}(s))' f(s)ds,$$

что вместе с равенством $y' = Z'h$ дает (56). Аналогичным образом устанавливается и формула (59). Лемма доказана.

Введем теперь в пространство $L_{1(\infty)}$ операторы

$$\begin{aligned} B_1 h &= h(x) - 2Z_1(x)\int\limits_0^x (Z_1^{-1}(s))' h(s)ds, \\ B_2^{(a)} h &= h(x) - 2Z_2(x)\int\limits_a^x (Z_2^{-1}(s))' h(s)ds, \end{aligned} \tag{61}$$

где

$$Z_2(x) = \Phi_2(x, k_0), \qquad Z_1(x) = \alpha_1\alpha_2\Phi_2^{-1}(x, k_0) I_2^{(1)}(x) I_2^{(2)}(x). \tag{62}$$

Нам понадобятся еще операторы

$$\begin{aligned} \tilde{B}_1 h &= h(x) + 2Z_1'(x)\int\limits_0^x Z_1^{-1}(s) h(s)ds, \\ \tilde{B}_2^{(a)} h &= h(x) + 2Z_2'(x)\int\limits_a^x Z_2^{-1}(s) h(s)ds, \end{aligned} \tag{63}$$

которые связаны с B_1 и $B_2^{(a)}$ при $h' \in L_{1(\infty)}$ равенствами

$$DB_1 h = \tilde{B}_1 Dh, \qquad DB_2^{(a)} h = \tilde{B}_2^{(a)} Dh.$$

Л е м м а 2.1. При любом $a > 0$ операторы

$$B_1, \tilde{B}_1, B_2^{(a)}, \tilde{B}_2^{(a)} \in \mathcal{L}(L_1, L_1), (\mathcal{L}(L_\infty, L_\infty)) \tag{64}$$

и, если обозначим

$$\left\{ \begin{aligned} Z_{2,(0,a)}(x) &= \begin{cases} 2Z_2^{-2}(a) Z_2(x), & 0 \leqq x < a \\ 0, & a \leqq x < \infty \end{cases} \\ Z'_{2,(0,a)}(x) &= \begin{cases} 2Z_2^{-2}(a) Z_2'(x), & 0 \leqq x < a \\ 0, & a \leqq x < \infty, \end{cases} \end{aligned} \right. \tag{65}$$

$$(66)\qquad \begin{cases} Z'_{2,(a,\infty)}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqq x < a \\ -2Z_2^{-2}(a)Z_2(x), & a \leqq x < \infty, \end{cases} \\ Z'_{2,(a,\infty)}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqq x < a \\ -2Z_2^{-2}(a)Z'_2(x), & a \leqq x < \infty, \end{cases} \end{cases}$$

то для любой $h \in L_{1(\infty)}$ имеем

$$(67)\qquad (B_2^{(a)}h, Z'_{2,(0,a)}) = (B_2^{(a)}h, Z'_{2,(a,\infty)}) = 0,$$

$$(68)\qquad (\tilde{B}_2^{(a)}h, Z'_{2,(0,a)}) = (\tilde{B}_2^{(a)}h, Z_{2,(a,\infty)}) = 0$$

и, следовательно,

$$(69)\qquad (B_2^{(a)}h, Z'_2) = (\tilde{B}_2^{(a)}h, Z_2) = 0.$$

Доказательство. Соотношения (64) следуют стандартным образом из оценок (29), (30) и равенств (62). Равенства (67) и (68) проверяются, непосредственно исходя из определения операторов $B_2^{(a)}$, $\tilde{B}_2^{(a)}$. Действительно, обозначив $C_a = 2Z_2^{-2}(a)$, из (63) имеем

$$C_a \int_a^\infty h(x)Z_2(x)dx + 2C_a \int_a^\infty Z_2(x)Z'_2(x)\Big(\int_a^x Z_2^{-1}(s)h(s)ds\Big)dx$$

$$= C_a Z_2^2(x) \int_a^x Z_2^{-1}(s)h(s)ds\Bigg|_{x=a}^{x=\infty} = 0.$$

Лемма доказана.

Л е м м а 2.2. *Для любых $f \in L_{1(\infty)}$, $g \in L_{1(\infty)}$ имеем*

$$(A_1 f, h) = (f, \tilde{B}_1 h), \qquad (\tilde{A}_1 f, h) = (f, B_1 h),$$

а для операторов A_2 и $\tilde{A}_2$:

$$\begin{aligned} (B_2^{(a)}h, f) &= (h, \tilde{A}_2 f), \qquad h \in L_1,\ f \in L_1(Z_2), \\ (\tilde{B}_2^{(a)}h, f) &= (h, A_2 f), \qquad h \in L_1,\ f \in L_1(Z'_2). \end{aligned}$$

Доказательство. Первое равенство получается непосредственно из определения операторов A_1, $\tilde{A}_1$, B_1, $\tilde{B}_1$ с учетом их ограниченности. Далее имеем

$$\int_0^\infty Z'_2(x)\left(\int_a^x Z_2^{-1}(s)h(s)ds\right) f(x)dx$$

$$= \left(\int_0^a + \int_a^\infty\right) \left(Z_2'(x) \left(\int_a^x Z_2^{-1}(s)h(s)ds\right) f(x)dx\right)$$

$$= \int_0^a h(x)Z_2^{-1}(x) \left(\int_0^x Z_2'(s)f(s)ds\right) dx + \int_a^\infty h(x)Z_2^{-1}(x) \left(\int_x^\infty Z_2'(s)f(s)ds\right) dx,$$

что, вместе с условием $(f, Z_2') = 0$, дает второе равенство. Аналогичным образом доказывается и третье. Лемма доказана.

С л е д с т в и е. Введем операторы

$$B^{(a)} = B_2^{(a)} B_1, \qquad \tilde{B}^{(a)} = \tilde{B}_2^{(a)} B_1. \tag{70}$$

Справедливы равенства

$$(B^{(a)}, h, f) = (h, \tilde{A}f), \ h \in L_1, \ f \in L_1(Z_2), \tag{71}$$

$$(\tilde{B}^{(a)}, h, f) = (h, Af), \ h \in L_1, \ f \in L_1(Z_2'), \tag{72}$$

т.е. на подпространствах $L_{1(\infty)}(Z_2)$ и $L_{1(\infty)}(Z_2')$ сопряжены операторы

$$B^{(a)*} = \tilde{A}; \qquad \tilde{B}^{(a)*} = A. \tag{73}$$

З а м е ч а н и е 1. Положим в (71) $f = Z_2'$. Тогда из (35) и (69) получаем, что

$$(B^{(a)}h, Z_2') = (h, \tilde{A}Z_2') = 0, \tag{74}$$

т.е. нулевое подпространство оператора $\tilde{A}$, которое определяется элементом Z_2' ортогонально области значения оператора $B^{(a)}$, что, с учетом (73), является известным фактом.

З а м е ч а н и е 2. На всем пространстве L_1 оператор

$$B_2^{(a)*} f = f(x) + \begin{cases} 2(Z_2^{-1}(x))' \int_0^x Z_2(s)f(s)ds \ , & 0 < x < a \\ -2(Z_2^{-1}(x))' \int_x^\infty Z_2(s)f(s)ds \ , & a < x < \infty. \end{cases}$$

Из (65) и (66) имеем

$$B_2^{(a)*} Z'_{2,(0,a)}(x) = B_2^{(a)*} Z'_{2,(a,\infty)}(x) = 0,$$

как и должно быть в силу (67).

Основным утверждением в этом параграфе является

Т е о р е м а 2.1. Общее решение уравнения

$$Ag = h, \qquad h \in L_{1(\infty)}, \tag{75}$$

в подпространстве $L_1(Z_2'),(L_\infty(Z_2'))$ дается формулой

$$g(x) = C_a(g)Z_2(x) + B^{(a)}h, \tag{76}$$

где

$$C_a(g) = (g, Z'_{2,(0,a)}) = (g, Z'_{2,(a,\infty)}), \tag{77}$$

а общее решение уравнения

$$\tilde{A}g = h, \qquad h \in L_{1(\infty)}$$

в подпространстве $L_1(Z_2)(L_\infty(Z_2))$ дается формулой

$$g(x) = \tilde{C}_a(g)Z_2'(x) + \tilde{B}^{(a)}h,$$

где

$$\tilde{C}_a(g) = (g, Z_{2,(0,a)}) = (g, Z_{2,(a,\infty)}).$$

При этом

$$AB^{(a)}h = h \ , \tilde{A}\tilde{B}^{(a)}h = h \ , h \in L_{1(\infty)}. \tag{78}$$

Доказательство. Обозначим

$$A_2 g = g_1. \tag{79}$$

Тогда уравнение (75) принимает следующий вид:

$$A_1 g_1 = h. \tag{80}$$

Положим в (55) $a = \infty$, $Z = Z_1$, $h = g_1$, $f = h$. Тогда, в силу определения (60) оператора B_1, получаем из (56), что общее решение уравнения (79) дается формулой

$$g_1(x) = C_1 Z_1(x) + B_1 h.$$

Так как решение g ищем в пространстве $L_{1(\infty)}(Z_2')$, а $A_2 \in \mathcal{L}(L_{1(\infty)}(Z_2');$ $L_{1(\infty)})$, то из (79) имеем $g_1 \in L_{1(\infty)}$. Отсюда, учитывая, что $B_1 h \in L_{1(\infty)}$ при $h \in L_{1(\infty)}$, а $Z_1 \notin L_{1(\infty)}$, получаем $C_1 = 0$, т.е. единственное решение уравнения (80) дается формулой

$$g_1(x) = b_1 h. \tag{81}$$

Положим теперь в (55) $a = \infty$, $Z = Z_2$, $h = g$, $f = g_1$. Тогда из определения (61) оператора $B_2^{(a)}$ получаем, в силу формулы (56), что общим решением уравнения (79), где g_1 определено в (81), является функция

$$g(x) = CZ_2(x) + B^{(a)}h.$$

Выражения (77) для C получаем с учетом (67), умножив скалярно обе стороны на $Z'_{2,(0,a)}(x)$, $Z'_{2,(a,\infty)}$, так как $(Z_2, Z'_{2,(0,a)}) = 1$, $(Z_2, Z'_{2,(a,\infty)}) = 1$. Аналогичным образом решается уравнение $\tilde{A}g = h$ в подпространстве $L_{1(\infty)}(Z_2)$. Теорема доказана.

Применяя эту теорему к формулам, полученным в теореме 1.1, получаем обратные преобразования. Точнее, справедлива

Т е о р е м а 2.2. Пусть системы $\{\Phi\}$, $\{\tilde{F}\}$ и $\{\Phi_2\}$, $\{\tilde{F}_2\}$ построены, как в теореме 1.1, по уравнениям (19) и (25), где потенциалы $v_2^{(n)}(x)$ определяются равенствами (26). Тогда имеем

$$\begin{aligned}
\Phi_2(x,k) &= B^{(a)}\Phi(x,k) + C_a(\Phi_2(k))Z_2(x), \ k \in (0,\infty)\cup\sigma,\\
\dot{\Phi}_2(x,k_j) &= B^{(a)}\Phi(x,k_j) + C_a(\dot{\Phi}_2(k_j))Z_2(x), \ k_j \in \sigma,\\
\tilde{F}_2(x,k) &= B^{(a)}F(x,k) + C_a(\tilde{F}_2(k))Z_2(x), \ k \in (0,\infty),\\
\tilde{F}^{(2)}_{j,m}(x) &= B^{(a)}\tilde{F}_{j,m}(x) + C_a(\tilde{F}^{(2)}_{j,m})Z_2(x), \ k_j \in \sigma, \ m = 1,2,\\
\Phi'_2(x,k) &= \tilde{B}^{(a)}\Phi'(x,k) + \tilde{C}_a(\Phi'_2(k))Z'_2(x), \ k \in (0,\infty)\cup\sigma,\\
\dot{\Phi}'_2(x,k_j) &= \tilde{B}^{(a)}\dot{\Phi}'(x,k_j) + \tilde{C}_a(\dot{\Phi}'_2(k_j))Z'_2(x), \ k_j \in \sigma,\\
\tilde{F}'_2(x,k) &= \tilde{B}^{(a)}\tilde{F}'(x,k) + \tilde{C}_a(\tilde{F}'_2(k))Z'_2(x), \ k \in (0,\infty),\\
\tilde{F}^{(2)\prime}_{j,m}(x) &= \tilde{B}^{(a)}\tilde{F}'_{j,m}(x) + \tilde{C}_a(\tilde{F}^{(2)\prime}_{j,m})Z'_2(x), \ k_j \in \sigma, \ m = 1,2.
\end{aligned}$$

§3. ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАЗЛОЖЕНИЙ (23) И (24)

В этом параграфе покажем как, исходя из разложений (23) и (24) с $v^{(n)} \in \Omega(N)$, можно получить путем применения операторов A и $B^{(a)}$, построенных в §§1, 2, формулы разложения с $v^{(n)} \in \Omega(N-1)$ и наоборот.

Рассмотрим две краевые задачи

$$(82)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2}{dx^2}y_2^{(n)} + (k^2 - v_2^{(n)}(x))y^{(n)} = 0, & 0 < x < \infty\\ y_2^{(n)}(0,k) = 0, & n = 1,2,\end{cases}$$

где $v_2^{(n)} \in \Omega(N)$. Пусть k_1^2 — наименьшее собственное число этих задач и $\varphi_2^{(n)}(x) = \varphi_2^{(n)}(x,k_1)$ — соответствующие собственные функции, а $C_{n,1}^{-1} = \int\limits_0^\infty \left(\varphi_2^{(n)}(x)\right)^2 dx$. Рассмотрим, наряду с задачами (82), краевые задачи

$$(83)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2}{dx^2}y^{(n)} + (k^2 - v^{(n)}(x))y^{(n)} = 0, & 0 < x < \infty\\ y^{(n)}(0,k) = 0, & n = 1,2,\end{cases}$$

где

$$v^{(n)}(x) = v_2^{(n)}(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln I_2^{(n)}(x), \tag{84}$$

$$I_2^{(n)}(x) = C_{n,1}^{-1}\int\limits_x^\infty Z_2(s)ds,\ Z_2(x) = \Phi_2(x, k_1). \tag{85}$$

Из теоремы 0.3 следует,что

$$v^{(n)} \in \Omega(N-1), \quad \sigma(v^{(n)}) = \sigma(v_2^{(n)}) \setminus \{k_1\}.$$

Т е о р е м а 3.1. Пусть для краевых задач (82) справедлива форму разложения (23), т.е. для любой абсолютно непрерывной $h \in L_1$ имеем

$$h(x) = -\int\limits_0^\infty \tilde{F}_2(x,k)(h, \Phi_2'(k))dk \tag{86}$$

$$-\sum_{j=1}^{N}\left\{\tilde{F}_{j,1}^{(2)}(x)(h, \Phi_2'(k_j)) + \tilde{F}_{j,2}^{(2)}(x)(h, \dot{\Phi}_2'(k_j))\right\}.$$

Пусть по задачам (82) построены операторы A и $\tilde{A}$ и по формулам (3ξ (39), (42), (44), (46) из функций $\tilde{F}_2(x,k)$, $\tilde{F}_{j,m}^{(2)}(x)$, $\Phi_2'(x,k)$, $\dot{\Phi}_2'(x,k_j)$ пол чены функции $\tilde{F}(x,k)$, $\tilde{F}_{j,m}(x)$, $\Phi'(x,k)$, $\dot{\Phi}'(x,k_j)$. Тогда для любой абс лютно непрерывной функции $f \in L_1$ справедлива формула разложения

$$f(x) = -\int\limits_0^\infty \tilde{F}(x,k)(f, \Phi'(k))dk \tag{87}$$

$$-\sum_{j=2}^{N}\left\{\tilde{F}_{j,1}(x)(f, \Phi'(k_j)) + \tilde{F}_{j,2}(x)(f, \dot{\Phi}'(k_j))\right\}.$$

З а м е ч а н и е. Конструктивность этой теоремы состоит в том, ч если имеем разложение (86), то для краевых задач (83) системы $\{\Phi\}$ $\{\tilde{F}\}$ можно получить непосредственно с помощью теоремы 1.1, минуя построение посредством формул (20), (21), (22).

Доказательство. Пусть $h \in L_1$. Положим

$$(88) \qquad \tilde{h}(x) = h(x) + \tilde{F}_{1,1}^{(2)}(x)(h, \Phi_2'(k_1)),$$

$$(89) \qquad \tilde{g}(x) = -\int_0^\infty \tilde{F}_2(x,k)(h, \Phi_2'(k))dk$$

$$-\sum_{j=2}^{N} \left\{ \tilde{F}_{j,1}^{(2)}(x)(h, \Phi_2'(k_j)) + \tilde{F}_{j,2}^{(2)}(x)(h, \dot{\Phi}_2'(k_j)) \right\}$$

$$-\tilde{F}_{1,2}^{(2)}(x)(h, \dot{\Phi}_2'(k_1)).$$

Из соотношения биортогональности (см. теорему 0.5) следует, что $\tilde{h} \in L_1(Z_2')$. Обозначим $\tilde{h} = B^{(a)}f$, $f \in L_1$. Формулу разложения (86) можно записать в виде

$$(90) \qquad \tilde{h}(x) = \tilde{g}(x).$$

Применим к обоим частям (90) оператор A. Слева получим

$$(91) \qquad A\tilde{h} = AB^{(a)}f = f,$$

а справа

$$A\tilde{g} = -\int_0^\infty \tilde{F}(x,k)(h, \Phi_2'(k))dk$$

$$-\sum_{j=2}^{N} \{ \tilde{F}_{j,1}^{(x)}(h, \Phi_2'(k_j)) + \tilde{F}_{j,2}(x)(h, \dot{\Phi}_2'(k_j)) \}.$$

Но из соотношения биортогональности получаем

$$\begin{aligned}
(h, \Phi_2'(k)) &= (\tilde{h} - \tilde{F}_{1,1}^{(2)}(h, \Phi_2'(k_1)), \Phi_2'(k)) \\
&= (\tilde{h}, \Phi_2'(k)) - (\tilde{F}_{1,1}^{(2)}, \Phi_2'(k))(h, \Phi_2'(k_1)) \\
&= (B^{(a)}f, \Phi_2'(k)) = (f, \tilde{A}\Phi_2'(k)) \\
&= (f, \Phi'(k)) \qquad , \ k \in (0,\infty) \cup \{k_2, \ldots, k_N\},
\end{aligned}$$

и аналогично

$$(92) \qquad (h, \Phi_2'(k_1)) = 0; \quad (h, \dot{\Phi}_2'(k_j)) = (f, \dot{\Phi}'(k_j)), \quad j = 2, \ldots, N.$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
A\tilde{g} &= -\int_0^\infty \tilde{F}(x,k)(f,\Phi'(k))dk \\
&- \sum_{j=2}^{N}\{\tilde{F}_{j,1}(x)(f,\Phi'(k_j)) + \tilde{F}_{j,2}(x)(f,\dot{\Phi}'(k_j))\}
\end{aligned}
$$

и, с учетом $A\tilde{h} = f(x)$, это дает (87). Теорема доказана.

Несколько сложнее устанавливается обратное утверждение, т.е. і строение формулы разложения для $v_2^{(n)} \in \Omega(N)$, исходя из $v^{(n)} \in \Omega(N -$ Уточним сначала постановку задачи. Теперь в качестве исходных им ем уравнения (83) со спектром $\sigma(v^{(n)}) = \{k_2, \dots, k_N\}$. Пусть $\tau_1 > \max$ $k_1 = i\tau_1$ и $\alpha_n > 0$, $n = 1,2$ — произвольные положительные постоянні Построим потенциалы

$$
v_2^{(n)}(x) = v^{(n)}(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln I^{(n)}(x), \tag{93}
$$

где

$$
I^{(n)}(x) = 1 + \alpha_n \int_0^x (\varphi^{(n)}(s))^2 ds,\ \varphi^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}(x, k_1).
$$

Для краевых задач

$$
\begin{cases} \dfrac{d^2}{dx^2}y_2^{(n)} + (k^2 - v_2^{(n)}(x))y_2^{(n)} = 0, & 0 < x < \infty, \\ y_2^{(n)}(0,k) = 0, & n = 1,2, \end{cases} \tag{94}
$$

из теоремы 0.3 имеем $v_2^{(n)} \in \Omega(N)$, где $\sigma(v_2^{(n)}) = \sigma(v^{(n)}) \cup \{k_1\}$, а функц $\varphi_2^{(n)}(x,k_1) = \varphi^{(n)}(x)(I^{(n)}(x))^{-1}$, $\alpha_n^{-1} = C_{n,1}^{-1} = \int\limits_0^\infty(\varphi_2^{(n)}(x)^2)dx$ — собствен функция, соответствующая собственному числу k_1^2.

Т е о р е м а 3.2. Пусть для краевых задач (83) справедлива фо мула разложения (23), т.е. для любой абсолютно непрерывной $f \in$ имеем разложение (87). Пусть по задачам (83) построены операторы B и $\tilde{B}^{(a)}$ и по формулам из теоремы 2.2 из системы функций $\tilde{F}(x,k)$, $\tilde{F}_{j,m}($ $\Phi_2'(x,k)$, $\dot{\Phi}'(x,k_j)$ получена система функций $\tilde{F}_2(x,k)$, $\tilde{F}_{j,m}^{(2)}(x)$, $\Phi_2'(x,$ $\dot{\Phi}_2'(x,k_j)$. Тогда для любой абсолютно непрерывной $h \in L_1$ справедли формула разложения (86), соответствующая краевым задачам (94).

Доказательство. Пусть $h \in L_1$. Обозначим

$$
\tilde{h}(x) = h(x) + \tilde{F}_{1,1}^{(2)}(x)(h,\Phi_2'(k_1))\ ,\ \tilde{h} \in L_1(Z_2')
$$

и положим $f = A\tilde{h} \in L_1$. Пусть

$$\begin{aligned} g(x) &= -\int_0^\infty \tilde{F}(x,k)(f,\Phi'(k))dk \\ &\quad -\sum_{j=2}^N \tilde{F}_{j,1}(x)(f,\Phi'(k_j)) + \tilde{F}_{j,2}(x)(f,\dot{\Phi}'(k_j)). \end{aligned}$$

Из соотношения биортогональности имеем

$$\begin{aligned} (f,\Phi'(k)) &= (A\tilde{h},\Phi'(k)) \\ &= (\tilde{h},\tilde{B}^{(a)}\Phi'(k)) \\ &= (\tilde{h},\Phi_2'(k) - \tilde{C}_a(\Phi_2'(k))Z_2') \\ &= (h,\Phi_2'(k)) - \tilde{C}_a(\Phi_2'(k))(\tilde{h},Z_2') \\ &= (h,\Phi_2'(k)) + (\tilde{F}_{1,1}^{(2)},\Phi_2'(k))(h,\Phi_2'(k_1)) \\ &= (h,\Phi_2'(k)) \ , \ k \in (0,\infty) \cup \sigma(v^{(n)}). \end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем

$$(f,\dot{\Phi}'(k_j)) = (h,\dot{\Phi}_2'(k_j)) \qquad j = 2,3,\dots,N.$$

Слеодвательно,

$$\begin{aligned} g(x) &= -\int_0^\infty \tilde{F}(x,k)(h,\Phi_2'(k))dk \\ &\quad -\sum_{j=2}^N \{\tilde{F}_{j,1}(x)(h,\Phi_2'(k_j)) + \tilde{F}_{j,2}(x)(h,\dot{\Phi}_2'(k_j))\}. \end{aligned}$$

Формулу разложения (87) можно записать в виде $f(x) = g(x)$, т.е. получаем уравнение $A\tilde{h} = g$. Из теоремы 2.1 для его решения имеем формулу

$$\tilde{h}(x) = C_a(\tilde{h})Z_2(x) + B^{(a)}g.$$

В силу теоремы 2.2 имеем

$$\begin{aligned} B^{(a)}g &= -\int_0^\infty \tilde{F}_2(x,k)(h,\Phi_2'(k))dk \\ &\quad -\sum_{j=2}^N \{\tilde{F}_{j,1}^{(2)}(x)(h,\Phi_2'(k_j)) + \tilde{F}_{j,2}^{(2)}(x)(h,\dot{\Phi}_2'(k_j))\} + C_a^1(h)Z_2(x), \end{aligned}$$

где постоянная

$$C_a^1(h) = \int_0^\infty C_a(\tilde F_2(k))(h,\Phi_2'(k))dk + \sum_{j=2}^N \{C_a(\tilde F_{j,1}^{(2)})(h,\Phi_2'(k_j)) + C_a(\tilde F_{j,2}^{(2)})(h,\dot\Phi_2'(k_j))\}.$$

Так получаем

$$h(x) = -\int_0^\infty \tilde F_2(x)(h,\Phi_2'(k))dk - \sum_{j=2}^N \{\tilde F_{j,1}^{(2)}(x)(h,\Phi_2'(k_j)) + \tilde F_{j,2}^{(2)}(x)(h,\dot\Phi_2'(k_j))\} - \tilde F_{1,1}^{(2)}(x)(h,\dot\Phi_2'(k_1)) + C_a^2(h)Z_2(x),$$

где

$$C_a^2(h) = C_a(\tilde h) + C_a^1(h).$$

Умножив скалярно обе части этого равенства на $\dot\Phi_2'(k)(x,k_1)$, получаем, в силу соотношения биортогональности,

$$C_a^2(h)Z_2(x) = -\tilde F_{j,2}^{(2)}(x)(h,\dot\Phi_2'(k_1)),$$

т.е. разложение (86). Теорема доказана.

Для формулы разложения (24) справедливы подобные утверждения:

Т е о р е м а 3.3. Пусть для краевых задач (82) справедлива формула разложения (24), т.е. для любой абсолютно непрерывной $h \in L_1$ имеем

$$h(x) = -\int_0^\infty \Phi_2'(x,k)(h,\tilde F_2(k))dk - \sum_{j=1}^N \left\{\Phi_2'(x,k_j)(h,\tilde F_{j,1}^{(2)}) + \dot\Phi_2'(x,k_j)(h,\tilde F_{j,2}^{(2)})\right\}. \tag{95}$$

Пусть по задачам (82) построены операторы A, $\tilde A$ и по формулам из теоремы 1.1 из системы функций $\Phi_2'(x,k)$, $\dot\Phi_2'(x,k_j)$, $\tilde F_2(x,k)$,$\tilde F_{j,m}^{(2)}(x)$ получена система функций $\Phi'(x,k)$, $\dot\Phi'(x,k_j)$, $\tilde F(x,k)$, $\tilde F_{j,m}(x)$. Тогда для любой абсолютно непрерывной $f \in L_1$ справедлива формула разложения

$$f(x) = -\int_0^\infty \Phi'(x,k)(f,\tilde F(k))dk - \sum_{j=2}^N \{\Phi'(x,k_j)(f,\tilde F_{j,1}'(x)) + \dot\Phi'(x,k_j)(f,\tilde F_{j,2})\}. \tag{96}$$

Теорема 3.4. Пусть для краевых задач (83) справедлива формула разложения (24), т.е. для любой абсолютно непрерывной $f \in L_1$ имеем разложение (96). Пусть по задачам (83) построены операторы $B^{(a)}$, $\tilde{B}^{(a)}$ и по формулам из теоремы 2.2 из системы функций $\Phi'(x,k)$, $\dot{\Phi}'(x,k_j)$, $\tilde{F}(x,k)$, $\tilde{F}_{j,m}(x)$ получена система функций $\Phi_2'(x,k)$, $\dot{\Phi}_2'(x,k_j)$, $\tilde{F}_2(x,k)$, $\tilde{F}_{j,m}^{(2)}(x)$. Тогда для любой абсолютно непрерывной $f \in L_1$ справедлива формула разложения (95), соответствующая краевым задачам (94).

При доказательстве теорем 3.3 и 3.4 необходимо использовать операторы $\tilde{A}$, $\tilde{B}^{(a)}$ на месте A, $B^{(a)}$ и тот факт, что если $h \in L_1$, то $\tilde{h}(x) = h(x) + \dot{\Phi}_2'(x,k_1)(h, \tilde{F}_{1,2}^{(2)}) \in L_1(Z_2)$ и к $\tilde{h}$ можно применить оператор $\tilde{A}$.

Замечание. Подставляя в формуле разложения (23) $h(x) = -\int\limits_x^\infty f(s)ds$ и интегрируя по частям в коэфициентах разложения $(h, \Phi'(k))$, $k \in (0,\infty) \cup \sigma$ и $(h, \dot{\Phi}'(k_j))$, $k_j \in \sigma$, получаем формулу разложения (см. [6])

$$\begin{aligned}
-\int\limits_x^\infty f(s)ds &= \int\limits_0^\infty \tilde{F}(x,k)(f,\Phi(k))dk \\
&+ \sum_{j=1}^N \{\tilde{F}_{j,1}(x)(f,\Phi(k_j)) + \tilde{F}_{j,2}(x)(f,\dot{\Phi}(k_j))\}.
\end{aligned}$$

§4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (84)

В этом параграфе, предполагая, что $v^{(1)} = v^{(2)} = v$, изучим более подробно свойства операторов A и $B^{(a)}$, построенных в §§1,2. Не оговаривая особо, будем пользоваться введенными уже обозначениями, подразумевая всюду в дальнейшем, что $v_1^{(n)} = v_1$, $v_2^{(n)} = v_2$, $n = 1,2$. Рассмотрим преобразование (84) как оператор, определенный в множестве $\Omega(N+1)$ со значениями в $\Omega(N)$, $N \geqq 0$, т.е. имеем оператор

$$(97) \qquad T(v_2) = v_2(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln(\alpha\int\limits_x^\infty f^2(v_2;s,k)ds), \ \alpha^{-1} = \int\limits_0^\infty f^2(x)dx,$$

где $k_1 = k_1(v_2) : f(v_2;k_1) = 0$ и $f(v_2;x,k_1)$ — собственная функция краевой задачи (9), (10). Основным результатом здесь является

Теорема 4.1. Для любой функции $h \in L_1(Z_2)$, т.е.

$$(98) \qquad h \in \{L_1 \ : \ (h, Z_2) = 0 \ , \qquad Z_2(x) = f^2(v_2;x,k_1)\},$$

при фиксированном $v_2 \in \Omega(N+1)$ существует дифференциал

$$(99) \qquad \frac{d}{d\varepsilon}T(v_2 + \varepsilon h)|_{\varepsilon=0} \stackrel{\text{def}}{=} T'(v_2)h = \tilde{A}h, \quad \forall h \in L_1(Z_2),$$

где оператор $\tilde{A} = \tilde{A}_1\tilde{A}_2$ определяется указанным в §1 образом.

З а м е ч а н и е. Напомним, что дифференциал собственного числа $\lambda_1(v_2) = k_1^2$ дается формулой

$$(100) \qquad \frac{d}{d\varepsilon}\lambda_1(v+\varepsilon h)|_{\varepsilon=0} = \alpha(Z_2, h), \qquad \alpha^{-1} = \int_0^\infty f^2(v_2; x, k_1)dx.$$

Следовательно, условие $(h, Z_2) = 0$ означает, что производная оператора T рассматривается на множестве функций, не меняющих собственное число $\lambda_1(v_2)$. Указанная в (97) зависимость T от $\alpha = \alpha(v_2)$ на самом деле привидна, так как

$$T(v_2) = v_2(x) + 2\frac{d}{dx}\left\{Z_2(x)\left(\int_x^\infty Z_2(s)ds\right)^{-1}\right\}.$$

Для доказательства этой теоремы нам понадобиться следующая

Л е м м а 4.1. Решение Йоста $f(v_2; x, k)$ (при фиксированном k) является дифференцируемой по v_2 функцией и ее дифференциал имеет следующий вид:

$$(101) \qquad f'_{v_2}h = f(v; x)\int_x^\infty Z_2^{-1}(s)\left(\int_s^\infty Z_2(\xi)h(\xi)d\xi\right)ds, \qquad h \in X_1.$$

Доказательство хорошо известно (см. например [11]), но здесь напомним его для полноты изложения. Рассмотрим, наряду с уравнением (9), опуская для краткости индекс 2, пертурбированное уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2}f(v+h; x) + (k_1^2 - v(x))f(v+h; x) = h(x)f(v+h; x).$$

Так как при $h = 0$ вместе с $f(v; x)$ вторым линейно независимым решением уравнения (9) является функция

$$g(v; x) = f(x)\int_a^x f^{-2}(s)ds, \qquad W(f, g) = 1,$$

то $f(v+h; x)$ удовлетворяет уравнению

$$f(v+h; x) = f(v; x) + \int_x^\infty K(v; x, s)h(s)f(v+h; s)ds,$$

где при $x \leqq s$ функция

$$K(v; x, s) = f(x)g(s) - g(x)f(s) = f(x)f(s)\int_x^s Z^{-1}(s)ds.$$

$$f(v+h;x) = f(v;x) + f(v;x)\int\limits_x^\infty f(v;s)f(v+h;s)h(s)\left(\int\limits_x^s Z^{-1}(\xi)d\xi\right)ds,$$

что с точностью до $O(\|h\|^2)$ дает

$$f_v'h = f(v;x)\int\limits_x^\infty Z(s)\left(\int\limits_x^s Z^{-1}(\xi)d\xi\right)h(s)ds.$$

Отсюда, меняя порядок интегрирования, с учетом оценки (30), получаем **искомую** формулу (101). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4.1. Опуская индекс 2, т.е. $Z(x) = Z_2(x)$, $v = v_2$, и учитывая определение (27) для $Z_1(x)$, т.е.

$$Z_1(x) = Z^{-1}(x)\left(\int\limits_x^\infty Z(s)ds\right)^2, \tag{102}$$

получаем из определения операторов $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2^{(\infty)}$, что

$$\tilde{A}^{(\infty)}h = \tilde{A}_1\tilde{A}_2^{(\infty)}h = h(x) - 2(Z^{-1}(x))'\int\limits_x^\infty Z(s)h(s)ds \tag{103}$$

$$-2(Z_1^{-1}(x))'\int\limits_x^\infty Z_1(s)ds + 4(Z_1^{-1}(x))'\int\limits_x^\infty Z_1(s)(Z^{-1}(s))'\left(\int\limits_s^\infty Z(\xi)h(\xi)d\xi\right)ds.$$

Отметим, что из (102) имеем

$$Z_1(x)(Z^{-1}(x))' = \frac{1}{2}\left(Z^{-2}(x)\right)'\left(\int\limits_x^\infty Z(s)ds\right)^2. \tag{104}$$

Далее из леммы 4.1 и формулы (100) следует, что оператор $T(v)$ дифференцируем по v и его дифференциал

$$T'(v)h = h(x) - 4\frac{d^2}{dx^2}\left(\int\limits_x^\infty f(v;s)f_v'h(s)ds\left(\int\limits_x^\infty Z(s)ds\right)^{-1}\right)$$

$$-\frac{2\alpha}{k_1}\frac{d^2}{dx^2}\left(\int\limits_s^\infty f(v;s,k_1)\dot{f}(v;s,k_1)ds\left(\int\limits_x^\infty Z(s)ds\right)^{-1}\right)(h,Z).$$

Отсюда, в силу формулы (101) получаем, что если h удовлетворяет условию (98), то

$$T'(v)h = h(x) - 4\frac{d^2}{dx^2}I(x), \tag{105}$$

где

$$I(x) = \left(\int_x^\infty Z(s)ds\right)^{-1} \int_x^\infty Z(s)\left(\int_s^\infty Z(\xi)\left(\int_\xi^\infty Z(\eta)h(\eta)d\eta\right)d\xi\right)ds.$$

Интегрируя по частям, имеем

$$I(x) = \int_x^\infty Z^{-1}(s)\left(\int_s^\infty Z(\xi)h(\xi)d\xi\right)ds$$

$$-\left(\int_x^\infty Z(s)ds\right)^{-1}\int_x^\infty Z^{-1}(s)\left(\int_s^\infty Z(\xi)d\xi\right)\left(\int_s^\infty Z(\xi)h(\xi)d\xi\right)ds.$$

Отсюда, в силу (102) и (104), следует, что

$$I'(x) = -\frac{1}{2}Z^{-1}(x)\int_x^\infty Z(s)h(s)ds + \frac{1}{2}Z_1^{-1}(x)\int_x^\infty Z_1(s)h(s)ds$$

$$-Z_1^{-1}(x)\int_x^\infty Z_1(s)(Z^{-1}(s))'\left(\int_s^\infty Z(\xi)h(\xi)d\xi\right)ds.$$

Подставляя $I'(x)$ в (105) получаем, в силу (103) и леммы 4.1, формулу (99). Теорема доказана.

Замечание. В предположении, что оператор $T(v)$ дифференцируем, результат теоремы 4.1 интуитивно явен из следующих соображений:

Пусть для определенности в теореме 4.1 $N = 0$. Из теоремы 2.2 имеем

$$\tilde{F}(v_2; x, k) = B^{(a)}\tilde{F}(v; x, k) + Z_2(x)\left\{\frac{2}{z_2^2(a)}\int_0^a Z_2'(s)\tilde{F}(v_2; s, k)ds\right\}. \tag{106}$$

Далее из теоремы 0.3 следует, что спектральные плотности краевых задач (9), (10) совпадают, т.е.

$$\varrho(T(v_2); k) = \varrho(v_2; k) \qquad \left(\varrho(v; k) \overset{\text{def}}{=} \frac{2}{\pi}\frac{k^2}{|f(v; k)|^2}\right).$$

Дифференцируя по v_2, с учетом известной формулы (см. например [11])

$$\varrho'(v)h = -\frac{2k}{\pi}\int\limits_0^\infty h(x)\mathrm{Im}\left\{\frac{F(v;x,k)}{F(v;k)}\right\}dx,$$

получаем

$$\frac{d}{d\varepsilon}\varrho(T(v_2+\varepsilon h);k)|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}\varrho(v_2+\varepsilon h;k)|_{\varepsilon=0},$$

т.е.

$$(\tilde F(v;k), T'(v_2)h) = (\tilde F(v_2;k), h)(v = T(v_2)).$$

Отсюда вытекает, что если $(h, Z_2) = 0$, то, в силу (106) и (73), имеем

$$(\tilde F(v;k), T'(v_2)h) = (B^{(a)}\tilde F(v;k), h) = (\tilde F(v;k), \tilde A h).$$

Теперь для того, чтобы получить (99), остается заметить, что из разложения (24) следует полнота системы $\tilde F(v;x,k)$ в пространстве L_1, т.е. из $(f, \tilde F(v;k)) = 0$, $k \in (0,\infty)$ имеем $f(x) \equiv 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. C r u m m, M. M. Associated Strum — Liouville systems. — Quart. S. Math., **6**, 1955, 121–127.
2. К р е й н, М. Г. О континуальном аналоге одной формулы Кристоффеля из теории ортогональных многочленов. — ДАН СССР, 113, 1957, 970–973.
3. Ф а д д е е в, Л. Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния. — Усп. мат. наук, **14**, вып. 4(88), 1959, 57–119.
4. А г р а н о в и ч, З. С., В. А. М а р ч е н к о. Обратная задача теории рассеяния. Харков, 1960.
5. D e i f t, P. A. Applications of a commutation formula. — Duke J. Math., **45**, No 2, 1978, 267–310.
6. Х р и с т о в, Е. Х. О спектральных свойствах операторов, связанных с разложениями по произведениям решений двух радиальных уравнений Шредингера. I. Формулы разложения. Год. Соф. унив., Фак. мат. и мех., **75**, кн.2 — Механика, 197–213.
7. Х р и с т о в, Е. Х. О спектральных свойствах операторов, связанных с разложениями по произведениям решений двух радиальных уравнений Шредингера. II. Спектральная теория. Год. Соф. унив., Фак. мат. и мех., **75**, кн.2 — Механика, 215–230.
8. М и ш е в, И. П., Е. Х. Х р и с т о в. Об обратной задаче квантовой теории рассеяния для радиального уравнения Шредингера. I. Спектральная теория операторов $\Lambda_0^{(\ell)}$ и $\Lambda_\infty^{(\ell)}$. Год. Соф. унив., Фак. мат. и мех., **80**, кн.2 — Механика.
9. Ж и д к о в, Е. П., Е. Х. Х р и с т о в. Об определении оператора Штурма-Лиувилля по одному спектру для нулевых граничных условий. ОИЯИ, Р5-86-634, Дубна, 1986.

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Книга 2 — Механика
Том 82, 1988

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA "ST. KLIMENT OHRIDSKI"
FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Livre 2 — Mécanique
Tome 82, 1988

ТЕНЗОРНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА

НИКОЛИНА ВАСИЛЕВА, ЛЮБОМИР ЛИЛОВ

Николина Василева, Любомир Лилов. ТЕНЗОРНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА

Рассматривается голономная механическая система, для которой в качестве обобщенных координат выбраны не только скалярные, как в классическом случае, а также векторные или тензорные величины. На основе тензорного исчисления разработан соответствующий математический аппарат. Уравнения движения выводятся из вариационного принципа Журдена.

Nikolina Vasileva, Ljubomir Lilov. A TENSORIAL FORM OF LAGRANGE'S EQUATIONS

A holonomic mechanical system is being cosidered for which as generalized coordinates not only scalars are choosen, but vectors and tensors, as well. On the base of the tensor calculation an adequate mathematical apparatus is worked out. The motion equations are being derived from the variational principle of virtual power (the Jourdain's principle).

Лагранжевый формализм является основным методом вывода уравнений движения голономной системы. Уравнения Лагранжа второго рода позволяют избежать определения реакций связей и при помощи минимального числа параметров (обобщенных координат) записать наиболее экономным образом уравнения движения. Их недостатком является использование в качестве обобщенных координат скалярных величин.

которые обычно имеют формальный характер и не отражают непосредственно механику изучаемых систем, особено в случаях, когда рассматриваются системы твердых тел. Для таких систем естественные параметры, описывающие положения тел в инерциальном пространстве, имеют уже не скалярный, а векторный и тензорный характер. Например, для одного твердого тела наиболее удобным способом определения его положения является задание радиус-вектора некоторой его точки и тензора вращения, характеризующего угловое положение фиксиранного в теле ортонормированного базиса. Отсюда вытекает необходимость записывания уравнения Лагранжа в случаях, когда обобщенные координаты имеют векторный и более общий тензорный характер. Вывод таких уравнений, которые можно назвать тезорными уравнениями Лагранжа, является основной целью этой работы.

Сначала приведем некоторые сведения из тензорного исчисления и дифференциального исчисления функций тензорных переменных.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим трехмерное евклидово пространство $\mathcal{E}$ и тензоры произвольной валентности на $\mathcal{E}$. Пространство тензоров валентности m будем обозначать через $\mathcal{E}_m$. Если $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^T$ — ортонормированный базис пространства $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1$, то известно, что всевозможные внешние произведения этих векторов вида $\mathbf{e}_{i_1} \ldots \mathbf{e}_{i_m}$ $(1 \leqq i_k \leqq 3,\ k = 1, \ldots, m)$ образуют базис пространства $\mathcal{E}_m$. Так как для евклидовых пространств нет принципиальной разницы между ковариантными и контрвариантными индексами тензоров, координаты тензора $\mathbf{T} \in \mathcal{E}_m$ будем обозначать через $\tau_{i_1 \ldots i_m}$. В этих обозначениях тензор $\mathbf{T}$ имеет представление

$$\mathbf{T} = \tau_{i_1 \ldots i_m} \mathbf{e}_{i_1} \ldots \mathbf{e}_{i_m}$$

(предполагается суммирование от 1 до 3 по каждой паре одинаковых индексов).

Основными тензорными операциями являются внешнее (тензорное) произведение $\mathbf{AB}$ двух тензоров $\mathbf{A} \in \mathcal{E}_m$ и $\mathbf{B} \in \mathcal{E}_n$, свертка индексов, при помощи которой совершается суммирование по одной или нескольким парам индексов и операция перестановки индексов. При помощи этих операций определяется обобщенное произведение $\mathbf{A} \bigwedge_{(p_1, \ldots, p_k; q_1, \ldots, q_k)} \mathbf{B}$ двух тензоров $\mathbf{A} = \alpha_{i_1 \ldots i_m} \mathbf{e}_{i_1} \ldots \mathbf{e}_{i_m} \in \mathcal{E}_m$ и $\mathbf{B} = \beta_{i_1 \ldots i_n} \mathbf{e}_{i_1} \ldots \mathbf{e}_{i_n} \in \mathcal{E}_m$ как свертывание по парам индексов $(i_{p_1}, i_{q_1}), \ldots, (i_{p_k}, i_{q_k})$ тензорного произведения $\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \alpha_{i_1 \ldots i_m} \beta_{i_{m+1} \ldots i_{m+n}} \mathbf{e}_{i_1} \ldots \mathbf{e}_{i_{m+n}}$, где $k \leqq \min(n, m)$, $p_1, \ldots, p_k \leqq m$, $q_1, \ldots, q_k > m$. В зависимости от выбора этих пар можно получить различные типы обобщенного произведения двух тензоров. Легко увидеть, однако, что в случае, когда число пар одно и то же, то посредством подходящей перестановки индексов всегда можно перейти из одного типа обобщенного произведения к другому. Поэтому будем пользоваться только обобщенным произведением, в котором совершается суммирование по следующим k парам индексов: последний индекс тензора $\mathbf{A}$ с первым индексом тензора $\mathbf{B}$, предпоследний индекс тензора $\mathbf{A}$ со вторым индексом тензора $\mathbf{B}$ и т. д. Если $k = 0$, то обобщенное произведение тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ определяем как внешнее произведение $\mathbf{AB}$, если $k = 1$ будем использовать обычное обозначение $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, в общем же случае $1 < k \leqq \min(m, n)$ будем использовать обозначение $\mathbf{A} \bigwedge_k \mathbf{B}$. Тензор $\mathbf{A} \bigwedge_k \mathbf{B}$ является элементом пространства $\mathcal{E}_{m+n-2k}$.

Введем обозначение ${}^{[k]}\mathbf{A}$ для тензора, полученного из тензора $\mathbf{A}$ перестановкой мест первых k индексов с остальными, т. е.

$$^{[k]}\alpha_{i_1 \dots i_m} = \alpha_{i_{k+1} \dots i_m i_1 \dots i_k} \quad (0 < k < m)$$

и $\mathbf{A}^{[k]}$ для тензора, координаты которого получаются, если записать последние k индексы тензора $\mathbf{A}$ на первых k местах:

$$\alpha^{[k]}_{i_1 \dots i_m} = \alpha_{i_{m-k+1} \dots i_m i_1 \dots i_{m-k}} \quad (0 < k < m).$$

Здесь $\alpha_{i_1 \dots i_m}, {}^{[k]}\alpha_{i_1 \dots i_m}, \alpha^{[k]}_{i_1 \dots i_m}$ — координаты тензоров $\mathbf{A}$, ${}^{[k]}\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{[k]}$ относительно одного и того же базиса. Если $k = 0$ или $k = m$, то по определению

$$^{[0]}\mathbf{A} = \mathbf{A}^{[0]} = {}^{[m]}\mathbf{A} = \mathbf{A}^{[m]} = \mathbf{A}.$$

Введем также обозначение $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ для тензора, координаты $\alpha^{\mathrm{T}}_{i_1 \dots i_m}$ которого определяются равенством

$$\alpha^{\mathrm{T}}_{i_1 \dots i_m} = \alpha_{i_m \dots i_1}.$$

Для выбранного правила суммирования в обобщенном произведении $\bigwedge_k$ при произвольных тензорах $\mathbf{A} \in \mathcal{E}_m, \mathbf{B} \in \mathcal{E}_n$ и $\mathbf{C} \in \mathcal{E}_s$ и целых числах k и l, для которых имеют смысл написанные ниже произведения, справедливы равенства

$$\mathbf{A} \bigwedge_l \left(\mathbf{B} \bigwedge_k \mathbf{C}\right) = \left(\mathbf{A} \bigwedge_p \mathbf{B}\right) \bigwedge_q \mathbf{C},$$

$$\left(\mathbf{A} \bigwedge_k \mathbf{B}\right) \bigwedge_l \mathbf{C} = \mathbf{A} \bigwedge_q \left(\mathbf{B} \bigwedge_p \mathbf{C}\right),$$

где $p = \min(l, n - k)$, $q = k + l - p$. Если $l < n - k$, то имеет место ассоциативный закон

$$\text{(1)} \qquad \mathbf{A} \bigwedge_l \left(\mathbf{B} \bigwedge_k \mathbf{C}\right) = \left(\mathbf{A} \bigwedge_l \mathbf{B}\right) \bigwedge_k \mathbf{C},$$

$$\text{(2)} \qquad \left(\mathbf{A} \bigwedge_k \mathbf{B}\right) \bigwedge_l \mathbf{C} = \mathbf{A} \bigwedge_k \left(\mathbf{B} \bigwedge_l \mathbf{C}\right).$$

Выполнено также и равенство

$$(3)\qquad \left(\mathbf{A}\bigwedge_k \mathbf{B}\right) = \left({}^{[k]}\mathbf{B}\bigwedge_k \mathbf{A}^{[k]}\right)^{[m-k]}.$$

Если совершается суммирование по всем индексам тензора $\mathbf{B}\in\mathcal{E}_n$, можно написать

$$\left(\mathbf{A}\bigwedge_n \mathbf{B}\right)\bigwedge_k \mathbf{C} =^{[n]} \left(\mathbf{A}^{[n]}\bigwedge_k \mathbf{C}\right)\bigwedge_n \mathbf{B},$$

$$(4)\qquad \left(\mathbf{A}\bigwedge_n \mathbf{B}\right)\bigwedge_k \mathbf{C} = \left({}^{[k]}\mathbf{C}\bigwedge_k {}^{[m-n-k]}\mathbf{A}\right)^{[m-n-k]}\bigwedge_n \mathbf{B}.$$

Единичный тензор пространства $\mathcal{E}_2$ будем обозначать через $\mathbf{E}_2$. Если $\underline{e} = (\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)^{\mathrm{T}}$ — произвольный базис в пространстве $\mathcal{E}$, то матрицей координат тензора $\mathbf{E}_2$ является единичная матрица $\underline{E} = (\delta_{ij})_{i,j=1}^3$, при этом $\mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$. Тензор $\mathbf{E}_2$ осуществляет тождественное преобразование в пространстве $\mathcal{E}$, т. е. для каждого вектора $\mathbf{x}\in\mathcal{E}$ выполнено $\mathbf{x}\cdot\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_2\cdot\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Кроме того

$$\mathbf{E}_2\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{E}_2 = \mathbf{A}, \mathbf{E}_2\bigwedge_2 \mathbf{A} = \mathbf{A}\bigwedge_2 \mathbf{E}_2 = \mathrm{sp}\mathbf{A},$$

$$\mathbf{E}_2\bigwedge_2(\mathbf{x}\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2,\ \text{где } \mathbf{A}\in\mathcal{E}_2.$$

Ту же самую роль в пространстве $\mathcal{E}_2$ выполняет тензор $\mathbf{E}_4$, координаты δ_{ijkl} которого относительно произвольного ортонормированного базиса $\underline{e}$ определяется равенствами $\delta_{ijkl} = \delta_{il}\delta_{jk}$, из которых следует, что

$$\mathbf{E}_4 =^{[2]} \mathbf{E}_4 = \mathbf{E}_4^{[2]} = \mathbf{E}_4^{\mathrm{T}} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i.$$

Если $\mathbf{A}\in\mathcal{E}_2$ и $\mathbf{B}\in\mathcal{E}_4$ — произвольные тензоры с координатами относительно $\underline{e}$ соответственно α_{ij} и β_{ijkl}, то имеют место равенства

$$\mathbf{E}_4\bigwedge_2 \mathbf{A} = \mathbf{A}\bigwedge_2 \mathbf{E}_4 = \mathbf{A},$$

$$\mathbf{E}_4\bigwedge_2 \mathbf{B} = \mathbf{B}\bigwedge_2 \mathbf{E}_4 = \mathbf{B}, \mathbf{E}_4\bigwedge_4 \mathbf{B} = \beta_{ijji},$$

$$\mathbf{E}_4\bigwedge_k \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^3\sum_{j=1}^3 \alpha_{ij}.$$

Связь между тензорами $\mathbf{E}_2$ и $\mathbf{E}_4$ выражается равенством

$$\mathbf{E}_4 = (\mathbf{E}_2\mathbf{E}_2)^{[1]} =^{[1]} (\mathbf{E}_2\mathbf{E}_2).$$

Если обозначим через $*$ перестановку первого и второго индекса четырехвалентного тензора, то для любого тензора $\mathbf{A} \in \mathcal{E}_2$ выполнено равенство

$$\mathbf{E}_4^* \bigwedge_2 \mathbf{A} = \mathbf{A} \bigwedge_2 \mathbf{E}_4^* = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}.$$

Это равенство показывает, что операцию перестановки индексов двухвалентного тензора $\mathbf{A}$ можно представить как результат его умножения на тензор $\mathbf{E}_4^*$. Относительно ортонормированного базиса $\underline{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^{\mathrm{T}}$ тензор $\mathbf{E}_4^*$ выражается суммой

$$\mathbf{E}_4^* = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j.$$

Таким же способом можно использовать тензор $\mathbf{E}_{2m} = \mathbf{e}_{i_1} \ldots \mathbf{e}_{i_m}\mathbf{e}_{i_m} \ldots \mathbf{e}_{i_1}$, чтобы представить тождественное преобразование пространства $\mathcal{E}_m$, а каждый тензор, получающийся перестановкой первых m индексов тензора $\mathbf{E}_{2m}$, осуществляет некоторую операцию перестановки индексов тензоров в пространстве $\mathcal{E}_m$.

Для представления векторного произведения и других операций в пространстве $\mathcal{E}$ важную роль играет трехвалентый тензор $\mathbf{D}$, который по отношению к произвольному ортонормированному базису имеет координаты

$$d_{ijk} = \begin{cases} (-1)^{[i,j,k]}, & \text{где } [i,j,k] \text{ — число инверсии} \\ & \text{в перестановке } (i,j,k) \text{ чисел } 1,\ 2,\ 3, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Таким образом тензор $\mathbf{D}$ можно представить в виде.

$$\mathbf{D} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2.$$

Имеют место формулы

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{E}_4^* - \mathbf{E}_4, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \bigwedge_2 \mathbf{D} &= -2\mathbf{E}_2, \quad \mathbf{D} \bigwedge_3 \mathbf{D} = -6, \\ \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_2 &= \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{D} = \mathbf{D}, \ (\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}) \bigwedge_2 \mathbf{D} = -2\mathbf{D}, \\ (\mathbf{D} \cdot \mathbf{D})^{[1]} &\bigwedge_2 \mathbf{D} = -\mathbf{D}. \end{aligned} \tag{6}$$

При перестановке любых двух индексов тензора $\mathbf{D}$ получаем тензор $-\mathbf{D}$. Такие тензоры называются кососимметрическими. Все кососимметрические тензоры третьей валентности получаются из тензора $\mathbf{D}$ умножением на некоторое число.

Двухвалентные кососимметрические тензоры имеют кососимметрическую матрицу координат и называются также бивекторами.

Ряд тензорных операций можно представить как умножение на тензор $\mathbf{D}$. Рассмотрим некоторые примеры.

Пусть $\mathbf{a} \in \mathcal{E}, \mathbf{B} \in \mathcal{E}_2, \mathbf{C} \in \mathcal{E}_3$ и α_i, β_{ij} и γ_{ijk} — их координаты относительно базиса $\underline{e}$. Произведения $-\mathbf{D} \cdot \mathbf{a} \in \mathcal{E}_2$ и $-\mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \in \mathcal{E}_3$ обозначим через $\widetilde{\mathbf{a}}$ и $\widetilde{\mathbf{B}}$. Можно записать, что

$$\widetilde{\mathbf{a}} = -\mathbf{D}\cdot\mathbf{a} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{B}} = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{B} = \beta_{ij}\widetilde{\mathbf{e}}_j\mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 & 0 & -\mathbf{b}_1 \\ -\mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{b} = \beta_{ij}\mathbf{e}_j$.

Тензор $\widetilde{\mathbf{a}}$ — кососимметрический. Наоборот, если $\mathbf{A} \in \mathcal{E}_2$ — кососимметрический, то существует вектор $\mathbf{a} \in \mathcal{E}$, для которого $\widetilde{\mathbf{a}} = \mathbf{A}$. Каждому вектору $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ тензор $\widetilde{\mathbf{a}}$ сопоставляет вектор $\widetilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$, а общее решение уравнения $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0$, $\mathbf{a} \neq 0$ можно записать в виде

$$\mathbf{x} = \widetilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{p}, \tag{7}$$

где $\mathbf{p}$ — произвольный вектор. Используя равенства (5) и (6), получаем формулы

$$\widetilde{\widetilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b}} = \widetilde{\mathbf{a} \times \mathbf{b}} = \mathbf{ba} - \mathbf{ab},$$

$$\widetilde{\mathbf{a}} \cdot \widetilde{\mathbf{b}} = \mathbf{ba} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{E}_2,$$

$$\mathbf{a} \doteq \frac{1}{2}\mathbf{D} \bigwedge_2 \widetilde{\mathbf{a}}. \tag{8}$$

Отметим еще равенства

$$-\mathbf{D} \bigwedge_2 (\mathbf{ab}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}, -\mathbf{D} \bigwedge_3 (\mathbf{abc}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c},$$

$$(\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}) \bigwedge_3 (\mathbf{abc}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c},$$

где $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ — произвольные векторы.

Остановимся теперь на альтернацию индексов. Она определяется следующим образом. Рассмотрим всевозможные тензоры, полученные из данного тензора валентности m перестановкой n выбранных его индексов ($n \leq m$). Каждый такой тензор берем со знаком плюс или минус в зависимости от того, является ли перестановка четной или нечетной и проводим усреднение по всем $n!$ тензорам. Полученное среднее арифметическое является кососимметрическим тензором по выбранным n индексам. Этот тензор называется альтернацией изходного тензора по указанным индексам. Если совершается альтернация по всем индексам тензора $\mathbf{A}$, то полученный тензор обозначается через $\mathrm{Alt}(\mathbf{A})$ ([1]).

Нетрудно показать, что если $\mathbf{C} \in \mathcal{E}_3$ имеет координаты γ_{ijk}, то произведение

$$\frac{1}{3}\mathbf{D} \bigwedge_3 \mathbf{C} = \frac{1}{6}(\gamma_{123} + \gamma_{231} + \gamma_{312} - \gamma_{321} - \gamma_{213} - \gamma_{123}) \in \mathcal{E}_0$$

является единственной существенной координатой кососимметрического тензора $\mathrm{Alt}(\mathbf{C})$. Сам тензор $\mathrm{Alt}(\mathbf{C})$ представляется в виде $\frac{1}{6}(\mathbf{DD}) \bigwedge_3 \mathbf{C}$.

Для тензора $\mathbf{B} \in \mathcal{E}_2$ справедливо соотношение

$$\mathrm{Alt}(\mathbf{B}) = \frac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{B}^{\mathbf{T}}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{E}_4^* - \mathbf{E}_4) = -\frac{1}{2}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}) \bigwedge_2 \mathbf{B} = -\frac{1}{2}\mathbf{D}\left(\mathbf{D} \bigwedge_2 \mathbf{B}\right).$$

Тензор $\mathbf{D} \bigwedge_2 \mathbf{B}$ будем обозначать через $\underset{\times}{\mathbf{B}}$ ([2]). Он имеет координаты $\beta_{23} - \beta_{32}$, $\beta_{31} - \beta_{13}$, $\beta_{12} - \beta_{21}$, откуда следует, что если $\mathbf{B}$ — симметрический тензор (т. е. его матрица координат - симметрическая), то $\mathbf{D} \bigwedge_2 \mathbf{B} = 0$.

Введем евклидову норму в пространстве

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\sum \alpha^2_{i_1 \ldots i_m}} = \sqrt{\mathbf{E}_{2m} \bigwedge_{2m} \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}},$$

где $\alpha_{i_1 \ldots i_m}$ — координаты тензора $\mathbf{A} \in \mathcal{E}_m$ относительно некоторого ортонормированного базиса. Известно, что имеют место зависимости

$$\|\mathbf{A}\| > 0, \quad \text{если } \mathbf{A} \neq \mathbf{O}_m,$$

$$\|c\mathbf{A}\| = |c|\|\mathbf{A}\|, \|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leqq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|,$$

$$\|\mathbf{AB}\| = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|, \|\mathbf{A} \bigwedge_k \mathbf{B}\| \leqq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|, \ \mathbf{A} \in \mathcal{E}_m, \mathbf{B} \in \mathcal{E}_n, \ k \leqq \min(n, m),$$

$$\|\mathbf{A}^*\| = \|\mathbf{A}\|,$$

где через $*$ обозначена некоторая перестановка индексов тензора $\mathbf{A}$.

Если $\mathbf{A} \in \mathcal{E}_{m+n}$, то произведение $\mathbf{A} \bigwedge_m \mathbf{T}$, где $\mathbf{T} \in \mathcal{E}_m$, является элементом пространства $\mathcal{E}_n$. Из линейности обобщенного произведения следует, что с помощью произведения $\mathbf{A} \bigwedge_m \mathbf{T}$ тензор $\mathbf{A}$ задает линейный оператор, действующий из пространства $\mathcal{E}_m$ в пространство $\mathcal{E}_n$. Кроме того, как линейный оператор на конечномерном пространстве, этот оператор непрерывен [3]. Наоборот, для каждого линейного непрерывного отображения $f\colon \mathcal{E}_m \to \mathcal{E}_n$ можно определить тензор $\mathbf{A} \in \mathcal{E}_{m+n}$, удовлетворяющий равенству

$$f(\mathbf{T}) = \mathbf{A} \bigwedge_m \mathbf{T}, \mathbf{T} \in \mathcal{E}_m. \tag{9}$$

Следовательно, введя обобщенное произведение $\mathbf{A} \bigwedge_m \mathbf{T}$, можно рассматривать пространство $\mathcal{E}_{m+n}$ как пространство $\mathcal{L}(\mathcal{E}_m; \mathcal{E}_n)$ линейных непрерывных отображений $\mathcal{E}_m$ на $\mathcal{E}_n$, а за норму линейного отображения $f \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_m, \mathcal{E}_n)$ можно принять норму определенного равенством (9) тензора $\mathbf{A}$, т. е. $\|f\| = \|\mathbf{A}\|$.

Определенная таким образом норма линейных отображений имеет еще свойства

$$\|f(\mathbf{T})\| \leqq \|f\|\|\mathbf{T}\|,$$
$$\|f \circ g\| \leqq \|f\|\|g\|,$$

где $f \circ g$ — композиция линейных отображений f и g.

Допустим, что в открытом непустом множестве $U \subset \mathcal{E}_m$ определено непрерывное отображение $f\colon U \to \mathcal{E}_n$. Рассматривая пространство $\mathcal{E}_{m+n}$ как пространство линейных непрерывных отображений пространства $\mathcal{E}_m$ в пространство $\mathcal{E}_n$, производное отображение отображения f в точке $\mathbf{T} \in U$ определяем как тензор $\mathbf{A} \in \mathcal{E}_{m+n}$, для которого выполняется равенство

$$\|f(\mathbf{T}+\mathbf{H})\| = f(\mathbf{T}) + \mathbf{A} \bigwedge_m \mathbf{H} + o(\mathbf{H}),$$

где $\lim_{\|\mathbf{H}\|\to 0} \dfrac{\|o(\mathbf{H})\|}{\|\mathbf{H}\|} = 0$ и $\mathbf{T}+\mathbf{H} \in U$.

Производное отображение обозначим через $\dfrac{df}{d\mathbf{H}}$.

Дифференциал $df \in \mathcal{E}_n$ функции $f(\mathbf{T})$ задается равенством

$$df = \frac{df}{d\mathbf{T}} \bigwedge_m d\mathbf{T}$$

и является функцией двух переменных $\mathbf{T} \in U$ и $\mathbf{H} \in \mathcal{E}_m$.

Так как пространства $\mathcal{E}_m$ и $\mathcal{E}_n$ — банаховые, то справедливы все теоремы о дифференцируемых отображениях банаховых пространств. Поэтому отметим только некоторые формулы для вычисления производных.

1. Если функции $f\colon \mathcal{E}_s \to \mathcal{E}_n$ и $g\colon \mathcal{E}_s \to \mathcal{E}_n$ — дифференцируемые в точке $\mathbf{T} \in U \subset \mathcal{E}_s$ и $k \leqq \min(m,n)$, то имеют место следующие формулы о дифференцировании обобщенного произведения тензоров [3]:

$$\frac{d}{d\mathbf{T}}\left(f \bigwedge_k g\right) =^{[s]} \left[\frac{df^{[s]}}{d\mathbf{T}} \bigwedge_k g\right] + f \bigwedge_k \frac{dg}{d\mathbf{T}}. \tag{10}$$

$$d\left(f \bigwedge_k g\right) = df \bigwedge_k g + f \bigwedge_k dg.$$

Формулу (10) можно записать в другом виде:

$$\frac{d}{d\mathbf{T}}\left(f \bigwedge_k g\right) = \left[{}^{[k]}g \bigwedge_k {}^{[m-k]} \frac{df}{d\mathbf{T}}\right]^{[m-k]} + f \bigwedge_k \frac{dg}{d\mathbf{T}}, \tag{11}$$

в котором валентности n и s не проявляются явным образом. От них зависит только валентность тензоров $\dfrac{df}{d\mathbf{T}} \in \mathcal{E}_{m+s}$ и $\dfrac{dg}{d\mathbf{T}} \in \mathcal{E}_{n+s}$. Частными случаями формулы (10) являются следующие равенства:

$$\frac{d}{d\mathbf{T}}\left(f \bigwedge_k g\right) = \frac{df}{d\mathbf{T}} \bigwedge_k g + f \bigwedge_k \frac{dg}{d\mathbf{T}}, \text{ если } \mathbf{T} \in \mathcal{E}_0, \tag{12}$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{d\mathbf{T}} = \mathbf{E}_{2s}, \quad \mathbf{T} \in \mathcal{E}_s;$$

$$\frac{d}{d\mathbf{T}}\left(\mathbf{A} \bigwedge_k \mathbf{T}\right) = \mathbf{A} \bigwedge_k \mathbf{E}_{2s}. \tag{13}$$

2. Если $g\colon \mathcal{E}_s \to \mathcal{E}_m$ и $f\colon \mathcal{E}_m \to \mathcal{E}_n$ и $g(\mathbf{T})$ и $f(\mathbf{Y})$ — дифференцируемые функции соответственно в окрестностях точек $\mathbf{T}_0 \in \mathcal{E}_s$ и $\mathbf{Y}_0 = g(\mathbf{T}_0) \in \mathcal{E}_m$, то функция $f \circ g\colon \mathcal{E}_s \to \mathcal{E}_n$, определенная равенством $f \circ g(\mathbf{T}) = f(g(\mathbf{T}))$, — дифференцируемая в точке $\mathbf{T}_0$ и

$$\frac{d}{d\mathbf{T}}(f \circ g)(\mathbf{T}_0) = \frac{df}{d\mathbf{Y}}(\mathbf{Y}_0) \bigwedge_m \frac{dg}{d\mathbf{T}}(\mathbf{T}_0),$$

$$d(f \circ g)(\mathbf{T}_0) = \frac{df}{d\mathbf{Y}}(\mathbf{Y}_0) \bigwedge_m dg(\mathbf{T}_0).$$

3. Пусть функции $\mathbf{X}_i = \mathbf{X}_i(t) \in \mathcal{E}_{\nu_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ — дифференцируемые в точке $t_0 \in (\alpha, \beta) \subset R$, $\mathbf{X}_i(t_0) = \mathbf{X}_i^0$ и функция $\mathbf{Z} = f(t, \mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n) \in \mathcal{E}_p$ — дважды дифференцируемая в окрестности точки $(t, \mathbf{X}_1^0, \ldots, \mathbf{X}_n^0)$. Рассмотрим составную функцию $\mathbf{Z}(t) = f(t, \mathbf{X}_1(t), \ldots, \mathbf{X}_n(t))$. Из теоремы о дифференцировании составных функции вытекает, что производная в точке t_0 функции $\mathbf{Z}(t)$ существует и вычисляется по формуле

$$\frac{d\mathbf{Z}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_i} \bigwedge_{\nu_i} \dot{\mathbf{X}}_i, \tag{14}$$

а ее дифференциал определяется из равенства

$$d\mathbf{Z} = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_i} \bigwedge_{\nu_i} d\mathbf{X}_i \tag{15}$$

($\dot{\mathbf{X}}_i$ — производная функции $\mathbf{X}_i$ по отношению к переменной t, $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_i}$ — частные производные функции f по отношению к $\mathbf{X}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$).

Рассматривая производную $\dfrac{d\mathbf{Z}}{dt} = \dot{\mathbf{Z}}$ как функцию переменных t, $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n, \dot{\mathbf{X}}_1, \ldots, \dot{\mathbf{X}}_n$ и пользуясь симметричностью второй производной дважды дифференцируемой функции, можно доказать равенство

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{X}_i} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}_i}\frac{d\mathbf{Z}}{dt} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{16}$$

Как приложение полученных формул рассмотрим некоторые частные случаи.

1) Пусть задана скалярная функция векторного аргумента $f(\mathbf{r})$. Если x_1, x_2, x_3 — координаты вектора $\mathbf{x}$ относительно некоторого базиса $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^{\mathrm{T}}$, можно записать $f(\mathbf{r}) = \hat{f}(x_1, x_2, x_3)$. Покажем, что $\dfrac{df}{d\mathbf{r}} = \operatorname{grad}\hat{f}$.

Действительно, применяя теорему о дифференцировании составных функций, получаем

$$\frac{df}{d\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i}\frac{dx_i}{d\mathbf{r}}.$$

Так как $x_i = \mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_i (i = 1, 2, 3)$, то $\dfrac{dx_i}{d\mathbf{r}} = \dfrac{d}{d\mathbf{r}}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_i)$.

Пользуясь формулой (13) находим, что

$$\frac{dx_i}{d\mathbf{r}} = \mathbf{e}_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

откуда следует, что $\dfrac{df}{d\mathbf{r}} = \sum\limits_{i=1}^{3} \dfrac{\partial \hat{f}}{\partial x_i}\mathbf{e}_i = \operatorname{grad}\hat{f}$.

2) Рассмотрим векторное поле, определенное векторной функцией $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$. Аналогичным примеру 1) образом, представляя вектор $\mathbf{a}$ суммой

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_i,$$

где $a_i(x_1, x_2, x_3)$ — скалярные функции, получаем

$$\frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \mathbf{r}} = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\mathbf{e}_j\right)\mathbf{e}_i.$$

Следовательно, производная $\dfrac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{r}}$ является тензором второй валентности, матрица которого относительно базиса имеет вид $(a_{ij})_{i,j=1}^{3}$, где $a_{ij} = \dfrac{\partial a_i}{\partial x_j}$.

Важными характеристиками векторного поля являются rot**a** и div**a**. По определению

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)\mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)\mathbf{e}_3$$

и его можно записать в виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = -\left(\frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{r}}\right)_\times = -\mathbf{D} \bigwedge_2 \frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{r}}.$$

Для $\operatorname{div}\mathbf{a} = \sum\limits_{i=1}^{3} \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$ получаем выражение

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \mathbf{E}_2 \bigwedge_2 \frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{r}}.$$

2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

В этом параграфе основные величины, определяющие абсолютное и относительное движение точки и абсолютно твердого тела, будут представлены в тензорном виде, удобном для дальнейших рассмотрений.

Рассмотрим сначала движение точки M относительно двух координатных систем — абсолютной, $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, и относительной, $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$. Абсолютное и относительное движение определяются векторными функциями $\mathbf{r}(t) = \overline{OM}(t)$ и $\mathbf{r}'(t) = \overline{O'M}(t)$. Предполагаем также, что известно движение пространства $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ относительно пространства $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. Пусть оно задается вектором $\mathbf{r}_0(t) = \overline{OO'}$, переводящим точку O в точку O', и тензором углового положения $\mathbf{Z} = \mathbf{e}'^{\mathbf{T}}\mathbf{e} = \mathbf{e}'_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}'_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}'_3\mathbf{e}_3$. Очевидно,

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{r}'(t).$$

Вектор $\mathbf{r}'$ представляется своими координатами относительно базиса $\mathbf{e}'$ суммой

$$\mathbf{r}' = (\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}'_1)\mathbf{e}'_1 + (\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}'_2)\mathbf{e}'_2 + (\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}'_3)\mathbf{e}'_3.$$

Применяя формулу (2), записываем $\mathbf{r}'$ в виде $\mathbf{r}'\cdot(\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_3\mathbf{e}'_3)$. Таким образом получаем, что координатную запись данного вектора относительно некоторого ортонормированного базиса $\underline{\mathbf{e}}'$ можно получить путем умножения вектора на единичный тензор $\mathbf{E}_2$, представленный в виде

$$\mathbf{E}_2 = \underline{\mathbf{e}}'^{\mathbf{T}}\underline{\mathbf{e}}' = \mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_3\mathbf{e}'_3.$$

Относительными скоростью и ускорением точки M называются векторы

$$\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}' = (\mathbf{r}'\cdot\mathbf{e}'_1)^{\cdot}\,\mathbf{e}'_1 + (\mathbf{r}'\cdot\mathbf{e}'_2)^{\cdot}\,\mathbf{e}'_2 + (\mathbf{r}'\cdot\mathbf{e}'_3)^{\cdot}\,\mathbf{e}'_3,$$

$$\overset{\circ\circ}{\mathbf{r}'} = (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{e}_1')^{\cdot\cdot}\mathbf{e}_1' + (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{e}_2')^{\cdot\cdot}\mathbf{e}_2' + (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{e}_3')^{\cdot\cdot}\mathbf{e}_3'.$$

Чтобы найти зависимость между абсолютными и относительными скоростями и ускорениями точки, рассмотрим сначала движение базиса $\mathbf{e}'$ относительно базиса $\underline{\mathbf{e}}$, которое определяется тензором $\mathbf{Z}$. Матрица координат тензора Z относительно любого ортонормированного базиса является ортонормированной. Такие тензоры будем называть ортонормированными. Совокупность всех ортонормированных тензоров образует группу вращений.

Для ортонормированного тензора $\mathbf{Z}$ в каждый момент времени выполняется равенство

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z}^{\mathbf{T}} = \mathbf{E}_2. \tag{17}$$

Дифференцируя относительно t, получаем, что

$$\dot{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{Z}^{\mathbf{T}} + \mathbf{Z} \cdot \dot{\mathbf{Z}}^{\mathbf{T}} = \mathbf{O}_2,$$

где $\mathbf{O}_2$ — нулевый элемент пространства $\mathcal{E}_2$. Таким образом получаем, что тензор $\dot{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{Z}^{\mathbf{T}} = -\mathbf{Z} \cdot \dot{\mathbf{Z}}^{\mathbf{T}} = -(\dot{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{Z}^{\mathbf{T}})$ является кососимметрическим, и поэтому можно найти вектор $\overline{\omega}$, для которого

$$\tilde{\overline{\omega}} = \dot{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{Z}^{\mathbf{T}} = -\mathbf{Z} \cdot \dot{\mathbf{Z}}^{\mathbf{T}}. \tag{18}$$

Вектор $\overline{\omega}$ называется абсолютной угловой скоростью базиса $\underline{\mathbf{e}}'$ (тензора $\mathbf{Z}$).

Используя равенство (17), записываем вектор $\mathbf{r}'$ в виде $\mathbf{r}' = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{u}$, где $\mathbf{u} = \mathbf{Z}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{r}'$, откуда находим, что $\dot{\mathbf{r}}' = \dot{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{Z} \cdot \dot{\mathbf{u}}$. Так как $\dot{\mathbf{u}} = (\mathbf{Z}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{r}')^{\bullet} = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{r}')^{\bullet} + \mathbf{e}_2(\mathbf{e}_2' \cdot \mathbf{r}')^{\bullet} + \mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{e}_3' \cdot \mathbf{r}')^{\bullet}$, то умножение слева на тензор $\mathbf{Z}$ приводит к выражению

$$\mathbf{Z} \cdot \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{e}_1'(\mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{r}')^{\bullet} + \mathbf{e}_2'(\mathbf{e}_2' \cdot \mathbf{r}')^{\bullet} + \mathbf{e}_3'(\mathbf{e}_3' \cdot \mathbf{r}')^{\bullet} = \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}'.$$

Применяя формулу (18) для слагаемого $\dot{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{u} = \dot{\mathbf{Z}} \cdot (\mathbf{Z}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{r}')$, находим, что

$$\dot{\mathbf{r}}' = \tilde{\overline{\omega}} \cdot \mathbf{r}' + \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}' = \overline{\omega} \times \mathbf{r}' + \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}'.$$

Отсюда получаем связь между абсолютной скоростью $\dot{\mathbf{r}}$ точки и ее относительной скоростью $\overset{\circ}{\mathbf{r}}{}'$:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_0 + \overline{\omega} \times \mathbf{r}' + \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}'.$$

Дифференцируя это равенство еще раз, получаем

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\overline{\omega}} \times \mathbf{r}' + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\overline{\omega} \times \overset{\circ}{\mathbf{r}}{}' + \overset{\circ\circ}{\mathbf{r}}{}'.$$

В частном случае, когда $O = O'$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}' = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{u}$, где $\mathbf{u} = \text{const}$, т.е. когда точка M — неподвижная относительно пространства $O\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$, получаем, что

$$\dot{\mathbf{r}} = \overline{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Рассмотрим теперь вращение некоторого ортонормированного базиса относительно другого. Пусть в абсолютном пространстве заданы два вращающихся ортонормированных базиса $\underline{\mathbf{e}}^{(1)} = (\mathbf{e}_1^{(1)}, \mathbf{e}_2^{(1)}, \mathbf{e}_3^{(1)})^{\mathbf{T}}$ и $\underline{\mathbf{e}}^{(2)} = (\mathbf{e}_1^{(2)}, \mathbf{e}_2^{(2)}, \mathbf{e}_3^{(2)})^{\mathbf{T}}$ и неподвижный базис $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^{\mathbf{T}}$. Тензоры

$$\mathbf{Z}_1 = \underline{\mathbf{e}}^{(1)\mathbf{T}}\underline{\mathbf{e}}, \mathbf{Z}_2 = \underline{\mathbf{e}}^{(2)\mathbf{T}}\underline{\mathbf{e}} \tag{19}$$

определяют вращения, приводящие базис $\underline{\mathbf{e}}$ соответственно в базисы $\underline{\mathbf{e}}^{(1)}$ и $\underline{\mathbf{e}}^{(2)}$ и таким образом задают абсолютные вращения этих базисов. Их абсолютные угловые скорости $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$ получаем из равенства

$$\tilde{\overline{\omega}}_1 = \dot{\mathbf{Z}}_1 \cdot \mathbf{Z}_1^{\mathbf{T}} = \underline{\dot{\mathbf{e}}}^{(1)^{\mathbf{T}}}\underline{\mathbf{e}}^{(1)}, \quad \tilde{\overline{\omega}}_2 = \dot{\mathbf{Z}}_2 \cdot \mathbf{Z}_2^{\mathbf{T}} = \underline{\dot{\mathbf{e}}}^{(2)^{\mathbf{T}}}\underline{\mathbf{e}}^{(2)}. \tag{20}$$

Матрицы координат тензоров $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$ в базисе $\underline{\mathbf{e}}$ можно получить, умножив слева равенства (19) на единичный тензор $\mathbf{E}_2 = \underline{\mathbf{e}}^{\mathbf{T}}\underline{\mathbf{e}}$ и применив ассоциативный закон

$$\mathbf{Z}_1 = (\underline{\mathbf{e}}^{\mathbf{T}}\underline{\mathbf{e}}) \cdot \underline{\mathbf{e}}^{(1)\mathbf{T}}\underline{\mathbf{e}} = \underline{\mathbf{e}}^{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{e}} \cdot \underline{\mathbf{e}}^{(1)\mathbf{T}})\underline{\mathbf{e}}, \quad \mathbf{Z}_2 = \underline{\mathbf{e}}^{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{e}^{(2)\mathbf{T}})\underline{\mathbf{e}}^{(2)}.$$

Дифференцируем относительно времени

$$\dot{\mathbf{Z}}_1 = \underline{\mathbf{e}}^{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{e}} \cdot \underline{\mathbf{e}}^{(1)^{\mathbf{T}}})^{\bullet}\underline{\mathbf{e}}, \dot{\mathbf{Z}}_2 = \underline{\mathbf{e}}^{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{e}} \cdot \underline{\mathbf{e}}^{(2)^{\mathbf{T}}})^{\bullet}\underline{\mathbf{e}}, \tag{21}$$

откуда следует, что матрицы $(\underline{\mathbf{e}} \cdot \underline{\mathbf{e}}^{(1)^{\mathbf{T}}})^{\bullet}$ и $(\underline{\mathbf{e}} \cdot \underline{\mathbf{e}}^{(2)^{\mathbf{T}}})^{\bullet}$ являются матрицами координат тензоров $\dot{\mathbf{Z}}_1$ и $\dot{\mathbf{Z}}_2$ относительно базиса $\underline{\mathbf{e}}$. Рассмотрим тензор

$$\Phi = \underline{\mathbf{e}}^{(2)^{\mathbf{T}}}\underline{\mathbf{e}}^{(1)},$$

определяющий вращение базиса $\underline{\mathbf{e}}^{(2)}$ относительно базиса $\underline{\mathbf{e}}^{(1)}$. Тензор Φ выражается тензорами $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$ по формуле

$$\Phi = \mathbf{Z}_2 \cdot \mathbf{Z}_1^{\mathbf{T}}. \tag{22}$$

Матрицу координат тензора Φ относительно базиса $\underline{\mathbf{e}}^{(1)}$ получим, умножив слева равенство (22) на тензор $\mathbf{E}_2$, который сейчас записываем как произведение $\underline{\mathbf{e}}^{(1)^{\mathbf{T}}}\underline{\mathbf{e}}^{(1)}$:

$$\Phi = \mathbf{E}_2 \cdot \Phi = \underline{\mathbf{e}}^{(1)\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{e}}^{(1)} \cdot \underline{\mathbf{e}}^{(2)\mathbf{T}})\underline{\mathbf{e}}^{(1)}.$$

Аналогично формулам (21) и (20) вводим тензор

$$\overset{\circ}{\Phi} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{e}}^{(1)} \cdot \underline{\mathbf{e}}^{(2)\mathbf{T}})^{\bullet}\underline{\mathbf{e}}^{(1)},$$

который будем называть производной тензора Φ по времени относительно базиса $\underline{e}^{(1)}$ и вектор $\overline{\Omega}$, определенный равенствами

$$
(23)\qquad
\begin{aligned}
\overline{\Omega} &= \overset{\circ}{\Phi}\cdot\Phi^{\mathrm{T}},\\
\overline{\Omega} &= \frac{1}{2}\mathbf{D}\bigwedge_{2}\tilde{\overline{\Omega}},
\end{aligned}
$$

который является относительной угловой скоростью базиса по отношению к базису $\underline{e}^{(1)}$.

Чтобы найти зависимость между тензорами $\overline{\Omega}$, $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$, подставляем выражение $\Phi^{\mathrm{T}} = \underline{e}^{(1)^{\mathrm{T}}}\underline{e}^{(2)}$ в (23) и после применения правила дифференцирования (12) для произведения $\underline{e}^{(1)}\cdot\underline{e}^{(2)^{\mathrm{T}}}$ получаем

$$\tilde{\overline{\Omega}} = \underline{e}^{(1)^{\mathrm{T}}}(\underline{\dot{e}}^{(1)}\cdot\underline{e}^{(2)^{\mathrm{T}}} + \underline{e}^{(1)}\cdot\underline{\dot{e}}^{(2)^{\mathrm{T}}})\underline{e}^{(1)}\cdot\underline{e}^{(1)^{\mathrm{T}}}\underline{e}^{(2)}.$$

Используя равенства $\underline{e}^{(1)^{\mathrm{T}}}\underline{e}^{(1)} = \underline{e}^{(2)^{\mathrm{T}}}\underline{e}^{(2)} = \mathbf{E}_2$ и

$$\underline{e}^{(1)}\cdot\underline{e}^{(1)^{\mathrm{T}}} = \begin{pmatrix} e_1^{(1)} \\ e_2^{(1)} \\ e_3^{(1)} \end{pmatrix}\cdot(e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, e_3^{(1)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и формулы (20), находим, что $\tilde{\overline{\Omega}} = -\tilde{\overline{\omega}}_1 + \tilde{\overline{\omega}}_2$, откуда следует равенство

$$(24)\qquad \overline{\omega}_2 = \overline{\omega}_1 + \overline{\Omega}.$$

Вторым основным объектом изучения в аналитической маханике является абсолютно твердое тело. Его положение в абсолютном пространстве определяется неизменно связанной с телом декартовой координатной системой $O'e_1'e_2'e_3'$. Если $Oe_1e_2e_3$ — неподвижная декартова координатная система, то абсолютное движение базиса $O'e_1'e_2'e_3'$ задается функциями $\mathbf{r}_0(t) = \overline{OO'}$ и $\mathbf{Z}(t) = e_1'e_1 + e_2'e_2 + e_3'e_3$. Его абсолютная угловая скорость определяется равенством

$$\overline{\omega} = \frac{1}{2}\mathbf{D}\bigwedge_{2}\dot{\mathbf{Z}}\cdot\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}.$$

Если M — произвольная точка тела и $\mathbf{r} = \overline{OM}$, то

$$(25)\qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{Z}\cdot\mathbf{u},\quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_0 + \overline{\omega}\times\mathbf{r},$$

где $\mathbf{u}$ — векторная константа, определяемая начальными положениями точек O' и M, $\mathbf{u} = \overline{OM}(t_0)$.

В формуле (25) первое слагаемое определяет поступательное движение тела, а второе — вращение пространства вокруг точки O', которое приводит репер $O'\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ в репер $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$. При этом вращении каждая точка M переходит из своего начального положения $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0(t_0) + \mathbf{Z}(t_0)\cdot\mathbf{u}$ в положение $\mathbf{r}(t)$ в момент времени t. Таким образом при известных функциях $\mathbf{r}_0(t)$ и $\mathbf{Z}(t)$ формула (25) определяет движение точки M тела относительно координатной системы $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$.

Пусть теперь $\mathbf{J}_c$ — тензор инерции тела относительно некоторой его точки C. Предположим, что в точке C задан ортонормированный базис $\underline{\mathbf{e}}''(t_0) = (\mathbf{e}''_1(t_0), \mathbf{e}''_2(t_0), \mathbf{e}''_3(t_0))^{\mathbf{T}}$ и обозначим через $\underline{J_c} = (J_{ij})^3_{i,j=1}$ матрицу тензора в этом базисе. Изменение векторов $\mathbf{e}''_i(t)$ в абсолютном пространстве определяется формулами

$$\mathbf{e}''_i(t) = \mathbf{Z}(t)\cdot\mathbf{e}''_i(t_0) \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{26}$$

В каждом моменте времени тензор $\mathbf{J}_c$ имеет вид $\mathbf{J}_c = \underline{\mathbf{e}}''^{\mathbf{T}}(t)\underline{J_c}\underline{\mathbf{e}}''(t)$. Выражая векторы $\mathbf{e}''_i(t)$ по формуле (26), получается, что тензор $\mathbf{J}_c$ можно представить в виде

$$\mathbf{J}_c = \mathbf{Z}\cdot\mathbf{J}_0^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}, \tag{27}$$

где $\mathbf{J}_0$, подобно $\mathbf{u}$ в формуле (25), является постоянным (симметрическим) тензором

$$\mathbf{J}_0 = \mathbf{J}_c(t_0) = \underline{\mathbf{e}}''^{\mathbf{T}}(t_0)\underline{J_c}\underline{\mathbf{e}}''(t_0).$$

Если рассматриваемое тело несвободное, то величины $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{Z}$ выражаются посредством других тензорных величин $\mathbf{X}_i = \mathbf{X}_i(t) \in \mathcal{E}_{\nu_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$, которые определяются ограничениями, наложенными другими телами на движение тела.

Покажем, что имеют место соотношения

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{X}_i} = {}^{[1]}\tilde{\mathbf{r}}\cdot\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\mathbf{X}_i} = -\tilde{\mathbf{r}}\cdot\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\dot{\mathbf{X}}_i}, \tag{28}$$

$$\frac{\partial\mathbf{J}_c}{\partial\mathbf{X}_i} = 2^{[1]}\tilde{\mathbf{J}}_c\cdot\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\dot{\mathbf{X}}_i} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{29}$$

Найдем сначала выражение для тензора $\tilde{\overline{\omega}} = \dot{\mathbf{Z}}\cdot\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}$. Для вычисления производной $\dot{\mathbf{Z}}$ применяем теорему о дифференцировании составных функций

$$\dot{\mathbf{Z}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathbf{Z}}{\partial\mathbf{X}_i}\bigwedge_{\nu_i}\dot{\mathbf{X}}_i.$$

Переставляя, согласно правилу (4), сомножители в выражении для $\tilde{\overline{\omega}}$, получаем

$$(30)\qquad \tilde{\tilde{\omega}} = \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{Z} \cdot^{[1]} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} \right]^{[1]} \bigwedge_{\nu_i} \dot{\mathbf{X}}_i,$$

откуда, так как произведения в скобках не зависят от $\dot{\mathbf{X}}_i$, следует формула

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} = \left[\mathbf{Z}^{[1]}_{\cdot} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} \right]^{[1]} = -\mathbf{Z} \frac{\partial \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} \in \mathcal{E}_{\nu_i+2}.$$

Последное равенство получается дифференцрованием равенства $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}_2$ относительно переменной $\mathbf{X}_i$. Таким образом тензор второй валентности $\tilde{\tilde{\omega}}$ представляется суммой

$$\tilde{\tilde{\omega}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{\tilde{\omega}}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} \bigwedge_{\nu_i} \dot{\mathbf{X}}_i.$$

Имея в виду формулу (8) и используя свойство (13), получаем также зависимость

$$(31)\qquad \begin{aligned} \overline{\omega} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} \bigwedge_{\nu_i} \dot{\mathbf{X}}_i, \\ \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} &= \frac{1}{2} \mathbf{D} \bigwedge_2 \frac{\partial \tilde{\tilde{\omega}}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} \in \mathcal{E}_{\nu_i+1}. \end{aligned}$$

С другой стороны, $\tilde{\tilde{\omega}} = -\mathbf{D} \cdot \overline{\omega}$ и таким образом

$$\frac{\partial \tilde{\tilde{\omega}}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} = -\mathbf{D} \cdot \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i},$$

$$(32)\qquad \mathbf{Z} \cdot^{[1]} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} = -^{[1]} \left(\mathbf{D} \cdot \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} \right), \qquad \mathbf{Z} \cdot \frac{\partial \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} = \mathbf{D} \cdot \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i}.$$

Применяя правило (11) и используя равенства $\mathbf{u} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{Z}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Z}$, вычисляем производную

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} &= \left[\mathbf{u} \cdot^{[1]} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} \right]^{[1]} = \left[(\mathbf{u} \cdot \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}) \cdot (\mathbf{Z} \cdot^{[1]} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i}) \right]^{[1]} \\ &= \left[\mathbf{r} \cdot (\mathbf{Z} \cdot^{[1]} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i}) \right]^{[1]} = -\left[\mathbf{r} \cdot^{[1]} (\mathbf{D} \cdot \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i}) \right]^{[1]}. \end{aligned}$$

В последнем произведении производится свертывание вектора со вторым индексом тензора $\mathbf{D}$. Так как тензор $\mathbf{D}$ — кососимметрический, то это произведение можно записать в виде

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{D}) \cdot \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} = -\tilde{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i}.$$

Таким образом формула (28) доказана.

Чтобы вычислить производную $\dfrac{\partial \mathbf{J}_c}{\partial \mathbf{X}_i} \in \mathcal{E}_{\nu_i+2}$, проводим следующие преобразования:

$$\frac{\partial \mathbf{J}_c}{\partial \mathbf{X}_i} = \left[\mathbf{Z} \cdot \mathbf{J}_0^{\mathbf{T}} \cdot {}^{[1]} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{X}_i}\right]^{[1]} + \mathbf{Z} \cdot \mathbf{J}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{Z}^{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{X}_i}$$

$$= \left[(\mathbf{Z} \cdot \mathbf{J}_0^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{Z}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{Z}) \cdot {}^{[1]} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{X}_i}\right]^{[1]} + \mathbf{Z} \cdot \mathbf{J}_0 \cdot (\mathbf{Z}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{Z}) \cdot \frac{\partial \mathbf{Z}^{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{X}_i}$$

$$= \left[\mathbf{J}_c^{\mathbf{T}} \cdot (\mathbf{Z} \cdot {}^{[1]} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{X}_i})\right]^{[1]} + \mathbf{J}_c \cdot \left(\mathbf{Z} \cdot \frac{\partial \mathbf{Z}^{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{X}_i}\right)$$

$$= - \left[\mathbf{J}_c^{\mathbf{T}} \cdot {}^{[1]} \left(\mathbf{D} \cdot \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \mathbf{X}_i}\right)\right]^{[1]} + \mathbf{J}_c \cdot \left(\mathbf{D} \cdot \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \mathbf{X}_i}\right).$$

Используя, что в первом слагаемом первый индекс тензора свертывается со вторым индексом тензора $\mathbf{D}$, получаем произведение

$$-{}^{[1]}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{J}_c) \cdot \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \mathbf{X}_i} = {}^{[1]} \widetilde{\mathbf{J}}_c \cdot \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \mathbf{X}_i}.$$

Кроме того, $\mathbf{J}_c \cdot \mathbf{D} = (\mathbf{D} \cdot \mathbf{J}_c)^{[1]} = {}^{[1]}(\widetilde{\mathbf{J}}_c^{\mathbf{T}})$, откуда находим, что

$$\frac{\partial \mathbf{J}_c}{\partial \mathbf{X}_i} = {}^{[1]}(\widetilde{\mathbf{J}}_c + \widetilde{\mathbf{J}}_c^{\mathbf{T}}) \cdot \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \mathbf{X}_i}.$$

Формула (29) следует из симметричности тензора $\mathbf{J}_c$.

Найдем производные угловой скорости $\overline{\omega}$ и тензора $\widetilde{\overline{\omega}}$ относительно тензора $\mathbf{Z}$. Из равенства (11) получаем

$$\frac{\partial \widetilde{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{Z}}} = \left(\mathbf{Z} \cdot {}^{[1]} \frac{\partial \dot{\mathbf{Z}}}{\partial \dot{\mathbf{Z}}}\right)^{[1]} = (\mathbf{Z} \cdot {}^{[1]} \mathbf{E}_4)^{[1]} = (\mathbf{Z}\mathbf{E}_2)^{[1]},$$

$$\frac{\partial \widetilde{\omega}}{\partial \mathbf{Z}} = - \left(\dot{\mathbf{Z}} \cdot {}^{[1]} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{Z}}\right)^{[1]} = -(\dot{\mathbf{Z}} \cdot {}^{[1]} \mathbf{E}_4)^{[1]} = -(\dot{\mathbf{Z}}\mathbf{E}_2)^{[1]}.$$

Отсюда, умножая слева на тензор $\dfrac{1}{2}\mathbf{D}$, вычисляем производные

$$\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \mathbf{Z}} = -\frac{1}{2}^{[1]}(\mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{Z}}), \qquad \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{Z}}} = \frac{1}{2}^{[1]}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{Z}). \tag{33}$$

Наконец рассмотрим вопросы, связанные с параметризацией ортонормированных тензоров. Обычно, чтобы параметризировать данный ортонормированный тензор $\mathbf{Z}$, рассматривается его матрица координат относительно некоторого ортонормированного базиса $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)^{\mathbf{T}}$. Так как тензор $\mathbf{Z}$ — ортонормированный, то его координаты можно выразить посредством трех скалярных величин ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3. Производные $\dfrac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \phi_i}$ являются тензорами второй валентности и удовлетворяют соотношениям

$$\left(\mathbf{Z}\ {}^{.[1]}\ \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \phi_i}\right)^{[1]} + \mathbf{Z} \cdot \frac{\partial \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}}{\partial \phi_i} = \mathbf{O}_2;$$

откуда, следуя выводу формулы (18), получаем, что существуют векторы $\mathbf{p}_i$, для которых выполняются равенства

$$\widetilde{\mathbf{p}}_i = \left(\mathbf{Z}\ {}^{.[1]}\ \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \phi_i}\right)^{[1]} = -\mathbf{Z} \cdot \frac{\partial \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}}{\partial \phi_i} \quad (i = 1,\, 2,\, 3). \tag{34}$$

Если $\phi_i = \phi_i(t)(i = 1, 2, 3)$, то угловая скорость $\overline{\omega}$ тензора $\mathbf{Z}$ относительно базиса $\underline{e}$ определяется по формуле (31), которая теперь записывается в виде

$$\widetilde{\overline{\omega}} = \sum_{i=1}^{n} \dot{\phi}_i \widetilde{\mathbf{p}}_i, \qquad \overline{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \dot{\phi}_i \mathbf{p}_i. \tag{35}$$

Другие способы представления ортонормированного тензора основываются на существовании соответствия между группой вращений (ортонормированных тензоров) и векторным пространством $\mathcal{E}$ [4]. Это соответствие становится взаимно-однозначным, если считать, что определены векторы бесконечной длины и что вектор бесконечной длины, параллельный заданному направлению, одинственный. Тогда каждому вектору $\mathbf{c}$ сопоставляется ортонормированный тензор

$$\mathbf{Z} = \mathbf{E}_2 + \frac{2}{1 + \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}}(\widetilde{\mathbf{c}} + \widetilde{\mathbf{c}} \cdot \widetilde{\mathbf{c}}). \tag{36}$$

Наоборот, если $\mathbf{Z}$ — ортонормированный тензор, то существует единственный вектор $\mathbf{c}$, удовлетворяющий соотношению (36). Вектор $\mathbf{c}$ можно найти из равенства

$$\widetilde{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}}{1 + \mathbf{E}_2 \underset{2}{\wedge} \mathbf{Z}}. \tag{37}$$

Он называется вектор-параметром вращения, определенного тензором $\mathbf{Z}$. Направление вектора $\mathbf{c}$ задает ось поворота, а его длина $\gamma = |\mathbf{c}|$ равняется тангенсу половинного угла χ поворота, т. е.

$$|\mathbf{c}| = \gamma = \operatorname{tg}\frac{\chi}{2}. \tag{38}$$

Из равенств (36) и (37) следует, что если $\mathbf{c} = \mathbf{O}$, то $\mathbf{Z} = \mathbf{E}_2$, а если $\chi = \pi$, то длина вектор-параметра $\mathbf{c}$ обращается в бесконечность.

Допустим, что вектор $\mathbf{c}$ в равенстве (36) является функцией времени. Нетрудно проверить, что производная $\dot{\mathbf{Z}}$ определяется равенством

$$\dot{\mathbf{Z}} = \frac{2}{1+\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}}(\dot{\tilde{\mathbf{c}}} + \dot{\tilde{\mathbf{c}}}\cdot\tilde{\mathbf{c}} + \tilde{\mathbf{c}}\cdot\dot{\tilde{\mathbf{c}}}) - \frac{4}{(1+\mathbf{c}\cdot\mathbf{c})^2}(\tilde{\mathbf{c}} + \tilde{\mathbf{c}}\cdot\tilde{\mathbf{c}}).$$

Умножая справа на тензор $\mathbf{Z}^{\mathrm{T}} = \frac{2}{1+\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}}(-\tilde{\mathbf{c}}+\tilde{\mathbf{c}}\cdot\tilde{\mathbf{c}})$, после преобразований находим вражение для тензора $\tilde{\overline{\omega}} = \dot{\mathbf{Z}}\cdot\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}$:

$$\tilde{\overline{\omega}} = \frac{2}{1+\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}}(\dot{\tilde{\mathbf{c}}} + \tilde{\tilde{\mathbf{c}}}\cdot\dot{\mathbf{c}}),$$

откуда получаем, что абсолютная угловая скорость тензора вычисляется по формуле

$$\overline{\omega} = \frac{2}{1+\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}}(\dot{\mathbf{c}} + \tilde{\mathbf{c}}\cdot\dot{\mathbf{c}}) = \frac{2}{1+\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}}(\dot{\mathbf{c}} + \mathbf{c}\times\dot{\mathbf{c}}).$$

Если положить $\mathbf{q} = \frac{}{c}|\mathbf{c}|$, тензор $\mathbf{Z}$ можно записать в виде

$$\mathbf{Z} = \mathbf{E}_2 + (1-\cos\chi)\tilde{\mathbf{q}}\cdot\tilde{\mathbf{q}} + \sin\chi\tilde{\mathbf{q}}, \tag{39}$$

где угол χ определяется равенством (38).

Таким образом тензор $\mathbf{Z}$ представляется в виде функции двух величин — единичного вектора $\mathbf{q}$ и скалярной величины χ. Эти величины являются параметрами Эйлера для данного тензора $\mathbf{Z}$. Легко получить выражение

$$\overline{\omega} = [(1-\cos\chi)\tilde{\mathbf{q}} + \sin\chi\mathbf{E}_2]\cdot\dot{\mathbf{q}} + \dot{\chi}\mathbf{q}, \tag{40}$$

откуда следуют соотношения

$$\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\dot{\mathbf{q}}} = (1-\cos\chi)\tilde{\mathbf{q}} + \sin\chi\mathbf{E}_2, \qquad \frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\dot{\chi}} = \mathbf{q}.$$

Отметим, что заданные формулами (36) и (39) способы параметризации тензора $\mathbf{Z}$ не связанны с выбором какого-либо базиса в пространстве $\mathcal{E}$. Если такой базис выбран, то вектор $\mathbf{c}$ выражается своими координатами c_1, c_2, c_3, а единичный вектор $\mathbf{q}$ — двумя независимыми скалярными величинами q_1, q_2. В таком случае ортонормированный тензор, определенный формулами (36) или (39), выражается посредством скалярных параметров c_1, c_2, c_3 или q_1, q_2 и χ соответственно.

Очень часто в механике приходится иметь дело с ортонормированными тензорами вида

$$\mathbf{Z} = \mathbf{e}'_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}'_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}'_3\mathbf{e}_3, \tag{41}$$

где $\underline{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^{\mathrm{T}}$ и $\underline{e}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)^{\mathrm{T}}$ — ортонормированные базисы. Тензор (41) определяет вращение, приводящее базис $\underline{e}$ в базис $\underline{e}'$. Вектор-параметр c для тензора (41) получаем из формулы (37):

$$\tilde{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{e}'_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}'_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}'_3\mathbf{e}_3 - (\mathbf{e}_1\mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}'_3)}{1 + \mathbf{E}_2 \bigwedge\limits_2 (\mathbf{e}'_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}'_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}'_3\mathbf{e}_3)}.$$

Поскольку $\mathbf{E}_2 \bigwedge\limits_2 \left(\sum\limits_{j=1}^{3} \mathbf{e}'_j\mathbf{e}_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{3} \mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_j$, $\mathbf{e}'_i\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_i\mathbf{e}'_i = \widetilde{\tilde{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}'_i} = \widetilde{\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}'_i}$, то

$$\mathbf{c} = \frac{\widetilde{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}'_1} + \widetilde{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}'_2} + \widetilde{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}'_3}}{1 + \sum\limits_{j=1}^{3} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}'_j},$$

откуда следует равенство

$$\mathbf{c} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}'_i}{1 + \sum\limits_{j=1}^{3} \mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_j}.$$

Рассмотрим другие способы параметризации тензора (41).

Известно, что базис $\underline{e}$ можно привести в базис $\underline{e}'$ с помощью трех последовательных вращений вокруг соответствующих осей. Если ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 — углы этих вращений, то тензор $\mathbf{Z}$ выражается ими, векторы, определенные равенством (34), являются единичными, а формулой (35) определяется угловая скорость $\overline{\omega}$ базиса $\underline{e}'$ относительно базиса $\underline{e}$. В зависимости от выбора осей вращений получим углы Эйлера, углы Крылова или углы Брайнта.

Укажем теперь способ параметризации тензора $\mathbf{Z}$ посредством одной векторной и одной скалярной величины.

Пусть $\mathbf{a}$ — постянный вектор в базисе $\underline{e}$. Будем предполагать, что базис $\mathbf{e}'$ вращается таким образом, что вектор $\mathbf{e}'_3$ остается все время неколлинеарным вектору $\mathbf{a}$, т. е. $\mathbf{a} \times \mathbf{e}'_3 \neq \mathbf{O}$. Вектор

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{e}'_3}{|\mathbf{a} \times \mathbf{e}'_3|}$$

находится в плоскости, определенной векторами $\mathbf{e}'_1$ и $\mathbf{e}'_2$. Обозначим через ϕ угол между векторами $\mathbf{e}'_1$ и $\mathbf{p}$ с положительным направлением отсчета, определенным вектором $\mathbf{e}'_3$. Можно записать соотношения

$$\mathbf{e}'_1 = \cos\phi\mathbf{p} + \sin\phi\mathbf{e}'_3 \times \mathbf{p},$$

$$\mathbf{e}'_2 = -\sin\phi\mathbf{p} + \cos\phi\mathbf{e}'_3 \times \mathbf{p}, \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}'_3.$$

Таким образом получаем, что положение базиса $\underline{e}'$ относительно базиса $\underline{e}$ определено, если известны положение единичного вектора $\mathbf{e}'_3$ и скалярная величина ϕ. Действительно, вектором $\mathbf{e}'_3$ определяются вектор $\mathbf{p}$ и промежуточный базис $\mathbf{e}''_1 = \mathbf{p}$, $\mathbf{e}''_2 = \mathbf{e}'_3 \times \mathbf{p}$, $\mathbf{e}''_3 = \mathbf{e}'_3$, а угол ϕ определяет вращение вокруг оси $\mathbf{e}'_3$, которое приводит базис $\underline{e}$ в базис $\underline{e}'$.

Используя формулу (39), можно представить векторы $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ в виде $\mathbf{e}'_i = \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{e}''_i$, где

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{E}_2 + (1 - \cos\phi)\widetilde{\mathbf{e}}'_3 \cdot \widetilde{\mathbf{e}}'_3 + \sin\phi\widetilde{\mathbf{e}}'_3.$$

Вводя тензор $\mathbf{Z} = \mathbf{e}''_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}''_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}''_3\mathbf{e}_3$, записываем также соотношения

$$\mathbf{Z} = \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{Z}'', \quad \overline{\omega}' = \overline{\Omega} + \overline{\omega}'',$$

в которых $\overline{\omega}'$ и $\overline{\omega}''$ — угловые скорости базисов $\underline{e}'$ и $\underline{e}''$ относительно базиса $\underline{e}$, а $\overline{\Omega}$ — относительная угловая скорость тензора $\mathbf{\Phi}$ по отношению к базису $\mathbf{e}''$. Из формулы (40) следует, что $\overline{\Omega} = \dot{\phi}\mathbf{e}'_3$. Для вычисления угловой скорости

$$\overline{\omega}'' = \frac{1}{2}(\mathbf{e}''_1 \times \dot{\mathbf{e}}''_1 + \mathbf{e}''_2 \times \dot{\mathbf{e}}''_2 + \mathbf{e}''_3 \times \dot{\mathbf{e}}''_3)$$

производим следующие преобразования:

$$\left(\frac{1}{|\mathbf{a} \times \mathbf{e}'_3|}\right)^{\bullet} = \left(\frac{1}{\sqrt{(\mathbf{a} \times \mathbf{e}'_3)^2}}\right)^{\bullet} = -\frac{1}{2\left[\sqrt{(\mathbf{a} \times \mathbf{e}'_3)^2}\right]^3}[(\mathbf{a} \times \mathbf{e}'_3)^2]^{\bullet} = \frac{\widetilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}'_3}{|\mathbf{a} \times \mathbf{e}'_3|^2};$$

$$\dot{\mathbf{e}}''_1 = \dot{\mathbf{p}} = \left(\frac{1}{|\mathbf{a} \times \mathbf{e}'_3|}\right)^{\bullet} \mathbf{a} \times \mathbf{e}'_3 + \frac{1}{|\mathbf{a} \times \mathbf{e}'_3|}\mathbf{a} \times \mathbf{e}'_3 = \frac{-\widetilde{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{a}\mathbf{p}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{e}'_3|} \cdot \mathbf{e}'_3;$$

$$\dot{\mathbf{e}}''_2 = (\widetilde{\mathbf{e}}'_3 \cdot \mathbf{p})^{\bullet} = -\widetilde{\mathbf{p}}\dot{\mathbf{e}}''_3 \cdot + \widetilde{\mathbf{e}}'_3 \cdot \dot{\mathbf{p}};$$

$$\omega'' = \frac{1}{2}[\widetilde{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}} + \widetilde{\widetilde{\mathbf{e}}'_3 \cdot \mathbf{p}} \cdot (\widetilde{\mathbf{e}}'_3 \cdot \mathbf{p})^{\bullet} + \widetilde{\mathbf{e}}'_3 \cdot \dot{\mathbf{e}}'_3]$$

$$= \frac{1}{2}[\widetilde{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}} + (\mathbf{p}\mathbf{e}'_3 - \mathbf{e}'_3\mathbf{p}) \cdot (-\widetilde{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{e}}'_3 + \widetilde{\mathbf{e}}'_3 \cdot \dot{\mathbf{p}}) + \widetilde{\mathbf{e}}'_3 \cdot \mathbf{e}'_3]$$

$$= \frac{1}{2}(\widetilde{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}} - \mathbf{p}\mathbf{e}'_3 \cdot \widetilde{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{e}}'_3 - \mathbf{e}'_3\mathbf{p} \cdot \widetilde{\mathbf{e}}'_3 \cdot \dot{\mathbf{p}}) + \widetilde{\mathbf{e}}'_3 \cdot \dot{\mathbf{e}}'_3).$$

Имеет место равенство

$$\widetilde{\mathbf{e}}'_3 = \widetilde{\mathbf{p}} \cdot (\widetilde{\widetilde{\mathbf{e}}'_3 \cdot \mathbf{p}}) = \widetilde{\mathbf{e}}'_3 \cdot \mathbf{p}\mathbf{p} - \mathbf{p}\widetilde{\mathbf{e}}'_3 \cdot \mathbf{p},$$

откуда следует, что

$$-\mathbf{p}\mathbf{e}'_3 \cdot \widetilde{\mathbf{p}} = -\mathbf{p}\widetilde{\mathbf{e}}'_3 \cdot \mathbf{p} = \widetilde{\mathbf{e}}'_3 - \widetilde{\mathbf{e}}'_3 \cdot \mathbf{p}\mathbf{p}.$$

Поставляя последнее равенство в выражение для угловой скорости ϖ'', получаем

$$\varpi'' = \frac{1}{2}(\widetilde{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}} - \mathbf{e}_3' \cdot \mathbf{pp} \cdot \dot{\mathbf{e}}_3' + \mathbf{e}_3'\mathbf{e}_3' \cdot \widetilde{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}} + 2\widetilde{\mathbf{e}}_3' \cdot \dot{\mathbf{e}}_3').$$

Так как

$$\widetilde{\mathbf{e}}_3' \cdot \mathbf{p} \;\; \mathbf{p}\dot{\mathbf{e}}_3' = \frac{\mathbf{e}_3' \times (\mathbf{a} \times \mathbf{e}_3')}{|\mathbf{a} \times \mathbf{e}_3'|}\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{e}}_3' = \frac{\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_3')\mathbf{e}_3'}{|\mathbf{a} \times \mathbf{e}_3'|}\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{e}}_3',$$

$$\widetilde{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}} = \frac{-\widetilde{\mathbf{p}}\widetilde{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{ap}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{e}_3'|} \cdot \dot{\mathbf{e}}_3' = \frac{(\mathbf{E}_2 - \mathbf{pp}) \cdot \mathbf{ap}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{e}_3'|} \cdot \dot{\mathbf{e}}_3' = \frac{\mathbf{ap}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{e}_3'|} \cdot \dot{\mathbf{e}}_3',$$

то можно записать, что

$$\varpi'' = \frac{1}{2}\left[(\mathbf{E}_2 + \mathbf{e}_3'\mathbf{e}_3') \cdot \frac{\mathbf{ap}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{e}_3'|} \cdot \dot{\mathbf{e}}_3' - \frac{\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_3')\mathbf{e}_3'}{|\mathbf{a} \times \mathbf{e}_3'|}\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{e}}_3'\right] + \widetilde{\mathbf{e}}_3' \cdot \mathbf{e}_3'$$

$$= \left[\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_3'}{|\mathbf{a} \times \mathbf{e}_3'|}\mathbf{e}_3'\mathbf{p} + \widetilde{\mathbf{e}}_3'\right] \cdot \dot{\mathbf{e}}_3'.$$

Отсюда следует, что угловая скорость ω' определяется равенством

(42) $$\varpi' = \dot{\phi}\mathbf{e}_3' + \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{e}}_3',$$

где $\mathbf{A} = \dfrac{\partial \varpi'}{\partial \dot{\mathbf{e}}_3'} = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_3'}{|\mathbf{a} \times \mathbf{e}_3'|}\mathbf{e}_3'\mathbf{p} + \widetilde{\mathbf{e}}_3'$.

Подходящим выбором вектора $\mathbf{a}$ и скалярных величин, определяющих вектор $\mathbf{p}$, можно получить известные параметризации тензора (41) в углах Эйлера, углах Крылова или углах Брайнта. Например, если выбрать $\mathbf{a} = \mathbf{e}_3$, ψ — угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{e}_1$, θ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{e}_3'$, и ϕ — угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{e}_1'$ с положительными направлениями отсчета, определенными соответственно векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{p}$ и $\mathbf{e}_3'$, то нетрудно увидеть, что скалярные параметры ψ, θ и ϕ являются углами Эйлера для базиса $\underline{\mathbf{e}}'$. Углы Брайнта и Крылова можно получит, если в качестве вектора $\mathbf{a}$ выбрать соответственно векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$.

Указанное представление тензора (41) является наиболее удобным, когда в конкретной задаче выделены направления $\mathbf{a}$ и $\mathbf{e}_3'$, имеющие механическое или геометрическое значение.

3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим голономную систему $\mathfrak{M}$, положение точек которой определяется скалярными параметрами $q_1, \ldots, q_m$, единичными векторами $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ и ортонормированными тензорами $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$. Каждый единичны вектор $\mathbf{e}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ определяется двумя независимыми скалярными параметрами, а каждый тензор Γ_k $(k = 1, \ldots, p)$ — тремя. В дальнейшем будем предполагать, что все эти скалярные параметры вместе с параметрами q_i $(i = 1, \dots, m)$ являются независимыми также между собой. В этом случае их общее число $m + 2n + 3p$ есть число степеней свободы системы. Величины q_i, $\mathbf{e}_j$, Γ_k будем называть тензорными обобщенными координатами системы нулевой, первой и второй валентности соответственно. Тензорные обобщенные координаты будем обозначать через $\mathbf{X}_i$ $(i = 1, \dots, m+n+p)$, а их валентность — через ν_i.

Уравнения движения системы выведем из принципа Журдена, согласно которому действительное движение системы является тем кинематически возможным движением, для которого при $\delta\mathbf{r} = 0$

$$\int_{\mathfrak{M}} (d\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{r}}dm) \cdot \delta\dot{\mathbf{r}} = 0 \tag{43}$$

в любой момент времени t. Здесь $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, q_i, \mathbf{e}_j, \Gamma_k)$ — радиус-вектор элемента dm в инерциальном пространстве, $\delta\mathbf{r}$ — виртуальное перемещение, $\delta\dot{\mathbf{r}}$ — виртуальное изменение скорости $\dot{\mathbf{r}}$, $d\mathbf{f}$ — результирующая сил, действующих на элемент dm и совершающих виртуальную работу.

Применяя формулу (15) при фиксированном времени, для вариации $\delta\dot{\mathbf{r}}$ функции $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}(t, q_i, \mathbf{e}_j, \Gamma_k, \dot{q}_i, \dot{\mathbf{e}}_j, \dot{\Gamma}_k)$ получаем

$$\delta\dot{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{e}_j} \cdot \delta\mathbf{e}_j + \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial \Gamma_k} \bigwedge_2 \delta\Gamma_k$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{e}}_j} \cdot \delta\dot{\mathbf{e}}_j + \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\Gamma}_k} \bigwedge_2 \delta\dot{\Gamma}_k.$$

Из условия $\delta\mathbf{r} = \mathbf{0}$ и независимости тензорных обобщенных координат следует, что $\delta q_i = 0$, $\delta\mathbf{e}_j = \mathbf{0}$, $\delta\Gamma_k = \mathbf{O}_2$ $(i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n,\ k = 1, \dots, p)$. Так как для каждого единичного вектора выполнено равенство $\dot{\mathbf{e}}_j \cdot \mathbf{e}_j = 0$, то $\delta\dot{\mathbf{e}}_j \cdot \mathbf{e}_j = 0$. Отсюда, в соответствии с формулой (7), получаем, что каждую из вариаций $\delta\dot{\mathbf{e}}_j$ можно записать в виде

$$\delta\dot{\mathbf{e}}_j = -\widetilde{\mathbf{e}}_j \cdot \delta\overline{\pi}_j = \delta\widetilde{\overline{\pi}} \cdot \mathbf{e}_j \quad (j = 1, \dots, n),$$

где $\delta\overline{\pi}_j$ — произвольный бесконечно малый вектор.

Аналогично, из равенств $\Gamma_k \cdot \Gamma_k^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}_2$ и $\dot{\Gamma} \cdot \Gamma_k^{\mathrm{T}} + \Gamma_k \cdot \dot{\Gamma}_k^{\mathrm{T}} = \mathbf{O}_2$ $(k = 1, \dots, p)$ вытекает, что между тензором Γ_k и вариацией $\delta\dot{\Gamma}_k$ имеется зависимость

$$\delta\dot{\Gamma}_k \cdot \Gamma_k + \Gamma_k \cdot \delta\dot{\Gamma}_k = \mathbf{O}_k.$$

Учитывая, что $\delta\dot{\Gamma}_k^{\mathrm{T}} = (\delta\dot{\Gamma}_k)^{\mathrm{T}}$, получаем $\delta\dot{\Gamma}_k \cdot \Gamma_k^{\mathrm{T}} = -\Gamma_k \cdot (\delta\dot{\Gamma}_k)^{\mathrm{T}} = (\delta\dot{\Gamma}_k \cdot \Gamma_k^{\mathrm{T}})$, т. е. $(\delta\dot{\Gamma}_k \cdot \Gamma_k^{\mathrm{T}})$ — кососимметрический тензор и таким образом существует вектор $\delta\overline{\kappa}_k$, для которого выполнено равенство $\delta\dot{\Gamma}_k \cdot \Gamma_k^{\mathrm{T}} = \delta\overline{\kappa}_k$, откуда находим, что

$$\delta\dot{\Gamma}_k = \delta\widetilde{\overline{\kappa}}_k \cdot \Gamma_k = \delta\overline{\kappa}_k \cdot \widetilde{\Gamma}_k \quad (k = 1, \dots, p).$$

Если примем во внимание свойства (3) и (2) обобщенного произведения, найдем, что

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{e}}_j} \cdot \delta \dot{\mathbf{e}}_j = \delta \dot{\mathbf{e}}_j \cdot^{[1]} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{e}}_j} = \delta \overline{\pi}_j \cdot \left(\widetilde{\mathbf{e}}_j \cdot^{[1]} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{e}}_j} \right),$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\Gamma}_k} \bigwedge_2 \delta \dot{\Gamma}_k = \delta \dot{\Gamma}_k \bigwedge_2^{[1]} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\Gamma}_k} = \delta \overline{\kappa_k} \cdot \left(\widetilde{\Gamma}_k \bigwedge_2^{[1]} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\Gamma}_k} \right),$$

$$\delta \mathbf{r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i + \sum_{j=1}^{m} \delta \overline{\pi}_j \cdot \left(\widetilde{\mathbf{e}}_j \cdot^{[1]} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{e}}_j} \right) + \sum_{k=1}^{p} \delta \overline{\kappa}_k \cdot \left(\widetilde{\Gamma}_k \bigwedge_2^{[1]} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\Gamma}_k} \right).$$

После подстановки последнего выражения в (43) получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \delta q_i \int_{\mathfrak{M}} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_i} \cdot (d\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{r}} dm) + \sum_{j=1}^{n} \delta \overline{\pi}_j \cdot \widetilde{\mathbf{e}}_j \cdot \int_{\mathfrak{M}}^{[1]} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{e}}_j} \cdot (d\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{r}} dm)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \delta \overline{\kappa}_k \cdot \widetilde{\Gamma}_k \bigwedge_2 \int_{\mathfrak{M}}^{[1]} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\Gamma}_k} \cdot (d\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{r}} dm) = 0.$$

Из независимости вариации δq_i и векторов $\delta \overline{\pi}_j$ и $\delta \overline{\kappa}_k$ следует, что это равенство эквивалентно условиям

$$\int_{\mathfrak{M}} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_i} \cdot (d\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{r}} dm) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m);$$

$$\widetilde{\mathbf{e}}_j \cdot \int_{\mathfrak{M}}^{[1]} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{e}}_j} \cdot (d\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{r}} dm) = \mathbf{0} \quad (j = 1, \ldots, n);$$

$$\widetilde{\Gamma}_k \bigwedge_2 \int_{\mathfrak{M}}^{[1]} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\Gamma}_k} \cdot (d\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{r}} dm) = \mathbf{0} \quad (k = 1, \ldots, p).$$

Все равенства записываются одним и тем же способом, если для тензора нулевой валентности q_i положим $\widetilde{q}_i = 1$.

$$\widetilde{\mathbf{X}}_i \bigwedge_{\nu_i} \int_{\mathfrak{M}}^{[1]} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} \cdot (d\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{r}} dm) = \widetilde{\mathbf{X}}_i \bigwedge_{\nu_i} \mathbf{O}_{\nu_i} \quad (i = 1, \ldots, m + n + p).$$

В зависимости от валентности ν_i тензора $\mathbf{X}_i$ тензор $\mathbf{X}_i \bigwedge_{\nu_i} \mathbf{O}_{\nu_i}$ является нулевым элементом пространства $\mathcal{E}_0$, если $\nu_i = 0$, или пространства $\mathcal{E}_1$, если $\nu_i = 1$ или $\nu_i = 2$. Это выражается равенством

$$\mathbf{X}_i \bigwedge_{\nu_i} \mathbf{O}_{\nu_i} = \mathbf{O}_{\frac{1}{2}(3\nu_i + \nu_i^2)} \quad (i = 1, \ldots, m + n + p).$$

Рассмотрим произведение ${}^{[1]}\dfrac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial\dot{\mathbf{X}}_i}\cdot\ddot{\mathbf{r}}$. Используя правило (11), вычисляем производную

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}^2}{\partial\dot{\mathbf{X}}_i} = {}^{[1]}\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial\dot{\mathbf{X}}_i}\cdot\dot{\mathbf{r}},$$

откуда после дифференцирования относительно t получаем

$${}^{[1]}\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial\dot{\mathbf{X}}_i}\cdot\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}^2}{\partial\dot{\mathbf{X}}_i}\right) - \left(\frac{d}{dt}{}^{[1]}\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial\dot{\mathbf{X}}_i}\right)\cdot\dot{\mathbf{r}}.$$

Из равенства $\dot{\mathbf{r}} = \dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial t} + \sum\limits_{i=1}^{m+n+p}\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{X}_i}\bigwedge\limits_{\nu_i}\dot{\mathbf{X}}_i$ следует, что

$$\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial\dot{\mathbf{X}}_i} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{X}_i}\bigwedge_{\nu_i}\mathbf{E}_{2\nu_i} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{X}_i}.$$

После применения правила (16) изменения порядка дифференцирования, находим

$$\left(\frac{d}{dt}{}^{[1]}\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial\dot{\mathbf{X}}_i}\right)\cdot\dot{\mathbf{r}} = \left(\frac{d}{dt}{}^{[1]}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{X}_i}\right)\cdot\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial\mathbf{X}_i}\cdot\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}^2}{\partial\mathbf{X}_i}.$$

Таким образом имеет место равенство

$${}^{[1]}\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial\dot{\mathbf{X}}_i}\cdot\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}^2}{\partial\dot{\mathbf{X}}_i}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}^2}{\partial\mathbf{X}_i},$$

из которого следует

$$\int\limits_{\mathfrak{M}}{}^{[1]}\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial\dot{\mathbf{X}}_i}\cdot\ddot{\mathbf{r}}dm = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\mathbf{X}}_i} - \frac{\partial T}{\partial\mathbf{X}_i} \quad (i = 1, \ldots, m+n+p),$$

где $T = \dfrac{1}{2}\int\limits_{\mathfrak{M}}\dot{\mathbf{r}}^2dm$ — кинетическая энергия системы.

Так как кинетическая энергия системы является скалярной величиной, то ее производные $\dfrac{\partial T}{\partial\dot{\mathbf{X}}_i}$ и $\dfrac{\partial T}{\partial\mathbf{X}_i}$ имеют валентность тензора $\mathbf{X}_i$.

Тензор $\mathbf{Q}_i \in \mathcal{E}_{\nu_i}$, определенный равенством

$$\mathbf{Q}_i = \int\limits_{\mathfrak{M}}{}^{[1]}\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}}{\partial\dot{\mathbf{X}}_i}\cdot d\mathbf{f} = \int\limits_{\mathfrak{M}}{}^{[1]}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{X}_i}\cdot d\mathbf{f} \quad (i = 1, \ldots, m+n+p),$$

будем называть тензорной обобщенной силой, соответствующей тензорной обобщенной координате $\mathbf{X}_i \in \mathcal{E}_{\nu_i}$.

В этих обозначениях уравнвния движения принимают вид

$$(44)\qquad \widetilde{\mathbf{X}}_i \bigwedge_{\nu_i} \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{X}_i} - \mathbf{Q}_i\right] = \mathbf{O}_{\frac{1}{2}(3\nu_i - \nu_i^2)} \quad (i = 1, \dots, m+n+p).$$

Уравнения (44) естественно назвать тензорными обобщенными уравнениями Лагранжа второго рода. Они совпадают с классическими уравнениями Лагранжа второго рода, если переменные $\mathbf{X}_i$ — скалярные величины. Если валентность тензора $\mathbf{X}_i$ равна единице, т. е. если $\mathbf{X}_i$ является единичным вектором $\mathbf{e}_i$, то выражение $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} - \dfrac{\partial T}{\partial \mathbf{X}_i} - \mathbf{Q}_i$ тоже вектор и его произведение на тензор $\widetilde{\mathbf{e}}_i$ представляет векторное умножение $\mathbf{e}_i \times \left(\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} - \dfrac{\partial T}{\partial \mathbf{X}_i} - \mathbf{Q}_i\right)$. Это означает, что уравнение (44) эквивалентно двум скалярным уравнениям, так как оно выражает равенство между векторами, расположенными в одной плоскости, нормальным вектором которой является вектор $\mathbf{e}_i$. Если $\mathbf{X}_i \in \mathcal{E}_2$, то после умножения $\bigwedge_2$ в равенстве (44) получаем вектор. Таким образом число скалярных уравнений, соответствующих тензору $\mathbf{X}_i$, равняется трем.

Если существует функция $\Pi = \Pi(t, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{m+n+p})$, для которой

$$\mathbf{Q}_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{X}_i} \quad (i = 1, \dots, m+n+p),$$

то уравнения (44) приобретают вид

$$(45)\qquad \mathbf{X}_i \bigwedge_{\nu_i} \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}_i}\right] = \mathbf{O}_{\frac{1}{2}(3\nu_i - \nu_i^2)},$$

где $L = T - \Pi$ следует назвать функцией Лагранжа для тензорных уравнений Лагранжа.

В качестве примера рассмотрим движение абсолютно твердого тела S под действием заданных сил. Пусть O — фиксированная точка в инерциальном пространстве, а точка C — центр массы тела. Для тензорных обобщенных координат тела выбираем длину γ вектора $\mathbf{r}_c = \overline{OC}$, единичный вектор $\mathbf{c} = \dfrac{\mathbf{r}_c}{|\mathbf{r}_c|}$ и ортонормированный тензор $\mathbf{Z}$, определяющий вращательное движение тела. Посредством этих величин радиус-вектор $\mathbf{r}$ производной точки M тела выражается равенством

$$\mathbf{r} = \gamma\mathbf{c} - \mathbf{Z}\cdot\mathbf{u}, \qquad \mathbf{u} = \mathrm{const}.$$

Если m и $\mathbf{J}_c$ — масса и тензор инерции тела и $\overline{\omega}$ — его абсолютная угловая скорость, то кинетическая энергия тела имеет вид

$$(46)\qquad T = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}_c^2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}\cdot\mathbf{J}_c\cdot\overline{\omega} = \frac{1}{2}(\dot{\gamma}^2 + \gamma^2\dot{\mathbf{c}}^2) + \frac{1}{2}\overline{\omega}\cdot\mathbf{J}_c\cdot\overline{\omega},$$

где $\dot{\mathbf{r}}_c = \dot{\gamma}\mathbf{c} + \gamma\dot{\mathbf{c}}$ — абсолютная скорость центра массы тела. Легко получить, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}} - \frac{\partial T}{\partial \gamma} = m(\ddot{\gamma} - \gamma\dot{\mathbf{c}}^2);$$

$$\widetilde{\mathbf{c}} \cdot \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{c}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{c}}\right] = \widetilde{\mathbf{c}} \cdot (2\gamma\dot{\gamma}\dot{\mathbf{c}} + \gamma^2\ddot{\mathbf{c}})m = m\mathbf{c} \times (2\gamma\dot{\gamma}\dot{\mathbf{c}} + \gamma^2\ddot{\mathbf{c}});$$

$$\int\limits_S \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\gamma}} \cdot d\mathbf{f} = \mathbf{c} \cdot \int\limits_S d\mathbf{f} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{f};$$

$$\widetilde{\mathbf{c}} \cdot \int\limits_S \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{c}}}\right)^{\mathrm{T}} \cdot d\mathbf{f} = \widetilde{\mathbf{c}} \cdot \gamma\mathbf{E}_2 \cdot \int\limits_S d\mathbf{f} = \gamma\mathbf{c} \times \mathbf{f},$$

где $\mathbf{f} = \int\limits_S d\mathbf{f}$ — главный вектор всех сил, действующих на тело. Таким образом две из уравнений движения тела, которые соответствуют скалярной и векторной координате γ и $\mathbf{c}$, имеют вид

$$(47) \qquad \begin{gathered} m(\ddot{\gamma} - \gamma\dot{\mathbf{c}}^2) - \mathbf{c} \cdot \mathbf{f} = 0, \\ \gamma\mathbf{c} \times [m(2\dot{\gamma} \cdot \dot{\mathbf{c}} + \gamma\ddot{\mathbf{c}}) - \mathbf{f}] = 0. \end{gathered}$$

Используя равенство $\mathbf{c} \cdot \ddot{\mathbf{c}} = -\dot{\mathbf{c}}^2$, вытекающее из условия $\mathbf{c}^2 = 1$, получаем, что

$$m(\dot{\gamma} - \gamma\dot{\mathbf{c}}^2) - \mathbf{c} \cdot \mathbf{f} = (m\ddot{\mathbf{r}}_c - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{c},$$

$$\mathbf{c} \times [(2\dot{\gamma}\dot{\mathbf{c}} + \gamma\ddot{\mathbf{c}})m - \mathbf{f}] = \mathbf{c} \times (\ddot{\mathbf{r}}_c m - \mathbf{f}).$$

Таким образом левые стороны уравнений (47) являются скалярным и векторным произведением векторов $\mathbf{c}$ и $m\ddot{\mathbf{r}}_c - \mathbf{f} = m(\ddot{\gamma}\mathbf{c} + 2\dot{\gamma}\dot{\mathbf{c}} + \gamma\ddot{\mathbf{c}}) - \mathbf{f}$. Из первого уравнения следует, что вектор $(m\ddot{\mathbf{r}}_c - \mathbf{f})$ перпендикулярен вектору $\mathbf{c}$, а из второго — что он коллинеарен вектору $\mathbf{c}$, откуда заключаем, что он нулевой. Наоборот, если $m\ddot{\mathbf{r}}_c - \mathbf{f} = \mathbf{0}$, то, очевидно, равенства (47) выполняются. Следовательно, уравнения (47) описывают движение центра массы тела.

Получим теперь уравнение, соответствующее тензорной обобщенной координате $\mathbf{Z}$. Из формулы (27) и (46) следует, что

$$\widetilde{\mathbf{Z}} \bigwedge_2 \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{Z}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{Z}}\right)$$

$$= \widetilde{\mathbf{Z}} \bigwedge_2 \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \overline{\omega}} \cdot \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{Z}}} + \frac{\partial T}{\partial \overline{\omega}} \cdot \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{Z}}} - \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \mathbf{Z}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{J}_c} \bigwedge_2 \frac{\partial \mathbf{J}_c}{\partial \mathbf{Z}}\right]$$

$$= \left(\widetilde{\mathbf{Z}} \bigwedge_2^{[1]} \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{Z}}}\right) \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \overline{\omega}} + \widetilde{\mathbf{Z}} \bigwedge_2^{[1]} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{Z}}} - \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \mathbf{Z}}\right) \cdot \frac{\partial T}{\partial \overline{\omega}} - \left(\widetilde{\mathbf{Z}} \bigwedge_2^{[2]} \frac{\partial \mathbf{J}_c}{\partial \mathbf{Z}}\right) \bigwedge_2 \frac{\partial T}{\partial \mathbf{J}_c}.$$

В последнем выражении использованы правила (3) и (1).

Справедливы также соотношения

$$(48)\qquad \widetilde{\mathbf{Z}} \bigwedge_2{}^{[1]} \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{Z}}} = \mathbf{E}_2;$$

$$(49)\qquad \widetilde{\mathbf{Z}} \bigwedge_2{}^{[2]} \frac{\partial \mathbf{J}_c}{\partial \dot{\mathbf{Z}}} = 2\mathbf{J}_c;$$

$$(50)\qquad \widetilde{\mathbf{Z}} \bigwedge_2{}^{[1]} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{Z}}} - \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \mathbf{Z}} \right) = -\widetilde{\overline{\omega}}.$$

Эти соотношения получаются из формул (33), (6) и (29) следующим образом

$$\widetilde{\mathbf{Z}} \bigwedge_2{}^{[1]} \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{Z}}} = \widetilde{\mathbf{Z}} \bigwedge_2{}^{[1]} \left[\frac{1}{2}^{[1]} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{Z}) \right] = -\frac{1}{2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{Z}) \bigwedge_2 (\mathbf{D} \cdot \mathbf{Z})^{[1]}$$

$$= -\frac{1}{2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{Z}) \bigwedge_2 (\mathbf{Z}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{D}) = -\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot (\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}) \bigwedge_2 \mathbf{D} = -\frac{1}{2} \mathbf{D} \bigwedge_2 \mathbf{D} = \mathbf{E}_2,$$

$$\widetilde{\mathbf{Z}} \bigwedge_2{}^{[2]} \frac{\partial \mathbf{J}_c}{\partial \dot{\mathbf{Z}}} = \widetilde{\mathbf{Z}} \bigwedge_2{}^{[2]} \left(2^{[1]} \widetilde{\mathbf{J}}_c \cdot \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{Z}}} \right) = \widetilde{\mathbf{Z}} \bigwedge_2 \left(2^{[1]} \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{Z}}} \cdot \widetilde{\mathbf{J}}_c \right)$$

$$= 2 \left(\widetilde{\mathbf{Z}} \bigwedge_2{}^{[1]} \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{Z}}} \right) \cdot \mathbf{J}_c = 2\widetilde{\mathbf{J}}_c.$$

Применяя равенство

$$(51)\qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{Z}}} - \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \mathbf{Z}} = {}^{[1]}(\mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{Z}}),$$

получаем

$$\widetilde{\mathbf{Z}} \bigwedge_2{}^{[1]} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{Z}}} - \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial \mathbf{Z}} \right) = \widetilde{\mathbf{Z}} \bigwedge_2{}^{[2]} (\mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{Z}}) = -(\mathbf{D} \cdot \mathbf{Z}) \bigwedge_2 (\mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{Z}})^{[1]}$$

$$= -(\mathbf{D} \cdot \mathbf{Z}) \bigwedge_2 (\dot{\mathbf{Z}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{D}) = -[\mathbf{D} \cdot (\mathbf{Z} \cdot \dot{\mathbf{Z}}^{\mathrm{T}})] \bigwedge_2 \mathbf{D} = (\mathbf{D} \cdot \widetilde{\overline{\omega}}) \bigwedge_2 \mathbf{D}.$$

Последнее произведение можно представить в виде

$$(\mathbf{D} \cdot \widetilde{\overline{\omega}}) \bigwedge_2 \mathbf{D} =^{[1]} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}) \bigwedge_2 \widetilde{\overline{\omega}}.$$

Так как, согласно (5), ${}^{[1]}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{D}) = {}^{[1]}(\mathbf{E}_4^* - \mathbf{E}_4) = \mathbf{E}_4^* - \mathbf{E}_2\mathbf{E}_2$ и $\mathbf{E}_4^* \underset{2}{\bigwedge} \tilde{\bar{\omega}} = \tilde{\bar{\omega}}^{\mathrm{T}} = -\tilde{\bar{\omega}}$, $\mathbf{E}_2\mathbf{E}_2 \underset{2}{\bigwedge} \tilde{\bar{\omega}} = \mathbf{E}_2 \mathrm{sp}\tilde{\bar{\omega}} = \mathbf{O}_2$, то

$$(\mathbf{D}\cdot\tilde{\bar{\omega}}) \underset{2}{\bigwedge} \mathbf{D} = -\tilde{\bar{\omega}}. \tag{52}$$

Используя формулы (48), (49) и (50), получаем соотношение

$$\mathbf{Z} \underset{2}{\bigwedge} \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{Z}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{Z}}\right] = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \bar{\omega}} - \tilde{\bar{\omega}}\cdot\frac{\partial T}{\partial \bar{\omega}} - 2\tilde{\mathbf{J}}_c \underset{2}{\bigwedge} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{J}_c}.$$

Наконец, вычисляя производные

$$\frac{\partial T}{\partial \bar{\omega}} = \mathbf{J}_c\cdot\bar{\omega}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \bar{\omega}} = (\mathbf{J}_c\cdot\bar{\omega})^{\boldsymbol{\cdot}}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \mathbf{J}_c} = \frac{1}{2}\bar{\omega}\bar{\omega}$$

и произведение

$$\begin{aligned} 2\tilde{\mathbf{J}}_c \underset{2}{\bigwedge} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{J}_c} &= -(\mathbf{D}\cdot\mathbf{J}_c) \underset{2}{\bigwedge} \bar{\omega}\bar{\omega} = -[\mathbf{D}\cdot(\mathbf{J}_c\cdot\bar{\omega})]\cdot\bar{\omega} \\ &= -\bar{\omega}\cdot{}^{[1]}[\mathbf{D}\cdot(\mathbf{J}_c\cdot\bar{\omega})] = (\bar{\omega}\cdot\mathbf{D})\cdot(\mathbf{J}_c\cdot\bar{\omega}) = -\tilde{\bar{\omega}}\cdot(\mathbf{J}_c\cdot\bar{\omega}), \end{aligned} \tag{53}$$

находим, что имеет место равенство

$$\tilde{\mathbf{Z}} \underset{2}{\bigwedge} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{Z}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{Z}}\right) = (\mathbf{J}_c\cdot\bar{\omega})^{\boldsymbol{\cdot}}.$$

Для тензорной обобщенной силы, соответствующей тензорной обобщенной координате $\mathbf{Z}$, имея в виду формулу (28), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Z}} \underset{2}{\bigwedge} \int_S {}^{[1]}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{Z}}\cdot d\mathbf{f} &= \mathbf{Z} \underset{2}{\bigwedge} \int_S {}^{[1]}\left(-\tilde{\mathbf{r}}\cdot\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{Z}}}\right)\cdot d\mathbf{f} \\ &= \tilde{\mathbf{Z}} \underset{2}{\bigwedge} {}^{[1]}\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{Z}}}\cdot\int_S \tilde{\mathbf{r}}\cdot d\mathbf{f} = \mathbf{E}_2\cdot\int_S \mathbf{r}\times d\mathbf{f} = \boldsymbol{M}, \end{aligned}$$

где через $\boldsymbol{M}$ обозначен главный момент сил, приложенных к телу относительно его центра массы.

Таким образом мы получили, что движение тела определяется уравнениями (47) и уравнением

$$(\mathbf{J}_c\cdot\bar{\omega})^{\boldsymbol{\cdot}} = \boldsymbol{M}, \tag{54}$$

при этом уравнения (47) задают движение центра массы тела, а уравнение (54), которое выражает теорему о кинематическом моменте, —вращательное движение тела.

Отметим, что произведение $\frac{1}{2}\overline{\omega}\cdot\mathbf{J}_c\cdot\overline{\omega}$ можно было бы выразить при помощи формул (18) и (27) в виде

$$\frac{1}{2}\overline{\omega}\cdot\mathbf{J}_c\cdot\overline{\omega}=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{Z}}\bigwedge_2(\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{Z})\cdot\mathbf{J}_0\cdot(\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{Z})\bigwedge_2\dot{\mathbf{Z}}^{\mathbf{T}}.$$

В этом случае, однако, вычисление частных производных становится более сложным. С таким же трудностями сталкиваемся, если тензор $\mathbf{Z}$ не является обобщенной коориантой, а выражается некоторым образом через другие тензорные обобщенные координаты. Более громоздким будут выражения также в случае нескольких тел, если выбранные тензорные обобщенные координаты определяют относительные движения тел. Поэтому естественно, учитывая рассмотренный пример, попытаться выразить левые части $\widetilde{\mathbf{X}}_i\bigwedge_{\nu_i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\mathbf{X}}_i}-\frac{\partial T}{\partial\mathbf{X}_i}\right)$ посредством производных кинетической энергии относительно абсолютных угловых скоростей.

Рассмотрим систему n абсолютно твердых тел, для которой выбраны тензорные обобщенные координаты $\mathbf{X}_i$ $(i=1,\ldots,N)$, удовлетворяющие уравнениям связей. Пусть угловые положения тел относительно инерциального пространство определяются ортонормированными тензорами $\mathbf{Z}_l$ $(l=1,\ldots,n)$.

Предположим, что задана некоторая дважды дифференцируемая функция $g(t,\mathbf{X}_i,\dot{\mathbf{X}}_i,\mathbf{Z}_l,\dot{\mathbf{Z}}_l)$. Из равенства (18) следует, что

$$\dot{\mathbf{Z}}_l=\widetilde{\overline{\omega}}_l\cdot\mathbf{Z}_l, \tag{55}$$

где $\overline{\omega_l}$ — абсолютная угловая скорость тела номер $l(l=1,\ldots,n)$. Подставляя производные $\dot{\mathbf{Z}}_l$, получаем функцию $\widehat{g}$ переменных t, $\mathbf{X}_i$, $\dot{\mathbf{X}}_i$, $\mathbf{Z}_l$ и $\overline{\omega_l}$ $(i=1,\ldots,N,\ l=1,\ldots,n)$, т. е.

$$\widehat{g}(t,\mathbf{X}_i,\dot{\mathbf{X}}_i,\mathbf{Z}_l,\overline{\omega_l})=g(t,\mathbf{X}_i,\dot{\mathbf{X}}_i,\mathbf{Z}_l,\dot{\mathbf{Z}}_l).$$

Так как связи системы — голономные, можно считать, что тензоры $\mathbf{Z}_l$ зависят от переменных $\mathbf{X}_i$, а тензоры $\dot{\mathbf{Z}}_l$ и векторы $\overline{\omega}_l$ — от тензоров $\mathbf{X}_i$ и их производных $\dot{\mathbf{X}}_i$. Пусть $\mathbf{X}=\mathbf{X}(t)\in\mathcal{E}_\nu$ — одна из тензорных обобщенных координат $\mathbf{X}_i$. Покажем, что имеет место равенство

$$\widetilde{\mathbf{X}}\bigwedge_\nu\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial g}{\partial\dot{\mathbf{X}}}-\frac{\partial g}{\partial\mathbf{X}}\right]=\widetilde{\mathbf{X}}\bigwedge_\nu\sum_{l=1}^{n}{}^{[1]}\frac{\partial\overline{\omega_l}}{\partial\dot{\mathbf{X}}}\cdot\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial\widehat{g}}{\partial\overline{\omega_l}}-\widetilde{\overline{\omega}}\cdot\frac{\partial\widehat{g}}{\partial\overline{\omega}_l}\right]$$
$$+\mathbf{X}\bigwedge_\nu\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial\widehat{g}}{\partial\dot{\mathbf{X}}}-\frac{\partial\widehat{g}}{\partial\mathbf{X}}\right]. \tag{56}$$

Пользуясь теоремой о дифференцировании составных функции, получаем следующие выражения:

$$\frac{\partial g}{\partial\dot{\mathbf{X}}}=\frac{\partial\widehat{g}}{\partial\dot{\mathbf{X}}}+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\widehat{g}}{\partial\overline{\omega}_l}\cdot\frac{\partial\overline{\omega}_l}{\partial\dot{\mathbf{X}}},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{X}}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{X}}} + \sum_{l=1}^{N}\left[{}^{[1]}\frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \dot{\mathbf{X}}}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial \widehat{g}}{\partial \overline{\omega}_l} + {}^{[1]}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \dot{\mathbf{X}}}\right)\cdot\frac{\partial \widehat{g}}{\partial \overline{\omega}_l}\right],$$

$$\tilde{\mathbf{X}}\bigwedge_{\nu}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{X}}} - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{X}}\right] = \tilde{\mathbf{X}}\bigwedge_{\nu}\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial \widehat{g}}{\partial \dot{\mathbf{X}}} - \frac{\partial \widehat{g}}{\partial \mathbf{X}}\right.$$

$$\left.+\sum_{l=1}^{N}\left[{}^{[1]}\frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \dot{\mathbf{X}}}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial \widehat{g}}{\partial \overline{\omega}_l} + {}^{[1]}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \dot{\mathbf{X}}} - \frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \mathbf{X}}\right)\cdot\frac{\partial \widehat{g}}{\partial \overline{\omega}_l}\right]\right\}.$$

Чтобы найти ${}^{[1]}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \dot{\mathbf{X}}} - \frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \mathbf{X}}\right)$, вычисляем производные

$$\frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \mathbf{Z}_l}\bigwedge_2\frac{\partial \mathbf{Z}_l}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \dot{\mathbf{Z}}_l}\bigwedge_2\frac{\partial \dot{\mathbf{Z}}_l}{\partial \mathbf{X}},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \dot{\mathbf{X}}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \dot{\mathbf{Z}}_l}\bigwedge_2\frac{\partial \dot{\mathbf{Z}}_l}{\partial \dot{\mathbf{X}}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \dot{\mathbf{Z}}_l}\bigwedge_2\frac{\partial \mathbf{Z}_l}{\partial \mathbf{X}}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \dot{\mathbf{Z}}_l}\bigwedge_2\frac{\partial \mathbf{Z}_l}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \dot{\mathbf{Z}}_l}\bigwedge_2\frac{\partial \dot{\mathbf{Z}}_l}{\partial \mathbf{X}}.$$

В последних преобразованиях использованы равенство $\frac{\partial \dot{\mathbf{Z}}_l}{\partial \dot{\mathbf{X}}} = \frac{\partial \mathbf{Z}_l}{\partial \mathbf{X}}$ и формула (16). Таким образом, применяя формулы (51) и (55), получаем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \dot{\mathbf{X}}} - \frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \mathbf{X}} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \dot{\mathbf{Z}}_l} - \frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \mathbf{Z}_l}\right)\bigwedge_2\frac{\partial \mathbf{Z}_l}{\partial \mathbf{X}}$$

$$={}^{[1]}(\mathbf{D}\cdot\dot{\mathbf{Z}}_l)\bigwedge_2\frac{\partial \mathbf{Z}_l}{\partial \mathbf{X}} ={}^{[1]}(\mathbf{D}\cdot\tilde{\overline{\omega}}_l\cdot\mathbf{Z}_l)\bigwedge_2\frac{\partial \mathbf{Z}_l}{\partial \mathbf{X}}.$$

Порядок умножения можно изменить следующим образом:

$${}^{[1]}(\mathbf{D}\cdot\tilde{\overline{\omega}}_l\cdot\mathbf{Z}_l)\bigwedge_2\frac{\partial \mathbf{Z}_l}{\partial \mathbf{X}} ={}^{[1]}(\mathbf{D}\cdot\tilde{\overline{\omega}}_l)\bigwedge_2\left(\mathbf{Z}_l\cdot{}^{[1]}\frac{\partial \mathbf{Z}_l}{\partial \mathbf{X}}\right)^{[1]}.$$

Применяя формулу (32), преобразуем это произведение к виду $-{}^{[1]}(\mathbf{D}\cdot\tilde{\overline{\omega}}_l)\bigwedge_2\left(\mathbf{D}\cdot\frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \dot{\mathbf{X}}}\right)$. Так как тензор $\mathbf{D}$ — кососимметрический, то

$$-{}^{[1]}(\mathbf{D}\cdot\tilde{\overline{\omega}}_l)\bigwedge_2\left(\mathbf{D}\cdot\frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \dot{\mathbf{X}}}\right) = (\mathbf{D}\cdot\tilde{\overline{\omega}}_l)\bigwedge_2\left(\mathbf{D}\cdot\frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \dot{\mathbf{X}}}\right)$$

$$= -[(\mathbf{D}\cdot\tilde{\overline{\omega}}_l)\bigwedge_2\mathbf{D}]\cdot\frac{\partial \overline{\omega}_l}{\partial \dot{\mathbf{X}}}.$$

Выражая произведение в квадратных скобках по формуле (52), получаем, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\overline{\omega}_l}{\partial\dot{\mathbf{X}}} - \frac{\partial\overline{\omega}_l}{\partial\mathbf{X}} = \tilde{\overline{\omega}}_l\cdot\frac{\partial\overline{\omega}_l}{\partial\dot{\mathbf{X}}},$$

$$^{[1]}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\overline{\omega}_l}{\partial\dot{\mathbf{X}}} - \frac{\partial\overline{\omega}_l}{\partial\mathbf{X}}\right) = -^{[1]}\left(\frac{\partial\overline{\omega}_l}{\partial\dot{\mathbf{X}}}\right)\cdot\tilde{\overline{\omega}}_l,$$

откуда следует соотношение (56).

Формула (56) приобретает особо простой вид в случае, когда

$$g = \frac{1}{2}\overline{\omega}\cdot\mathbf{J}\cdot\overline{\omega},$$

где $\overline{\omega}$ — абсолютная угловая скорость данного тела, а $\mathbf{J}$ — его тензор инерции относительно некоторой его точки. Тогда $\dfrac{\partial g}{\partial\overline{\omega}} = \mathbf{J}\cdot\overline{\omega}$ и аналогичными преобразованиями (53) находим следующие соотношения:

$$\tilde{\mathbf{X}}\bigwedge_{\nu}\frac{\partial g}{\partial\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{X}}\bigwedge_{\nu}\left(\frac{1}{2}\overline{\omega}\overline{\omega}\bigwedge_{2}\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial\mathbf{X}}\right) = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{X}}\bigwedge_{\nu}{}^{[1]}\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial\mathbf{X}}\bigwedge_{2}\overline{\omega}\overline{\omega}$$

$$= \left(\tilde{\mathbf{X}}\bigwedge_{\nu}{}^{[1]}\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\dot{\mathbf{X}}}\right)\cdot\tilde{\mathbf{J}}\bigwedge_{2}\overline{\omega}\overline{\omega} = \left(\tilde{\mathbf{X}}\bigwedge_{\nu}{}^{[1]}\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\dot{\mathbf{X}}}\right)\cdot(\tilde{\overline{\omega}}\cdot\mathbf{J}\cdot\overline{\omega}).$$

После подстановки полученных выражений в (56) имеем

$$\tilde{\mathbf{X}}\bigwedge_{\nu}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial g}{\partial\dot{\mathbf{X}}} - \frac{\partial g}{\partial\mathbf{X}}\right] = \tilde{\mathbf{X}}\bigwedge_{\nu}{}^{[1]}\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\dot{\mathbf{X}}}\cdot(\mathbf{J}\cdot\overline{\omega}). \tag{57}$$

4. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим систему, составленную из n абсолютно твердых тел со структурой дерева, которая находится в однородном поле тяжести. Допустим, что каждое тело системы имеет динамическую ось симметрии, в концах которой расположены идеальные сферические или универсальные шарниры. У одного из тел, которому присваивается номер 1, есть неподвижная точка (сферический шарнир), находящаяся на оси симметрии тела. Пусть составлен ортонормированный граф системы, нумерацию которого предполагаем правильной [1]. Дугам графа $u_1, \ldots, u_n$ отвечают шарниры, а вершинам $s_0, s_1, \ldots, s_n$ — тела системы. Вершине s_0 соответствует неподвижное в инерциальном пространстве тело, с которым связано тело 1. Введем матрицу $(T_{kj})_{k,j=1}^{n}$ [5] следующим образом: $T_{kj} = -1$, если вершина s_k находится на пути от s_0 к s_j, в остальных случаях $T_{kj} = 0$. Обозначим через m_k массу тела k, через $\mathbf{J}_k$ — тензор инерции дополненного тела k [5] относительно предшествующей шарнирной точки

$\Gamma_{\cdot}$, а через $\mathbf{e}_3^{(k)}$ — единичный вектор, направленный по оси симметрии от точки P_k к центру массы C_k тела k. Тогда с помощью введеных в [6] постоянных

$$b_k = \frac{(c_k - l_k)m_k - l_k \sum\limits_{j=1}^{n} T_{kj} m_j}{M},$$

$$g_{kj} = -T_{kj} b_j l_k - T_{jk} l_j b_k \qquad (k,\, j = 1, \ldots, n),$$

где $c_k = |P_k C_k|$, l_k — длина оси тела k, $M = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k$, функция Лагранжа для системы представляется в виде

$$L = T - \Pi, \quad T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \overline{\omega_k} \cdot \mathbf{J}_k \cdot \overline{\omega}_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} g_{kj} \mathbf{e}_3^{(j)} \cdot \mathbf{e}_3^{(k)},$$

$$\Pi = Mg \sum_{j=1}^{n} b_j \mathbf{e}_3^{(j)} \cdot \mathbf{e}_3^{(0)}.$$

Допустим, что в качестве тензорных обобщенных координат системы выбраны величины $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_N$. В уравнениях (45) представим функцию L в виде $L = T_1 + T_2 - \Pi$, где

$$T_1 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \overline{\omega}_k \cdot \mathbf{J}_k \cdot \overline{\omega}_k, \quad T_2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} g_{kj} \dot{\mathbf{e}}_3^{(j)} \cdot \dot{\mathbf{e}}_3^{(k)}.$$

Для каждого слагаемого суммы T_1 можно применить формулу (57), после чего получаем

$$\widetilde{\mathbf{X}}_i \bigwedge_{\nu_i} \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} - \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{X}_i}\right] = \widetilde{\mathbf{X}}_i \bigwedge_{\nu_i} \sum_{k=1}^{n} {}^{[1]}\frac{\partial \overline{\omega}_k}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} \cdot (\mathbf{J}_k \cdot \overline{\omega}_k)^{\cdot}.$$

Так как $g_{kj} = g_{jk}$, для производных суммы T_2 выполняются равенства

$$\frac{\partial T_2}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} g_{kj}\, {}^{[1]}\frac{\partial \dot{\mathbf{e}}_3^{(k)}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} \cdot \dot{\mathbf{e}}_3^{(j)}, \qquad \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{X}_i} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} g_{kj}\, {}^{[1]}\frac{\partial \dot{\mathbf{e}}_3^{(k)}}{\partial \mathbf{X}_i} \cdot \dot{\mathbf{e}}_3^{(j)},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} - \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{X}_i}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j\neq k} g_{kj} \left[{}^{[1]}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{\mathbf{e}}_3^{(k)}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} - \frac{\partial \dot{\mathbf{e}}_3^{(k)}}{\partial \mathbf{X}_i}\right) \cdot \dot{\mathbf{e}}_3^{(i)} + {}^{[1]}\frac{\partial \dot{\mathbf{e}}_3^{(k)}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} \cdot \ddot{\mathbf{e}}_3^{(j)}\right].$$

Поскольку векторы $\mathbf{e}_3^{(k)}$ не зависят от производных $\dot{\mathbf{X}}_i$, то справедливы соотношения

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{e}}_3^{(k)}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} = \frac{\partial \mathbf{e}_3^{(k)}}{\partial \mathbf{X}_i}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{\mathbf{e}}_3^{(k)}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{e}_3^{(k)}}{\partial \mathbf{X}_i} = \frac{\partial \dot{\mathbf{e}}_3^{(k)}}{\partial \mathbf{X}_i},$$

откуда находим, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{\mathbf{e}}_3^{(k)}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} - \frac{\partial \dot{\mathbf{e}}_3^{(k)}}{\partial \mathbf{X}_i} = \mathbf{O}_{\nu_i+1}.$$

Кроме того, имеет место равенство

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{e}}_3^{(k)}}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i}(\overline{\omega}_k \times \mathbf{e}_3^{(k)}) = -\widetilde{\mathbf{e}}_3^{(k)} \cdot \frac{\partial \overline{\omega}_k}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i}.$$

Таким образом окончательно

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} - \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{X}_i} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j\neq k}{}^{[1]}\frac{\partial \overline{\omega}_k}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} \cdot \mathbf{e}_3^{(k)} \times \ddot{\mathbf{e}}_3^{(j)}. \tag{58}$$

Аналогичным способом, как при выводе равенств (58), находим, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} - \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{X}_i} = Mg\sum_{k=1}^{n} b_k{}^{[1]}\frac{\partial \overline{\omega}_k}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} \cdot \mathbf{e}_3^{(k)} \times \mathbf{e}_3^{(0)}.$$

После подстановки полученных соотношений в (45), уравнения движения системы тел записываются в виде

$$\widetilde{\mathbf{X}}_i \bigwedge_{\nu_i}\sum_{k=1}^{n}{}^{[1]}\frac{\partial \overline{\omega}_k}{\partial \dot{\mathbf{X}}_i} \cdot \left[(\mathbf{J}_k \cdot \dot{\overline{\omega}}_k) + \sum_{j\neq k} g_{kj}\mathbf{e}_3^{(k)} \times \ddot{\mathbf{e}}_3^{(j)} - Mgb_k\mathbf{e}_3^{(k)} \times \mathbf{e}_3^{(0)}\right] = \mathbf{O}_{\frac{1}{2}(3\nu_i-\nu_i^2)} \quad (i = 1, \ldots, N). \tag{59}$$

Рассмотрим теперь частные случаи, в которых укажем конкретный способ выбора тензорных обобщенных координат.

1. Пусть все шарниры системы являются сферичными и для тензорных обобщенных координат системы выбраны ортонормированные тензоры $\mathbf{Z}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, которые определяют угловую ориентацию тел относительно инерциального пространства. Очевидно, эти переменные являются независимыми. Так как $\dfrac{\partial \overline{\omega}_k}{\partial \dot{\mathbf{Z}}_i} = \mathbf{O}_3$ для $i \neq k$, то уравнения движения принимают вид

$$\mathbf{Z}_i \bigwedge_{2}{}^{[1]}\frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{\mathbf{Z}}_i}\left[(\mathbf{J}_i \cdot \dot{\overline{\omega}}_i) + \sum_{j\neq i} g_{ij}\mathbf{e}_3^{(i)} \times (\ddot{\mathbf{e}}_3^{(j)} + Mgb_i\mathbf{e}_3^{(0)})\right] = \mathbf{O} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Используя формулу (48), получаем уравнения

$$(60)\qquad (\mathbf{J}_i\cdot\overline{\omega_i})^{\bullet}+\sum_{j\neq i}g_{ij}\mathbf{e}_3^{(i)}\times(\ddot{\mathbf{e}}_3^{(j)}+Mgb_i\mathbf{e}_3^{(0)})=\mathbf{O}\quad(i=1,\dots,n),$$

которые можно вывести непосредственно из теоремы о кинетическом моменте.

2. Рассмотрим другой способ выбора тензорных обобщенных координат. Для каждого тела номер k выбираем неизменно связанный с ним базис $\mathbf{e}_1^{(k)},\mathbf{e}_2^{(k)},\mathbf{e}_3^{(k)}$ и фиксированный в инерциальном пространстве единичный вектор $\mathbf{a}_k$, для которого предполагаем выполнение условия $\mathbf{e}_3^{(k)}\times\mathbf{a}_k\neq 0$. Единичный вектор

$$\mathbf{p}_k=\frac{\mathbf{a}_k\times\mathbf{e}_3^{(k)}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{e}_3^{(k)}|}\,.$$

образует с вектором $\mathbf{e}_1^{(k)}$ угол, который обозначим через ϕ_k. В качестве тензорных обощенных координат системы принимаем векторы $\mathbf{e}_3^{(k)}$ и скалярные величины ϕ_k $(k=1,\dots,n)$. Используя равенства (42), получаем лагранжиан L в виде функции выбранных тензорных координат. Так как

$$\frac{\partial\overline{\omega}_k}{\partial\phi_i}=\begin{cases}\mathbf{O}, & i\neq k\\ \mathbf{e}_3^{(i)}, & i=k,\end{cases}\quad \frac{\partial\overline{\omega}_k}{\partial\dot{\mathbf{e}}_3^{(k)}}=\begin{cases}\mathbf{O}_2, & i\neq k\\ \mathbf{A}_i, & i=k,\end{cases}$$

где $\mathbf{A}_i=\dfrac{(\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{e}_3^{(i)})\mathbf{e}_3^{(i)}\mathbf{p}_i}{|\mathbf{a}_i\times\mathbf{e}_3^{(i)}|}+\tilde{\mathbf{e}}_3^{(i)}$, то уравнения теперь принимают вид

$$\mathbf{e}_3^{(i)}\cdot(\mathbf{J}_i\overline{\omega_i})^{\bullet}=0,$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_3^{(i)}\cdot\mathbf{A}_i^{\mathrm{T}}\cdot[(\mathbf{J}_i\cdot\overline{\omega}_i)^{\bullet}+\mathbf{e}_3^{(i)}\times(\sum_{j\neq k}g_{ij}\ddot{\mathbf{e}}_3^{(j)}-Mb_ig\mathbf{e}_3^{(0)})]=\mathbf{0}\quad(i=1,\dots,n).$$

Используя первое уравнение, вычисляем произведение

$$\tilde{\mathbf{e}}_3^{(i)}\cdot\mathbf{A}_i\cdot(\mathbf{J}_i\cdot\overline{\omega}_i)^{\bullet}=\frac{(\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{e}_3^{(i)})}{|\mathbf{a}_i\times\mathbf{e}_3^{(i)}|}\mathbf{e}_3^{(i)}\mathbf{p}_i\cdot[\mathbf{e}_3^{(i)}(\mathbf{J}_i\cdot\overline{\omega}_i)^{\bullet}$$

$$-\tilde{\mathbf{e}}_3^{(i)}\cdot\tilde{\mathbf{e}}_3^{(i)}\cdot(\mathbf{J}_i\cdot\overline{\omega_i})^{\bullet}]=-\tilde{\mathbf{e}}_3^{(i)}\cdot\tilde{\mathbf{e}}_3^{(i)}\cdot(\mathbf{J}_i\cdot\overline{\omega_i})^{\bullet}.$$

Тензор $-\tilde{\mathbf{e}}_3^{(i)}\cdot\tilde{\mathbf{e}}_3^{(i)}=\mathbf{E}_2-\mathbf{e}_3^{(i)}\mathbf{e}_3^{(i)}=\mathbf{e}_1^{(i)}\mathbf{e}_1^{(i)}+\mathbf{e}_2^{(i)}\mathbf{e}_2^{(i)}$ действует как ортогональное проектирование на плоскость с нормальным вектором $\mathbf{e}_3^{(i)}$. Так как вектор $\mathbf{e}_3^{(i)}\times\mathbf{x}$, $\mathbf{x}\in\mathcal{E}$, тоже находится в этой плоскости, то уравнения движения приобретают вид

$$\mathbf{e}_3^{(i)}\cdot(\mathbf{J}_i\cdot\omega_i)^{\bullet}=0,$$

$$\tilde{e}_3^{(i)} \cdot \tilde{e}_3^{(i)} \cdot \left[(\mathbf{J}_i \cdot \omega_i) + \mathbf{e}_3^{(i)} \times \left(\sum_{j \neq i} g_{ij} \ddot{\mathbf{e}}_3^{(j)} - M b_i g \mathbf{e}_3^{(0)} \right) \right] = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

и являются проекциями равенства (60) на ось, параллельную вектору $\mathbf{e}_3^{(i)}$, и на плоскость, ортогональную этому вектору.

3. Пусть все шарниры системы — универсальные и оси каждого шарнира являются перпендикулярными между собой. Предположим также, что система является одноконтурной кинематической цепью.

Базис $\underline{e}^{(1)}$, жестко связанный с телом 1, выбираем как в примере 2., т. е. таким образом, чтобы направление вектора $\mathbf{e}_3^{(1)}$ совпало с осью симметрии тела 1. Наличие в системе универсальных шарниров накладывает ограничения на угловые положения остальных тел, в отличие от рассмотренной в предыдущих примерах системы, в которой все тела могут занимать произвольные угловые положения в абсолютном пространстве. Из-за этого обстоятельства оказывается целесообразным в качестве тензорных обобщенных координат системы принять параметры, определяющие относительные положения соседних тел.

Рассмотрим тело номер k ($k = 2, \ldots, n$). В качестве базисного вектора $\mathbf{e}_3^{(k)}$ выбираем единичный вектор оси симметрии тела номер k, который имеет направление от центра шарнира, соединяющего тело номер k с телом номер $(k-1)$, к центру масс тела k. Одна из осей этого шарнира, которая определяется единичным вектором $\mathbf{u}_k$ ($\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{e}_3^{(k-1)} = 0$), остается неподвижной относительно тела k. Так как оси шарнира перпендикулярны между собой, то единичный вектор $\mathbf{e}_1^{(k)}$, направленный по этой оси, можно определить равенством

$$\mathbf{e}_1^{(k)} = \frac{\mathbf{u}_k \times \mathbf{e}_3^{(k)}}{|\mathbf{u}_k \times \mathbf{e}_3^{(k)}|},$$

а вектор $\mathbf{e}_2^{(k)}$ определяем из соотношения $\mathbf{e}_2^{(k)} = \mathbf{e}_3^{(k)} \times \mathbf{e}_1^{(k)}$. Таким образом относительное движение тела k по отношению к телу $(k-1)$ можно определить, задавая вектор $\mathbf{e}_3^{(k)}$ относительно базиса $\underline{e}^{(k-1)}$. Если $\underline{e}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^{\mathrm{T}}$ — ортонормированный инерциальный базис, то абсолютное положение тела k определяется тензором

$$\mathbf{Z}_k = \mathbf{e}_1^{(k)} \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2^{(k)} \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3^{(k)} \mathbf{e}_3.$$

Применяя формулу (42), находим, что угловая скорость $\overline{\Omega}_k$ базиса $\underline{e}^{(k)}$ относительно базиса $\underline{e}^{(k-1)}$ удовлетворяет соотношению

$$\overline{\Omega_k} = \mathbf{A}_k \cdot \overset{\circ (k)}{\mathbf{e}_3}, \mathbf{A}_k = \frac{(\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{e}_3^{(k)}) \mathbf{e}_3^{(k)} \mathbf{e}_1^{(k)}}{|\mathbf{u}_k \times \mathbf{e}_3^{(k)}|} + \tilde{\mathbf{e}}_3^{(k)},$$

где $\overset{\circ (k)}{\mathbf{e}_3} = (\mathbf{e}_1^{(k)} \cdot \mathbf{e}_1^{(k-1)}) \dot{\mathbf{e}}_1^{(k-1)} + (\mathbf{e}_2^{(k)} \cdot \mathbf{e}_2^{(k-1)}) \dot{\mathbf{e}}_2^{(k-1)} + (\mathbf{e}_3^{(k)} \cdot \mathbf{e}_3^{(k-1)}) \dot{\mathbf{e}}_3^{(k-1)}$ — относительная производная вектора относительно базиса $\underline{e}^{(k-1)}$ ($k = 2, \ldots, n$).

Согласно равенству (24), абсолютная угловая скорость тела k выражается суммой

$$\overline{\omega}_k = \overline{\omega}_{k-1} + \overline{\Omega}_k = \overline{\omega}_1 + \sum_{j=2}^{n} \mathbf{A}_j \cdot \overset{\circ}{\mathbf{e}}{}_3^{(j)} \quad (k = 2, \ldots, n), \tag{61}$$

где абсолютная угловая скорость $\overline{\omega}_1$ определяется из равенства $\tilde{\overline{\omega}}_1 = \dot{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}$.

Приведение формулы показывают, что в качестве тензорных обобщенных координат системы можно принять тензор $\mathbf{Z}_1$, задающий положение тела 1. и векторы $\mathbf{e}_3^{(2)}, \ldots, \mathbf{e}_3^{(n)}$. Для производных абсолютных угловых скоростей получаем выражения

$$\frac{\partial \overline{\omega}_k}{\partial \dot{\mathbf{Z}}_1} = \frac{\partial \overline{\omega}_1}{\partial \dot{\mathbf{Z}}_1}, \qquad \frac{\partial \overline{\omega_k}}{\partial \overset{\circ}{\underline{\mathbf{e}}}{}_3^{(j)}} = \begin{cases} \mathbf{O}, & k < i \\ \mathbf{A}_i, & k \geqq i \end{cases}$$

$$(k = 1, \ldots, n, i = 2, \ldots, n).$$

Подставляя эти выражения в (59), находим следующие уравнения движения системы

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^{n} \left[(\mathbf{J}_k \cdot \overline{\omega_k})^{\cdot} + \mathbf{e}_3^{(k)} \times \left(\sum_{j \neq k} g_{kj} \ddot{\mathbf{e}}_3^{(j)} + M b_k g \mathbf{e}_3^{(0)} \right) \right] = 0, \\ \tilde{\mathbf{e}}_3^{(i)} \cdot \mathbf{A}_i^{\mathrm{T}} \cdot \sum_{k=i}^{n} \left[(\mathbf{J}_k \overline{\omega}_k)^{\cdot} + \mathbf{e}_3^{(k)} \times \left(\sum_{j=i+1}^{n} g_{kj} \ddot{\mathbf{e}}_3^{(j)} + M b_k \mathbf{e}_3^{(0)} \right) \right] = 0, \end{gathered} \tag{62}$$

($i = 2, \ldots, n$). Здесь абсолютные угловые скорости $\overline{\omega}_k$ выражаются по формуле (61).

Уравнение (62) эквивалентно двум скалярным уравнениям, которые можно получить, например, умножая его скалярно на векторы осей i-го шарнира $\mathbf{a}_i$ и $\mathbf{e}_1^{(i)}$. Нетрудно убедится, что

$$|\mathbf{a}_i \times \mathbf{e}_3^{(i)}|^2 = 1 - (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_3^{(i)})^2,$$

откуда следует, что

$$\mathbf{a}_i \cdot \tilde{\mathbf{e}}_3^{(i)} \cdot \mathbf{A}_i^{\mathrm{T}} = \mathbf{a}_i, \quad \mathbf{e}_1^{(i)} \cdot (\tilde{\mathbf{e}}_3^{(i)} \cdot \mathbf{A}_i^{\mathrm{T}}) = \mathbf{e}_1^{(i)}.$$

Таким образом получаем $2(n-1)$ скалярных уравнений

$$\mathbf{a}_i \cdot \sum_{k=i}^{n} \left[(\mathbf{J}_k \cdot \overline{\omega_k})^{\cdot} + \mathbf{e}_3^{(k)} \times \left(\sum_{j=i+1}^{n} g_{kj} \ddot{\mathbf{e}}_3^{(j)} + M b_k g \mathbf{e}_3^{(0)} \right) \right] = 0,$$

$$\mathbf{e}_1^{(i)} \cdot \sum_{k=i}^{n} \left[(\mathbf{J}_k \cdot \overline{\omega_k})^{\bullet} + \mathbf{e}_3^{(k)} \times \left(\sum_{j=i+1}^{n} g_{kj} \ddot{\mathbf{e}}_3^{(j)} + M b_k g \mathbf{e}_3^{(0)} \right) \right] = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Спивак, М. Математический анализ на многообразиях. Мир, М., 1968.
2. Lilov, L. Mechanical-Mathematical Modeling of multibody systems. Dr. sc. Thesis, 1985.
3. Картан, А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. Мир, М., 1971.
4. Федеров, Ф. И. Группа Лоренца. М., Наука, 1979.
5. Виттенбург, Й. Динамика систем твердых тел. М., Мир, 1980.
6. Лилов, Л., Н. Василева. Стационарные движения системы гироскопов Лагранжа со структурой дерева. — Теоретична и приложна механика, 1984, XV, № 3.

Поступила 15. IV. 1989 г.